Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 1.12.2016

Wintersemester 2016/17

Diskrete Mathematik

Übungsblatt 7

Aufgabe 30: Betrachten Sie den euklidischen Algorithmus $r_{-1} = a$, $r_0 = b$, $r_{k-2} = q_k r_{k-1} + r_k$ für zwei ganze Zahlen a, b mit $0 < |b| < |a|$ wie in der Vorlesung in zwei verschiedenen Varianten.

(a) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von 611 und 252, zuerst mit der Variante mit $0 \leq r_k < r_{k-1}$.

(b) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von 611 und 252, nun mit der Variante mit $-\frac{|r_{k-1}|}{2} < r_k \leq \frac{|r_{k-1}|}{2}$.

(c) Zur Erinnerung: die Fibonacci-Zahlen sind definiert durch $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, f_1 = f_2 = 1$. Geben Sie den euklidischen Algorithmus für $a = f_{m+1}, b = f_m$ explizit an, d.h. geben Sie q_k und r_k für alle k an.

(d) Betrachten Sie nun den euklidischen Algorithmus für zwei beliebige natürliche Zahlen a und b, zuerst die Variante mit $-\frac{|r_{k-1}|}{2} < r_k \leq \frac{|r_{k-1}|}{2}$. Zeigen Sie, dass der euklidische Algorithmus nach spätestens $[\log_2 |b|] + 1$ Schritten terminiert, d.h. es existiert ein $k \leq [\log_2 |b|] + 1$ so, dass $r_k = 0$ gilt.
Hinweis: Hier bedeutet $[x]$ die größte ganze Zahl kleiner gleich x.

(e) Betrachten Sie im Folgenden die Variante mit $0 \leq r_k < r_{k-1}$. Zeigen Sie, dass hier nicht mehr als $2[\log_2 |b|] + 1$ Schritte notwendig sind.
Hinweis: Vergleichen Sie die einzelnen Schritte der beiden Varianten.

(f) Geben Sie das kleinste Paar (lexikographische Ordnung) zweier Zahlen an, für das der euklidische Algorithmus (in der Variante $0 \leq r_k < r_{k-1}$) nach 5 Schritten stoppt.

(1+1+2+1+2+1 Punkte)

Aufgabe 31: Betrachten Sie den euklidischen Algorithmus $r_{-1} = a$, $r_0 = b$, $r_{k-2} = q_k r_{k-1} + r_k$ für zwei ganze Zahlen a, b mit $0 < |b| < |a|$. Die Folgen m_k und n_k seien rekursiv durch

$$
\begin{aligned}
m_k &= m_{k-2} - q_k m_{k-1} \qquad & m_{-1} = 1, m_0 = 0 \\
n_k &= n_{k-2} - q_k n_{k-1} \qquad & n_{-1} = 0, n_0 = 1
\end{aligned}
$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass $r_k = m_k a + n_k b$ für $-1 \leq k \leq \ell - 1$ gilt, wobei ℓ die kleinste Zahl ist, für die $r_\ell = 0$ gilt.

(b) Gilt die Gleichung auch noch für $k = \ell$? **(3+1 Punkte)**

Aufgabe 32: Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler der Polynome $x^4 - 4x^2 - 4x - 1$ und $x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x + 2$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus. **(4 Punkte)**

Abgabe bis zum 8.12.2016!