19. April 1971

Es wurde über eine Verallgemeinerung der Formel von Funk und Hecke berichtet. Anhand des von Cl. Müller behandelten Beispiels der höherdimensionalen Hankel-Funktionen wurde der Beweis des folgenden Satzes skizziert:

Es sei F eine durch $\Phi : \mathbb{R}^{q-1} \to \{z \in \mathbb{C}^q \mid z^2 = 1\}$ parametrisierte Fläche, Φ „hinreichend glatt". F sei invariant gegenüber allen $A \in SO(q, \mathbb{R})$ mit $A\sigma = \sigma$, $\sigma \in S^{q-1}$ ein fester Punkt.

Es sei $\xi \in S^{q-1}$ und f eine holomorphe Funktion, deren Definitionsbereich in $\mathbb{C}$ von F und ξ abhängt und die eine gewisse von F und ξ abhängige Wachstumsbedingung erfüllt.

Dann gilt für alle Kugelfunktionen $K_n(q, \cdot)$ der Ordnung n und Dimension q:

$$\int_F f(\xi \cdot \zeta) K_n(q, \zeta) \mu(\zeta) = \lambda \cdot K_n(q, \xi),$$

$$\lambda = \int_F f(\sigma \cdot \zeta) P_n(q, \sigma \cdot \zeta) \mu(\zeta),$$

wobei $\mu(\zeta) = \sum_1^q (-1)^{k+1} \zeta_k \, d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\zeta_k} \wedge \cdots \wedge d\zeta_q$ $(\zeta \in \mathbb{C}^q)$ ist und $P_n(q, \cdot)$ das Legendre-Polynom der Ordnung n und Dimension q bedeutet.

Wolf Riedberg

04

26.4.71

Neuere Ergebnisse über Ergodensätze.

Dem Satz von Chacon Ornstein (1960) und seinem L^1-Pendant ist ein Ergodensatz gegenübergestellt worden, der auf Eigenschaften der gemeinsamen Verteilung aufbaut.

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Maßraum
$y^1, y^2, \dots ; p^1, p^2, \dots$ P-integrable Funktionen mit $p^i \geq 0$.
Für jedes positiv ~~positiv homogene~~ sublineare ~~Funktion~~ h gelte

$$\int h(y^1, y^2, \dots ; p^1, p^2, \dots)\, dP \geq \int h(y^2, y^3, \dots ; p^2, p^3, \dots)\, dP$$

Dann gilt

a) $\dfrac{y^1 + y^2 + \dots + y^n}{p^1 + p^2 + \dots + p^n}$ konvergiert fast sicher auf $\{\sum p^i > 0\}$
(Grenzwert ψ)

b) $\dfrac{1}{n} \int_{\{\sum p^i = +\infty\}} |(y^1 + y^2 + \dots + y^n) - \psi(p^1 + \dots + p^n)|\, dP \to 0.$

Die Übersetzung wird durch einen Satz von Rost geleistet.

Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ $(\Omega', \mathfrak{A}', P')$ Maßräume
$x^1, x^2, \dots \in L^1(\Omega)$ $y^1, y^2, \dots \in L^1(\Omega')$
Genau dann gilt für alle h positiv sublinear
$\int h(x^1, x^2, \dots)\, dP \geq \int h(y^1, y^2, \dots)\, dP'$
wenn es eine positive Kontraktion T von $L^1(\Omega)$ nach $L^1(\Omega')$ gibt mit
$Tx^i = y^i$ für alle i.

