Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 27.10.2016

Wintersemester 2016/17

# Diskrete Mathematik

## Übungsblatt 2

**Aufgabe 10:** (a) Zeigen Sie, dass

$$|X \cup Y| = |X \setminus Y| + |Y \setminus X| + |X \cap Y|$$

für beliebige endliche Mengen gilt.

(b) Wieviele Elemente enthält $X \setminus Y$, wenn $|X| = n$ und $|X \cap Y| = m$ gilt?

(c) Zeigen Sie

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|.$$

**(1+1+1 Punkte)**

**Aufgabe 11:** Sei $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq k \leq n$. Bezeichnen Sie mit $\binom{n}{k}$ die Anzahl der $k$-elementigen Teilmengen einer $n$-elementigen Menge. Zeigen Sie lediglich unter Benutzung dieser Definition, dass gilt:

(a) $\binom{n}{0} = 1$.

(b) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

(c) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.

(d) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

*Hinweis:* Die Ihnen bekannte Identität $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ darf hier ausdrücklich *nicht* verwendet werden. Für (b) und (c) müssen Sie entsprechende Bijektionen konstruieren. Für (c) benötigen Sie zusätzlich die Summenregel $|X \dot\cup Y| = |X| + |Y|$, wobei $\dot\cup$ andeutet, dass es sich um eine disjunkte Vereinigung handelt, also $X \cap Y = \varnothing$ gilt. Aufgabe (d) folgt schließlich mit Hilfe von Aufgabe 6(c). **(1+2+2+1 Punkte)**

**Aufgabe 12:** Eine Permutation, die genau zwei Elemente vertauscht, heißt Transposition.

(a) Sei $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\pi \circ (12) \circ \pi^{-1}$.

(b) Sei nun $\pi$ eine beliebige Permutation. Zeigen Sie, dass $\pi \circ (12) \circ \pi^{-1}$ wieder eine Transposition ist. Welche zwei Elemente werden vertauscht?

(c) Wie lautet die Inverse der Transposition $(j\,k)$?

(d) Sei $\pi$ eine Permutation, die nur die ersten $k$ Elemente vertauscht, und für die $\pi(k) \neq k$ gilt (wie groß ist $k$ mindestens?) Zeigen Sie, dass $\pi$ in der Form $\pi = \tau \circ \sigma$ dargestellt werden kann, wobei $\tau$ eine Transposition und $\sigma$ eine Permutation ist, die nur die ersten $k-1$ Elemente vertauscht. *Hinweis:* Wählen Sie $\tau = (k\,\pi(k))$.

(e) Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass sich jede Permutation von $n$ Elementen als Produkt von höchstens $n-1$ Transpositionen schreiben lässt.
*Hinweis:* Das Produkt von null Faktoren ist die Identität. **(1+2+1+2+2 Punkte)**

(bitte wenden)

**Aufgabe 13:** Wir haben eine Schachtel mit $n$ verschiedenen Perlen.

(a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es $k \leq n$ Perlen auf einer Perlenschnur aufzufädeln?

(b) Nun knüpfen wir die zwei Enden aneinander, sodass wir eine Kette erhalten. Nun können wir Perlen von einem Ende ans andere schieben. Wie viele verschiedene Perlenketten gibt es? (Zwei Perlenketten sollen als gleich gelten, wenn die Perlen durch bloßes Verschieben in die gleiche Reihenfolge gebracht werden.)

(c) Durch Wenden der Kette können wir die Reihenfolge der Perlen umdrehen. Wie viele verschiedene Ketten gibt es, wenn wir annehmen, dass wir einer Kette nicht ansehen können, ob sie gewendet wurde oder nicht? **(1+1+2 Punkte)**

**Abgabe bis zum 3.11.2016!**