Universität Bielefeld
Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 24.11.2016

Wintersemester 2016/17

Diskrete Mathematik

Übungsblatt 6

Aufgabe 25: Für $c \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist der Binomialkoeffizient $\binom{c}{n}$ durch

$$\binom{c}{n} = \frac{(c)_n}{n!}$$

definiert. Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$

$$\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$$

gilt. **(2 Punkte)**

Aufgabe 26: Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, aus Rechtecken der Seitenlängen 1×1, 2×1 und 2×2 ein Rechteck mit Seitenlängen $2 \times n$ zu legen? Bestimmen Sie eine Rekursion und lösen Sie diese.
Hinweis: Es gibt nur stehende 2×1-Rechtecke, keine liegenden. **(4 Punkte)**

Aufgabe 27: Berechnen Sie die erzeugende Funktion für die folgende inhomogene lineare Rekursion

$$\begin{aligned} a_n &= 4a_{n-1} - 3a_{n-2} + 4 \quad \text{für } n \geq 2, \\ a_0 &= 1, \quad a_1 = 1. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie daraus eine explizite Formel für a_n.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die erzeugende Funktion auf die Form

$$g(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{4x^2}{(1-x)^2(1-3x)} = \frac{-2x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-3x}$$

gebracht werden kann. **(4 Punkte)**

Aufgabe 28: In Demokratien gibt es bekanntlich ab und zu Wahlen, bei denen es sehr gemein zu gehen kann. Da kann eine Kandidatin in allen Umfragen führen und dann doch verlieren, da kann eine Kandidatin mehr Stimmen als der Gegenkandidat bekommen und dann reicht es doch nicht zum Sieg, oder ein Kandidat führt fast während des gesamten Auszählungsvorgangs, wird aber dann im letzten Augenblick doch noch durch ein paar Briefwahlstimmen geschlagen (ätsch!).

Wir betrachten hier zwei Kandidaten A und B, wobei auf A n Stimmen und auf B $n+1$ entfallen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass A während des Auszählvorgangs bis (einschließlich) zur vorletzten Stimme nie hinten liegt, aber dann doch noch überholt wird?

(a) Berechnen Sie zuerst die Zahl aller möglichen Auszählvorgänge.
Hinweis: Sie können einen Auszählvorgang als einen String AABABB... der Länge $2n+1$ anschreiben.

(b) Bestimmen sie die Zahl c_n aller Auszählvorgänge, bei denen Kandidat A bis zur vorletzten Stimme nie zurück liegt, aber dann doch noch überholt wird.

(bitte wenden)

Hinweis: Wie viele verschiedene Auszählvorgänge gibt es, bei denen Kandidat A von der ersten bis zur $(2n-1)$-ten Stimme immer vorne liegt? Wie viele Auszählvorgänge (mit $2n+1$ Stimmen) gibt es, bei denen Kandidat A von der ersten bis zur $(2k-1)$-ten Stimme vorne liegt? Das reicht jetzt für eine Rekursion.

(c) Also, wie lautet jetzt die Wahrscheinlichkeit? **(1+4+1 Punkte)**

Aufgabe 29*: Betrachten Sie die Rekursion

$$\begin{aligned} a_n &= n a_{n-1} + 1 \quad \text{für } n \geq 1 \\ a_0 &= \alpha\,. \end{aligned}$$

Geben Sie eine Gleichung für die exponentielle erzeugende Funktion $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ an, und berechnen Sie daraus $g(x)$. *Hinweis:* Es ist nur die erzeugende Funktion gefragt, nicht die Taylorreihe oder eine explizite Formel für die a_n. **(2 Bonuspunkte)**

Abgabe bis zum 1.12.2016!