Die Verallgemeinerungen dieses Satzes auf die Situationen des Satzes von Chacon (1961), Cuculescu-Foiaş sind von H. Engelmann behandelt

Hermann Dinges

Es handelt sich um automorphe Formen zu Grenzkreisgruppen
von erster Art mit der oberen Halbebene $\mathfrak{H}$ der komplexen Variablen τ als nnerem des Grenkreises. Für solche automorphen Formen wird eine Relati- bewiesen, die als Verallgemeinerung der Valenzformel aufgefasst werden ann und in gewissem Sinne erschöpfende Informationen über die Lage der llstellen der automorphen Form enthält. Es sei

$g \in \{\Gamma, -r, v\}$, $r \in \mathbb{R}$, $|v| \equiv 1$, $r \neq 0 \not\equiv g$; $u \in \{\Gamma, 0, 1\}$, $u \not\equiv 0$,

ann gilt

$$\sum_{\nu} (\mathrm{ord}_{z_\nu, \Gamma}\, g)\, b_0(z_\nu, u) + \Lambda_1 + \Lambda_2 = \frac{r}{4\pi}(u, 1; \Gamma).$$

ier durchläuft z_ν endlich viele Punkte einer Fundamentalmenge $\mathfrak{F}$ von Γ, nter denen alle die vorkommen sollen, in denen $\mathrm{ord}_{z_\nu, \Gamma}\, g \neq 0$ oder $u = \infty$ erden kann; $b_0(z, u)$ bezeichnet das konstante Glied der Entwicklung von nach dem Ortsparameter von z ; Λ_1 und Λ_2 sind gewisse Bilinearformen den Hauptteil-Koeffizienten von u und den Entwicklungs-Koeffizienten n $\phi := \frac{g'}{rg}$ in den Punkten z_ν ; das Skalarprodukt $(u, 1; \Gamma)$ ist als Cauchy-er Hauptwert zu definieren.

Es wird kurz gezeigt, wie diese Formel zur Nullstellen-Bestimmung ong anzuwenden ist; insbesondere wird die entsprechende Situation im Falle r Modulgruppe $\Gamma = {}_1\Gamma := SL(2, \mathbb{Z})$ andeutend beschrieben. Eine weitere An-endung betrifft die Berechnung der Werte, die eine Hauptfunktion einer Grup- Γ vom Geschlecht Null in den Fixpunkten annimmt. Schliesslich ergeben ch als Verallgemeinerungen der Identitäten von Euler und Jacobi Dar-llungen gewisser Thetareihen höheren Grades durch die Primformen der Thetagruppe; hierfür liefert die obige Identität die Werte der Parame-r, die die Darstellung bestimmen.

6. V. 1971.

H. Petersson

10.5.71

Sylowisatoren

Es wurden für auflösbare endliche Gruppen G und zu einer p-Untergruppe R von G sogen. Sylowisatoren betrachtet; d.h. Untergruppen S von G, die maximal sind mit der Eigenschaft, R als p-Sylowgruppe zu enthalten.

Satz Ist R normal in der p-Sylowgruppe N_p einer nachinvarianten Untergruppe N von G, so sind alle Sylowisatoren von R konjugiert. Das gleiche gilt, wenn nur $N_p : R < p^r$ und p nicht Ausnahmeprimzahl i.S. von Hall-Higman ist.

Satz Ist R normal in der p-Sylowgruppe P von G und ist $R : \Phi(P) \cap R \leq p^e$, so haben die Sylowisatoren von R eine p-Länge $\leq e+1$.

Hieraus folgt für aufl. Gruppen eine Verallgemeinerung des Satzes von Huppert-Tate

(W. Gaschütz)

17/5 71

Begründung der elementaren Arithmetik und Logik

Die Grundlage der Arithmetik ist die vor-arithmetische Praxis: die Benutzung von Zählzeichen (wie |, ||, |||, ||||, ...) zum Zählen von Sammeldingen (Haufen, Herden, Gruppen, Komplexen, ...), der Größenvergleich der Zählzeichen anstelle des Größenvergleichs der Sammeldinge, das Addieren und Multiplizieren der Zählzeichen (anstelle gewisser Operationen mit den Sammeldingen). Diese Praxis rechtfertigt z.B. die folgenden Konstruktions*regeln* von Zeichen, Zeichenpaaren und -tripeln:

$$K_1 \begin{cases} \Rightarrow | \\ n \Rightarrow n| \end{cases} \qquad K_< \begin{cases} \Rightarrow |, n| \\ m,n \Rightarrow m|, n| \end{cases}$$

$$K_\times \begin{cases} K_+ \begin{cases} \Rightarrow \dfrac{m,|}{m|} \\ \dfrac{m,n}{p} \Rightarrow \dfrac{m,n|}{p|} \end{cases} \\ \Rightarrow \dfrac{|;n}{n} \\ \dfrac{m;n}{p},\ \dfrac{p,n}{q} \Rightarrow \dfrac{m|;n}{q} \end{cases}$$

