Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Universität Bielefeld

Bielefeld, 16.12.2015

Wintersemester 2015/16

Mathematik I für Chemie

Übungsblatt 9

Aufgabe 44: Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \ln(x)$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(\frac{x}{2})}{1-\cos(x)}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x}$

(d) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln(x)}{x}$

(e) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$. *Hinweis:* Formen Sie geschickt um! **(1+2+1+1+1 Punkte)**

Aufgabe 45: Berechnen Sie die Ableitung von $f(x) = \arctan(x)$.
Hinweis: $(\cos(x))^2 = \frac{1}{1+(\tan(x))^2}$. **(2 Punkte)**

Aufgabe 46: Entwicklen Sie die Funktion $f(x) = \sin(x)$ in eine Taylorreihe um den Punkt $x = \frac{\pi}{2}$.
Hinweis: Wie lauten $f^{(2n)}(\frac{\pi}{2})$ und $f^{(2n+1)}(\frac{\pi}{2})$? **(4 Punkte)**

Aufgabe 47: (a) Wir haben in der Vorlesung die Funktion $f(x) = x^\alpha$ nur für rationale α abgeleitet. Zeigen Sie, dass $f'(x) = \alpha\, x^{\alpha-1}$ auch für beliebige α gilt, indem Sie x^α als $x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$ schreiben und die Kettenregel anwenden.

(b) Berechnen Sie die k-te Ableitung von $f(x) = x^\alpha$. Verwenden Sie das Pochhammersymbol $(\alpha)_n := \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n+1)$.

(c) Zeigen Sie, dass die k-te Ableitung von $f(x) = x^n$ für natürliche Zahlen n durch

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} & \text{für } k \leq n \\ 0 & \text{für } k > n \end{cases}$$

gegeben ist.

(d) Berechnen Sie die Taylorreihe von $f(x) = (1+x)^\alpha$ um den Punkt $x = 0$.
Hinweis: Verwenden Sie die Definition $\binom{\alpha}{n} := \frac{(\alpha)_n}{n!}$.

(e)* Was passiert, wenn α eine natürliche Zahl ist? Wie hängt $\binom{\alpha}{n}$ mit dem üblichen Binomialkoeffizienten $\binom{m}{n}$ für nicht nicht-negative ganze Zahlen $m \geq n$ zusammen? Was passiert für $m < n$. Wie muss man dementsprechend $k!$ für negative ganze Zahlen k definieren, damit es zum Binomialkoeffizienten passt?

(1+1+1+3 Punkte + 2 Bonuspunkte)

(bitte wenden)

Ehemalige Klausuraufgaben – je ein Bonuspunkt

Aufgabe 48*: Betrachten Sie die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = xe^x$. Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass die n-te Ableitung $g^{(n)}(x)$ von g durch

$$g^{(n)}(x) = x\,e^x + n\,e^x$$

gegeben ist.

Aufgabe 49*: Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen:

(a) $(\sin(x))^2 \cdot (\cos(x))^3$

(b) $\ln(1 + x^2)$

(c) $\exp(\sinh(x)^2)$ *Hinweis:* Hier ist $\sinh(x) := \exp(x) - \exp(-x)$.

Aufgabe 50*: (a) Sei i die imaginäre Einheit. Berechnen Sie $(i + i^3 + i^5 + i^7)^5$.

(b) Geben Sie $\dfrac{3-i}{2+i}$ in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

Aufgabe 51*: Berechnen Sie folgende Grenzwerte und Reihen, falls sie existieren:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + \cos(n)}{7n^2 + 3n - 1}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{(x^2 - 1) \cdot e^x}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$

Aufgabe 52*: (a) In einem Studentenheim gibt es 27 Zimmer. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 10 Studierende auf diese Zimmer zu verteilen? (Jede(r) Studierende bekommt genau ein Zimmer, und zwar ein Zimmer allein.)

(b) In einem anderen Studentenheim gibt es 23 Zimmer, von denen 12 barrierefrei sind. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 23 Studierende auf diese Zimmer zu verteilen, wenn unter den Studierenden eine Rollstuhlfahrerin und ein Rollstuhlfahrer sind.

Aufgabe 53*: Beweisen Sie für $n \geq 2$ die Gültigkeit der Formel $1 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$.

Aufgabe 54*: Zeigen Sie (per Induktion) die Gültigkeit folgender Formel für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3} n \left(n + \frac{1}{2}\right)(n+1).$$

Abgabe bis zum 6.1.2016!

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins Jahr 2016!