Universität Bielefeld
Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 20.1.2016

Wintersemester 2015/16

Mathematik I für Chemie

Übungsblatt 12

Aufgabe 64: Betrachten Sie die Taylorreihe von $\exp(x)$ um den Punkt $x = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass das Restglied $R_n(x)$ für $|x| \leq 1$ durch $|R_n(x)| \leq \frac{e}{(n+1)!}x^{n+1}$ abgeschätzt werden kann.
Hinweis: Verwenden Sie die Abschätzung $|\exp(x)| \leq e$ für $|x| \leq 1$.

(b) Berechnen Sie ohne Hilfe des Taschenrechners die ersten 8 Nachkommastellen von $e^{\frac{1}{100}}$. **(2+2 Punkte)**

Aufgabe 65: Berechnen Sie die Taylorreihe von $\arctan(x)$ um den Punkt $x = 0$, indem Sie die Taylorreihe von $\frac{1}{1+x^2}$ integrieren.
Hinweis: Verwenden Sie die geometrische Reihe, um die Taylorreihe von $\frac{1}{1+x^2}$ zu berechnen. **(3 Punkte)**

Aufgabe 66: Für die Konzentration $c(t)$ eines Stoffes gelte die folgende Differentialgleichung:

$$c'(t) = -2k\, c^3(t).$$

Zum Zeitpunkt $t = t_0$ sei die Konzentration durch c_0 gegeben. Berechnen Sie die Konzentration $c(t)$ für alle $t \geq t_0$ und skizzieren Sie diese. **(4 Punkte)**

Aufgabe 67: Wir betrachten eine Bakterienkolonie der Größe $N(t)$. Ihr Wachstum sei durch die Differentialgleichung

$$N'(t) = k(t)\, N(t)$$

gegeben, wobei $k(t)$ jahreszeitlichen Schwankungen unterworfen und durch $k(t) = k \sin(t)$ gegeben sei. Berechnen Sie $N(t)$ für alle $t \geq 0$ unter der Anfangsbedingung $N(0) = 0$. **(4 Punkte)**

Aufgabe 68*: Beweisen Sie den Satz über das Restglied aus der Vorlesung, d.h., zeigen Sie, dass für jede $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion $f(x)$ gilt: $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, wobei $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ und $R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$.
Hinweis: partielle Integration und vollständige Induktion **(2 Bonuspunkte)**

Abgabe bis zum 27.1.2016!