Die Arithmetik beginnt mit *Behauptungen* über die Konstruierbarkeit ($\vdash$) von Ausdrücken nach diesen Regeln. Man definiert z.B.

$$m < n \leftrightharpoons \vdash_< m,n$$

$$m + n = p \leftrightharpoons \vdash_+ \frac{m,n}{p}$$

$$m \cdot n = p \leftrightharpoons \vdash_\times \frac{m;n}{p}$$

Um zu weiteren Behauptungen als diesen Primaussagen zu kommen werden logische Partikeln hinzugenommen. Hier haben wir als vor-logische Praxis die Verwendung solcher Partikeln in "Dialogen", z.B. $\neg$, $\bigwedge_x$, $\rightarrow$ mit folgenden Angriffs-Verteidigungs*regeln*

Behauptung	Angriff	Verteidigung
$\neg A$	A ?	
$\bigwedge_x A(x)$	n ?	$A(n)$
$A \rightarrow B$	A	B

Diese Partikeln genügen schon ein vollständiges System erster Sätze (Axiome) für die Ordnung $<$ aufzustellen:

$$| < x|$$

$$x < y \to x| < y|$$

$$x| < y| \to x < y$$

$$\neg\, x < |$$

$$\bigwedge_x . A(x) \to A(x|) . \to A(|) \to \bigwedge_x A(x)$$

Der weitere Aufbau der Arithmetik geschieht durch Hinzunahme induktiv definierbarer weiterer Aussagen. Die Logik kann erweitert werden durch Hinzunahme weiterer Partikeln: zunächst der Konjunktion

$A \wedge B$	L?	A
	R?	B

dann der Adjunktionen

$A \vee B$	?	A
		B
$\bigvee_x A(x)$	?	$A(n)$

Eine <u>allgemeine</u> Dialogregel normiert den Verlauf von Dialogen um mehrfach logisch zusammengesetzte Aussagen.

Es ~~läßt~~ ist in diesem Aufbau leicht zu beweisen, daß aus der Gewinnbarkeit von Dialogen um A und $A \to B$ stets die Gewinnbarkeit des Dialogs um B folgt. Das ist äquivalent mit dem Gentzenschen Hauptsatz (1936). Ersetzt man die obigen Adjunktionen durch die "klassischen" Definitionen

$$A \mathsf{A} B \leftrightharpoons \neg . \neg A \wedge \neg B .$$

$$\mathsf{A}_x A(x) \leftrightharpoons \neg \bigwedge_x \neg A(x)$$

erhält man die klassische Logik (insbesondere die Stabilität $\neg\neg A \to A$) für <u>alle</u> arithmetischen Aussagen.

Lorenzen
LORENZEN

18/5 71

Konstruktive Begründung der Analysis

Schon die Arithmetik der rationalen Zahlen benutzt die Methode der Abstraktion. Paare von Grundzahlen werden als "äquivalent" definiert

$$m_1, n_1 \sim m_2, n_2 \leftrightharpoons m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1$$

Für Aussagen $A(m, n)$ über Paare, die invariant bzgl. $\sim$ sind, d.h.

$$m_1, n_1 \sim m_2, n_2 \to A(m_1, n_1) \leftrightarrow A(m_2, n_2)$$

führen wir als neue Schreibweise ein:

$$\tilde{A}\left(\frac{m}{n}\right) \leftrightharpoons A(m, n)$$

z.B.

$$\frac{m}{n} > 1 \leftrightharpoons m > n$$

$$\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} \leftrightharpoons m_1, n_1 \sim m_2, n_2$$

Es gilt dann $\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} \leftrightarrow \bigwedge_{\substack{A \\ \text{inv.}}} A\left(\frac{m_1}{n_1}\right) \leftrightarrow A\left(\frac{m_2}{n_2}\right)$.

