

Wintersemester 2016/17

**Diskrete Mathematik****Präsenzübungen 5**

- Aufgabe 1:** (a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, aus Rechtecken der Seitenlängen  $1 \times 2$  und  $2 \times 1$  ein Rechteck mit Seitenlängen  $2 \times n$  zu legen? Bestimmen Sie eine Rekursion. Wie lautet die Lösung?
- (b) Nehmen wir nun an, wir hätten blaue und rote Rechtecke, wobei wir die blauen nur waagrecht, die roten aber sowohl waagrecht als auch senkrecht anlegen dürfen, wobei aber immer nur gleichfarbige Rechtecke übereinander liegen dürfen. Wie viele verschiedene  $2 \times n$  Rechtecke gibt es jetzt?

- Aufgabe 2:** (ehemalige Klausuraufgabe) Zeigen Sie, dass die Catalan-Zahlen  $C_n$  die folgende Gleichung erfüllen:

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} \quad \text{für } n \geq 0.$$

- Aufgabe 3:** Sei  $a_n$  die Anzahl „sinnvoller“ Klammerungen eines Produktes von  $n+1$  Faktoren. Zeigen Sie, dass  $a_n = C_n$  gilt, wobei die  $C_n$  die Catalan-Zahlen sind.

*Hinweis:* Sinnvolle Klammerungen sind z.B.  $(ab)c$  oder  $a((bc)d)$ , aber nicht  $((ab))c$  oder  $(a)(b)c$ . Auch  $(abc)d$  ist keine sinnvolle Klammerung, da daraus nicht hervorgeht, in welcher Reihenfolge das Produkt  $abc$  auszuwerten ist.

- Aufgabe 4\*:** Sei  $p(x) = c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0$  ein Polynom  $n$ -ten Grades.

- (a) Zeigen Sie, dass das reziproke Polynom  $x^n p\left(\frac{1}{x}\right)$  durch

$$x^n p\left(\frac{1}{x}\right) = c_0 x^n + \dots + c_{n-1} x + c_n$$

gegeben ist.

- (b) Sei  $y \neq 0$  eine  $k$ -fache Nullstelle von  $p(x)$ . Zeigen Sie, dass  $\frac{1}{y}$  eine  $k$ -fache Nullstelle des reziproken Polynoms ist.