Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 9.1.2017

Wintersemester 2016/17

Diskrete Mathematik

Präsenzübungen 9

Aufgabe 1: (a) Bestimmen Sie für $a \in \{0, \dots, 6\}$ die kleinste natürliche Zahl $n = n(a)$, so dass $a^n \equiv 1 \pmod 7$ gilt. Gibt es für jedes a so ein $n(a)$?

(b) Bestimmen Sie analog für $a \in \{0, \dots, 9\}$ die kleinste natürliche Zahl $n = n(a)$, so dass $a^n \equiv 1 \pmod{10}$ gilt. Für welche a existiert so ein $n(a)$?

(c) Stellen Sie eine Vermutung auf, für welche a ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $a^n \equiv 1 \pmod b$ gilt. Wie groß kann $n(a)$ (für ein gegebenes b) höchstens sein?
Hinweis: Sie müssen hier nur Vermutungen angeben, diese aber nicht beweisen - das machen wir in der Vorlesung. Ein paar Begründungen schaden aber auch nicht. :-)

Aufgabe 2: Bestimmen Sie durch Ausprobieren, ob die folgenden Kongruenzen eine oder mehrere Lösungen besitzen:

(a) $3x \equiv 2 \pmod 5$

(b) $3x \equiv 2 \pmod 6$

(c) $4x \equiv 2 \pmod 6$

(d) $5x \equiv 7 \pmod 8$

Stellen Sie auch hier eine Vermutung auf, wann die Kongruenz $ax \equiv b \pmod c$ eine Lösung hat und wann nicht.

Aufgabe 3: (ehemalige Klausuraufgabe) Seien f_n die Fibonacci-Zahlen. Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion:

$$\sum_{i=0}^{n} f_i = f_{n+2} - 1.$$

Aufgabe 4*: (ehemalige Klausuraufgabe (Bonusaufgabe)) Sei μ die Möbiusfunktion, φ die Euler'sche φ-Funktion und $u(n) = 1$ für alle n. Berechnen Sie $\mu * \varphi * u$.

Aufgabe 5: (ehemalige Klausuraufgabe) Berechnen Sie die erzeugende Funktion für die folgende Rekursion.

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ für } n \geq 2$$
$$a_0 = 2$$
$$a_1 = 3.$$