3. Aufgabenblatt

Aufgabe 3.1. (5 Punkte) Sei $I = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ is *komplex linear*, wenn $AI = IA$, und *komplex anti-linear*, wenn $AI = -IA$.
Zeigen Sie, dass jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sich auf eindeutige Weise als Summe $A = A' + A''$ einer komplex linearen Matrix A' und einer komplex anti-linearen Matrix A'' darstellen lässt.

Aufgabe 3.2. (5 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die komplex linearen Matrizen mit der üblichen Matrizenaddition und Matrizenmultiplikation einen Körper bilden, und dass dieser Körper isomorph zum Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist.

b) Sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine Abbildung mit $U \subset \mathbb{C}$ offen. Zeigen Sie, dass f komplex differenzierbar in z_0 ist genau dann, wenn f reell differenzierbar ist in z_0 mit $df(z_0)$ komplex linear.

Aufgabe 3.3. (5 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für $\phi \in \mathbb{R}$ die folgenden Identitäten gelten

$$\cos(\phi) = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} \quad \text{and} \quad \sin(\phi) = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i}\,.$$

b) Benutzen Sie die Identitäten in a), um Kosinus und Sinus für beliebige komplexe Zahlen zu definieren.

c) Finden Sie die komplexen Ableitungen von $\cos, \sin\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

d) Gilt auch $(\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$? Begründen Sie.

Aufgabe 3.4. (5 Punkte) Es bezeichne $H_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ die obere komplexe Halbebene. Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $ad - bc > 0$. Zeigen Sie, dass die Möbiustransformation

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

eine bijektive Abbildung von H_+ nach H_+ definiert. Ist $f\colon H_+ \to H_+$ biholomorph?