Wir haben damit eine Theorie, die neben den bisherigen Grundzahlen als Objekte neue abstrakte Objekte $(r, s, \ldots)$, die ~~rat~~ (positiven) rationalen Zahlen hat.

Die Analysis benutzt weitere abstrakte Objekte, zunächst Funktionen und Mengen (rationaler Zahlen).

Rationale Funktionen werden z.B. abstrahiert aus rationalen Termen

$$T(r): \quad \frac{a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \cdots + a_m r^m}{b_0 + b_1 r + b_2 r^2 + \cdots + b_n r^n} \qquad (b_n \neq 0)$$

Terme heißen "äquivalent"

$$T_1(r) \sim T_2(r) \leftrightharpoons \bigwedge_r T_1(r) = T_2(r)$$

Für (bzgl $\sim$) invariante Aussagen über Terme schreiben wir

$$\tilde{A}(\iota_r T(r)) \leftrightharpoons A(T(r))$$

Die abstrakten Objekte ~~...~~ $f, g, \ldots$ heißen Funktionen. Wir definieren z.B. für $f = \iota_r T(r)$:

$$f \,\iota\, r \leftrightharpoons T(r)$$

Entsprechend für mehrstellige Funktionen.

Mengen werden abstrahiert aus Aussageformen (Formeln) $F(r)$.

Formeln heißen "äquivalent":

$$F_1(r) \sim F_2(r) \leftrightharpoons \bigwedge_r . F_1(r) \leftrightarrow F_2(r).$$

Für (bzgl $\sim$) invariante Aussagen über Formeln schreiben wir

$$\tilde{A}(\epsilon_r F(r)) \leftrightharpoons A(F(r))$$

Wir definieren z.B. für $M = \epsilon_r F(r)$

$$r \in M \leftrightharpoons F(r)$$

Entsprechend für mehrstellige Mengen (Relationen).

Aufgrund dieser Abstraktion gilt

$$\bigwedge_r . r \in M_1 \leftrightarrow r \in M_2 . \to M_1 = M_2 \qquad \text{(Extensionalität)}$$

$$\bigvee_M \bigwedge_r . r \in M \leftrightarrow F(r). \qquad \text{(Komprehensionsprinzip)}$$

Das Komprehensionsprinzip gilt hier nur "prädikativ", d.h. nur definit ~~für~~ Formeln $F(r)$ (d.h. die keine Mengenquantoren enthalten.)

Auf der Grundlage der bisherigen Konstruktionen und Abstraktionen ist dann die Analysis aufzubauen.

Spezialfall der Funktionen (Grundzahlen als Argument) sind Folgen

$$r_* = \iota_n T(n)$$

$$r_n = r_* \iota n$$

In üblicher Weise werden rationale Folgen als "konvergent" definiert und als "äquivalent". Wir schreiben für invariante Aussagen über r_*

$$\tilde{A}(\lim r_*) \leftrightharpoons A(r_*)$$

Die Ausdrücke "$\lim r_*$" heißen reelle Zahlen $\xi, \eta, \ldots$

Reelle Folgen ξ_*, d.h. $\xi_m = \lim r_{m*}$ werden durch 2-stellige Terme dargestellt $\quad r_{m,n} = T(m,n)$

Für definite Terme gilt der Cauchysche Vollständigkeitssatz.

Ferner gilt ‖ Jede nicht-leere nach oben beschränkte reelle Menge mit definiter Unterklasse hat eine obere Grenze

(Die Unterklasse von M ist definiert durch $r \in U_M \leftrightharpoons \bigvee_{\xi \in M} r < \xi$)

Auf diese Vollständigkeit kann die klassische Differential- und Integralrechnung mit für die Anwendungen nur unwesentlichen Präzisierungen begründet werden (vgl "Differential u. Integral 1965").

