4. Aufgabenblatt

Aufgabe 4.1. (5 Punkte) Seien $a \neq b$ komplexe Zahlen. Wir betrachten die Möbiustransformation

$$f(z) = \frac{z-a}{z-b}\,.$$

a) Ein *Steinerkreis* ist ein Kreis durch a und b. Zeigen Sie, dass das Bild eines Steinerkreises unter f eine Gerade durch den Ursprung ist.

b) Zeigen Sie, dass das Bild eines *Kreises des Apollonius*, gegeben durch $\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = \rho$, unter f ein Kreis um den Ursprung ist. Wie hängt ρ mit dem Radius des Bildes zusammen?

c) Begründen Sie, dass f konform ist.

d) Zeigen Sie, dass die Steiner Kreise und die Kreise des Apollonius sich im rechten Winkel schneiden.

Aufgabe 4.2. (5 Punkte) Zeichnen Sie jeweils drei Steinerkreise und drei Kreise des Apollonius mit verschiedenen Radien.

a) $a = -b \in i\mathbb{R}$,

b) $a = 0$, $b = \infty$,

c) $a = ib \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4.3. (5 Punkte) Sei ϕ eine Möbiustransformation der Form

$$\phi(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\,, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C} \quad \text{and} \quad \lambda := \frac{(\alpha+\delta)^2}{\alpha\delta - \beta\gamma}\,.$$

Wir bezeichnen mit $\operatorname{Fix}(\phi) := \left\{ z \in \overline{\mathbb{C}} \,\middle|\, \phi(z) = z \right\}$ die Menge der Fixpunkte von ϕ in der Riemannschen Zahlenkugel $\overline{\mathbb{C}}$. Zeigen Sie, dass wenn ϕ nicht die Identität, so gilt

$$\#\operatorname{Fix}(\phi) = 1 \iff (\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma = 0 \iff \lambda = 4\,,$$

und andernfalls hat ϕ genau zwei Fixpunkte.

Aufgabe 4.4. (5 Punkte) Sei ϕ eine Möbiustransformation der Form

$$\phi(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\,, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}\,.$$

Wenn ϕ zwei Fixpunkte $a \neq b$ hat, zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Es existert $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, sodass

$$w = \phi(z) \iff \frac{w-a}{w-b} = k \cdot \frac{z-a}{z-b}\,.$$

b) Wenn $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dann bildet ϕ jeden Steinerkreis zu a und b auf sich selbst ab.

c) Wenn $|k| = 1$, dann bildet ϕ jeden Kreis des Apollonius zu a und b auf sich selbst ab.