

Wintersemester 2016/17

Diskrete Mathematik**Übungszettel 1****Aufgabe 6:** Sei X eine nichtleere endliche Menge mit $|X| = n$.

- (a) Geben Sie eine explizite Bijektion zwischen der Menge der Teilmengen von X und der Menge der 0-1-Wörter der Länge n an.
- (b) Wie viele 0-1-Wörter der Länge n gibt es? Beweisen Sie Ihre Antwort durch vollständige Induktion nach n .
- (c) Wie viele Teilmengen hat X also? **(2+2+1 Punkte)**

Aufgabe 7: Seien a_1, \dots, a_{14} beliebige natürliche Zahlen. Zeigen Sie, dass mindestens eine Differenz $a_i - a_j$ durch 13 teilbar ist.*Hinweis: Lösen Sie erst eine andere Aufgabe dieses Zettels.***(2 Punkte)****Aufgabe 8:** Zur Erinnerung: eine Relation \sim auf einer Menge X heißt Äquivalenzrelation, wenn die folgenden Eigenschaften für alle $x, y, z \in X$ erfüllt sind:

$$x \sim x \qquad \qquad \qquad \text{(reflexiv)}$$

$$x \sim y \implies y \sim x \qquad \qquad \text{(symmetrisch)}$$

$$x \sim y \wedge y \sim z \implies x \sim z \qquad \qquad \text{(transitiv)}$$

- (a) Die Mengen der Form $[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}$ heißen Äquivalenzklassen. Zeigen Sie, dass für beliebige $x, y \in X$ entweder $[x] = [y]$ oder $[x] \cap [y] = \emptyset$ gilt.
- (b) Sei $X = \mathbb{Z}$. Zwei Zahlen x, y seien äquivalent, d.h. $x \equiv y$, falls ihre Differenz $x - y$ durch 13 teilbar ist. Zeigen Sie, dass \equiv tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist.
- (c) Bestimmen Sie alle Äquivalenzklassen von \equiv . **(2+2+2 Punkte)**

Aufgabe 9: Beweisen Sie das folgende, verallgemeinerte Schubfachprinzip: Gegeben seien n Zahlen $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$, und sei $M = 1 - n + \sum_{i=1}^n m_i$. Werden mindestens M Gegenstände auf n Schubladen verteilt, die von 1 bis n durchnummeriert sind, so gibt es eine Schublade i , in der mindestens m_i Gegenstände liegen.

Wie hängt diese Aussage mit dem Schubfachprinzip zusammen?

(2+1 Punkte)**Abgabe bis zum 27.10.2016!**