Der Rest der "modernen" Analysis ist – bisher – unbegründet.

Lorenzen

24.5.71

Dichten von Kongruenzklassen in freien Algebren.

Ausgangspunkt war die Frage: wie häufig kommen allgemeingültige Formeln im Prädikatenkalkül vor? Es stellte sich heraus, daß man diese Frage nur behandeln kann, wenn man die Dichten <u>aller</u> logischen Äquivalenzklassen von Formeln <u>gleichzeitig</u> betrachtet. Außerdem muß man sich auf Teile A des Prädikatenkalküls beschränken, die von <u>endlich</u> vielen Zeichen erzeugt werden. A faßt man dann als freie Algebra auf mit Erzeugendenmenge $E = \{P(x), Q(x,y), \dots\}$ ~~k~~ die aus den endlich vielen aus dem Zeichenvorrat bildbaren Primformeln besteht. $\Phi = \{\neg, \vee, \wedge, \exists_x, \exists_y, \forall_x, \forall_y, \dots\}$ ist die endliche Menge von Operationen von A. Die kanonische Abbildung auf die Menge B der logischen Äquivalenzklassen ist ein Φ-Homomorphismus $h: A \to B$. B ist (bei mind. zwei Variablen x, y und einem zweistelligen Prädikat) abzählbar unendlich. <u>$L(a)$ sei die Anzahl der Operationszeichen im Wort $a \in A$, genannt die Länge von a.</u>

{Wir können jetzt vom speziellen Beispiel des Prädikatenkalküls abstrahieren.

$v_n = \#\{a \in A : L(a) = n\}$, $u_n(b) = \#\{a \in A ; L(a) = n, h(a) = b\}$ für $n \geq 0$, $b \in B$. (Bemerke: $L(E) = 0$). $q_n(b) = \frac{u_n(b)}{v_n}$ sind relative Häufigkeiten. Die Frage lautet jetzt: existiert

$q_\infty(b) = \lim_{n\to\infty} q_n(b)$ für $b \in B$? Das wäre die Dichte der Kongruenzklasse $h^{-1}(b) \subseteq A$. In

$$
\begin{array}{cccccc}
A & \mathbb{Z}[A] & \ni s_n = \sum\limits_{L(a)=n} a & s(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} s_n z^n & s(z) = z\, P_A(s(z)) + s \\
h \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
B & \mathbb{Z}[B] & \ni u_n = \sum\limits_{b\in B} u_n(b)\cdot b & u(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n z^n & u(z) = z\cdot P_B(u(z)) + \\
\sigma \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\{1\} & \mathbb{Z} & v_n = \sum\limits_{b\in B} u_n(b) & v(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n z^n & v(z) = z\cdot P_1(v(z)) \cdot
\end{array}
$$

ist σ ein Φ-Homomorphismus (~~da~~ Φ läßt sich in $\{1\}$ nur auf eine Weise erklären) ~~läßt~~ $\mathbb{Z}[A]$, $\mathbb{Z}\{B\}$, $\mathbb{Z}$ sind „Φ-Ringe“ mit A, B, $\{1\}$ als $\mathbb{Z}$-Basis, ~~wob~~ von wo $\varphi \in \Phi$ multilinear fortgesetzt wird. s_{n+1} läßt sich mit den $\varphi \in \Phi$ ~~und~~ durch $s_n, \dots, s_0$ ausdrücken. Man kann diese Rekursionsformeln in die „Funktionalgleichung“ $s(z) = z \cdot P_A(s(z)) + s_0$ umschreiben, worin z eine kommutative Unbestimmte und $P(x) = \sum_{\varphi \in \Phi} \varphi(x, x, .., x)$ ist. Ist $\Phi = \Phi_1 \cup \dots \cup \Phi_r$, wo Φ_i aus den i-stelligen Operationen besteht, so folgt mit $p_i = \# \Phi_i$:

