

Wintersemester 2016/17

**Diskrete Mathematik****Übungsblatt 5****Aufgabe 22:** Gegeben sei die Rekursion

$$a_0 = 2, a_1 = 2$$
$$a_n = 2a_{n-1} - 5a_{n-2} \text{ für } n \geq 2.$$

- (a) Drücken Sie die Rekursion in Matrixschreibweise aus und berechnen Sie die Eigenwerte der entsprechenden Matrix  $A$ .
- (b) Berechnen Sie die Eigenvektoren von  $A$  und schreiben sie  $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$  als Linearkombination der Eigenvektoren.
- (c) Leiten Sie eine explizite Formel für  $a_n$  her. **(2+2+2 Punkte)**

**Aufgabe 23:** Betrachten Sie die Rekursion

$$a_0 = -2, a_1 = 2$$
$$a_n = -2a_{n-1} + 2a_{n-2} \text{ für } n \geq 2.$$

- (a) Leiten Sie eine Gleichung für die erzeugende Funktion  $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  her und lösen Sie diese.
- (b) Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung von  $g(x)$ .
- (c) Berechnen Sie die Taylorreihe von  $g(x)$  und geben Sie eine geschlossene Formel für  $a_n$  an.
- (d) Berechnen Sie  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ , und geben Sie den Konvergenzradius von  $g(x)$  an. **(2+2+2+2 Punkte)**

**Aufgabe 24:** Sei  $a_n$  die Zahl der RNA-Stränge der Länge  $n$ , in denen die Base Guanin nie unmittelbar auf sich selbst folgt.

- (a) Zeigen Sie, dass  $a_1 = 4$  und  $a_2 = 15$  gilt.
- (b) Zeigen Sie, dass für  $n \geq 3$  gilt:

$$a_n = 3a_{n-1} + 3a_{n-2}.$$

- (c) Leiten Sie eine explizite Formel für  $a_n$  her. **(2+2+2 Punkte)**

**Abgabe bis zum 24.11.2016!**