$$P_1(x) = \sum_{i=1}^{r} p_i x^i$$

Wir setzen $\Phi \neq \Phi_1$, also P_1 nicht-linear voraus. Dann ist ist v algebraisch in z, hat für $z \in \mathbb{C}$ einen Konvergenzradius $R > 0$, auf dessen Rand die einzige Singularität bei $z = R$ liegt, wo $v(R) = v_*$ endlich ist und $v(z) - v_*$ sich wie $\sqrt{R-z}$ verhält. Die Koeffizienten verhalten sich dann entsprechend, d.h. $v_n \sim \frac{c}{\sqrt{2\pi}} n^{-3/2} R^{-n}$ $(n \to \infty)$ mit $c^2 = P_1(v_*)/P_1''(v_*)$, wobei $v_0 = \# E$, v_* die Lösung von $P_1'(v_*)(v_* - v_0) - P_1(v_*) = 0$, $v_* > 0$ und $R = 1/P_1'(v_*)$ ist. Setze $q_n = \sum_{b \in B} q_n(b) \cdot b \in \mathbb{R}[B]$. Definiert man $Q_k : \mathbb{Z}[B] \to \mathbb{Z}[B]$ (linear) durch $Q(z) = z P_B'(u(z)) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k Q_k$ (wobei $P'(x) = \sum_{\varphi \in \Phi} \varphi'(x)$ und $\varphi'(x) y = \varphi(y, x, .., x) + \dots + \varphi(x, .., x, y)$ sei) so gilt

Satz 1
1) $\lim_{n \to \infty} \| q_n - \sum_{k=1}^{n} R^k Q_k q_{n-k} \| = 0$
2) $Q_* = Q(R) = \sum R^k Q_k$ ist eine stochastische Matrix $\overline{\mathbb{R}[B]} \to \overline{\mathbb{R}[B]}$ ($= \| \cdot \|$-Abschluß)
3) Falls $q_\infty = \| \cdot \|$-$\lim_n q_n$ existiert, ist $Q_* q_\infty = q_\infty$ und q_∞ ist dadurch bestimmt (als Wahrsch. vert.)

Satz 2 $q_\infty = \| \cdot \|$-$\lim_n q_n$ existiert, falls es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und ein $b_2 \in B$ gibt, so daß ~~jedes~~ b_2 von jedem b_1 in genau n_0 Schritten erreichbar ist (d.h. $b_i = h(a_i)$, a_1 Teilwort von a_2, $L(a_2) = n_0 + L(a_1)$). Diese Bedingung ist insbesondere erfüllt, wenn B bezüglich einiger Operationen von Φ ein boolescher Verband ist (– wie im Ausgangsbeispiel; leider sind dort die $q_n(b)$ nicht berechenbar).

Zum Beweis wird das Vorangehende wesentlich benötigt. W. Böge

7.6.71.

Bequeme Kategorien für Topologen.

Alle Unterkategorien seien voll und isomorphietreu. Wir betrachten in einer epireflektiven Unterkategorie $\mathbb{T}$ von TOP die von einer Klasse $\mathbb{A}$ von kompakten Hausdorffräumen in $\mathbb{T}$ erzeugte coreflektive Unter=kategorie $\mathbb{K}$. Einem stetigen-Funktionenraum $C(X,Y)$ ordnen wir die durch die Mengen $W(u,V)$ erzeugte Topologie zu, wo $u: A \to X$ stetig mit A in $\mathbb{A}$, V offen in Y, und $f \in W(u,V) \iff u(A) \subset f^{-1}(V)$. Wir sagen, dass $\mathbb{A}$ *eine bequeme Kategorie erzeugt*, wenn folgendes stets gilt:

CC. Für X, Y in $\mathbb{T}$ ist $C(X,Y)$ in $\mathbb{T}$.

CE. Für Y, Z in $\mathbb{T}$ ist die Auswertung $e_{YZ}: \alpha C(Y,Z) \times Y \longrightarrow Z$ stetig.

CP. Sind A, B in $\mathbb{A}$, so ist $A \times B$ in $\mathbb{K}$.

Dabei bezeichnet αX die $\mathbb{A}$-Modifikation von X, d.h. $|X|$ mit der feinsten Topologie eines Raums in $\mathbb{T}$, so dass alle stetigen Abbildungen $u: A \to X$ mit A in $\mathbb{A}$ noch stetig bleiben. Folgende Sätze gelten.

1. Sind $f: \alpha(X \times Y) \to Z$ und $g: X \to \alpha C(Y,Z)$ durch $(\forall x)(\forall y)\,(f(x,y) = g(x)(y))$ verknüpft, so ist f genau dann stetig, wenn g stetig ist (X, Y, Z in $\mathbb{K}$).
2. Ist X lokalkompakter Hausdorffraum, und sind X, Y in $\mathbb{K}$, so ist $X \times Y$ in $\mathbb{K}$.

Der erste dieser Sätze hat weitgehende Folgerungen: viele für k-Räume bekannte Sätze sind kategorische Korollare.

Beispiele für $\mathbb{K}$: k-Räume (in $\mathbb{T}$), folgenbestimmte Räume in $\mathbb{T}$ ($\mathbb{A} = \{N_\omega\}$, also konvergente Folge mit limes), pfadbestimmte Räume ($\mathbb{A} = \{[0,1]\}$), $\mathbb{T}$-diskrete Räume.

Oswald Wyler

Darstellungen abelscher algebraischer Gruppen. 14.6.71

Einige Probleme in der Darstellungstheorie und in der Theorie der automorphen Formen werden von der Klassenkörpertheorie nahegelegt. Insbesondere kann man beweisen, daß jedem Homomorphismus der Galoisgruppe einer galoisschen Erweiterung eines lokalen Körpers F ~~in GL(2, ℂ)~~ oder ~~Charakter~~ positiven Charakteristik in GL(2, ℂ) eine irreduzible Darstellung der Gruppe GL(2, F) zugeordnet ist.

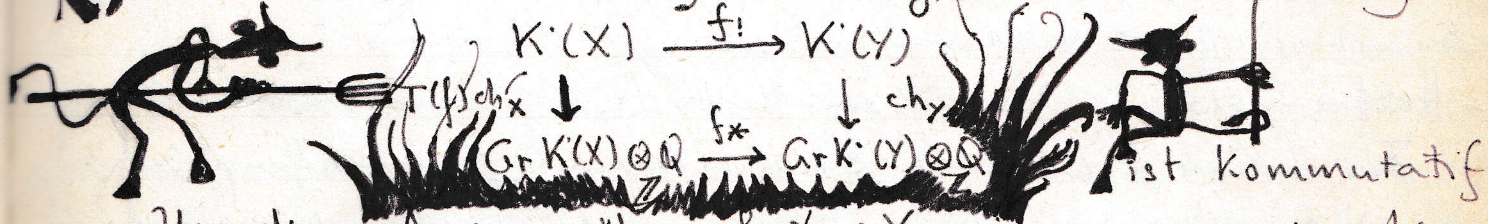
Es wird im allgemeinen nahegelegt, daß die Darstellungen einer p-adischen algebraischen Gruppe G_F durch die Homomorphismen der Weilgruppe des entsprechenden Körpers in eine zugehörige komplexe Liegruppe parametrisiert sein können. Das ist der Fall, wenn G_F abelsch ist. Obwohl der allgemeine Fall nicht behandelt werden kann, gewinnt man aus dem abelschen Fall Einsicht in die Rolle, die die Charaktere der Cartanschen Untergruppen von G_F in ihrer Darstellungstheorie spielen.

R. Langlands ?

Hexenküche 1971

~~Die Stufe vom Ring~~

Riemann-Roch'scher Satz: der letzte Schrei: das Diagramm



$$\begin{tikzcd} K^\cdot(X) \arrow[r, "f_!"] \arrow[d, "T(f)\mathrm{ch}_X"'] & K^\cdot(Y) \arrow[d, "\mathrm{ch}_Y"] \\ \mathrm{Gr}\, K^\cdot(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \arrow[r, "f_*"] & \mathrm{Gr}\, K^\cdot(Y) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \end{tikzcd}$$

ist kommutatif!

Um dieser Aussage über $f: X \to Y$ einen approximativen Sinn zu geben, musste ich nahezu zwei Stunden lang die Geduld der Zuhörer missbrauchen. Schwartz auf weiss (in Springer's Lecture Notes) nimmt's wohl an die 400, 500 Seiten. Ein packendes Beispiel dafür, wie unser Wissens- und Entdeckungsdrang sich immer mehr in einem lebensentrückten logischen Delirium auslebt, während das Leben selbst auf tausendfache Art zum Teufel geht – und mit endgültiger Vernichtung bedroht ist. Höchste Zeit, unsern Kurs zu ändern!

(6.12.1971) Alexander Grothendieck

Abzählbare Körper und ihre Multiplikationsgruppen

Die Frage nach der Struktur der Multiplikationsgruppen von Körpern führt auf 2 Teilfragen: A. Für welche Klassen von Körpern K ist $K^\times/W_K$ frei („$K^\times$ quasifrei") bzw. $K^\times/W_K D_K$ frei ($K^\times$ semifrei), wo W_K die Einheitswurzelgruppe von K und D_K die maximale Divisionsuntergruppe von K bezeichnet, B. Wie kompliziert können Multiplikationsgruppen werden. Mit arithmetischen Methoden (Krullringe) und galoistheoretischen Methoden wird gezeigt:

ad A: Eine Erweiterung K/k heisse speziell, wenn ein über k endlich erzeugter Zwischenkörper K' existiert mit $K^{p^m}\subset K$ für geeignetes m ($p = \mathrm{Char}\, k$); sie heisst endlichartig, wenn alle Teilerweiterungen L/k von endlichem Transzendenzgrad speziell sind.

Satz: Abzählbare endlichartige Körper (über dem Primkörper) haben quasifreie Multiplikationsgruppen.

Satz: Beliebige abelsche Erweiterungen endlichartiger Körper haben quasifreie Multiplikationsgruppen. Die 2-fache maximal-abelsche Erweiterung $Ab^2 k$ eines abz. endlichartigen Körpers k hat semifreie Multiplikationsgruppe.

Hilfsmittel ist ein Resultat der Galoiskohomologie: Für beliebige abelsche Erweiterungen K/k mit Gruppe g ist der Exponent $\exp H^1(g, W_K)$ ein Teiler des ggT von $(K:k)$ und $2\cdot \# W_k$.

ad B.

Satz: Ist A eine beliebige torsionsfreie abz. abelsche Gruppe, so existieren unendlich viele abzählbare Körper K, sodass A direkter Faktor von $K^\times/W_K$ ist mit freiem Komplement.

21. VI. 71

W. Jehne

Über gewisse C^*-Algebren

Bestimmung sämtlicher C^*-Algebren A mit 2-Punkt Spektrum $\hat{A}$.
Sei $\mathfrak{H}$ ein separabler Hilbertscher Raum. Für $n = \infty, 1, 2, \ldots$ sei $\mathfrak{H}_n$ ein n-dim. Hilbertscher Raum und $K_n = K(\mathfrak{H}_n)$ die Algebra der kompakten Operatoren von $\mathfrak{H}_n$. Es ex. eine dir. Zerlegung

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}' \otimes \mathfrak{H}_n, \quad \dim \mathfrak{H}_0 = d, \quad \dim \mathfrak{H}' = \infty,$$

so daß ($d = 0$ für $n = \infty$)

$$A_\infty = K(\mathfrak{H}) + 1 \otimes K_\infty, \quad A_{n,d} = K(\mathfrak{H}) + 1_{\mathfrak{H}'} \otimes K_n$$

wohldef. Unteralgebren von $B(\mathfrak{H})$ sind.

Theorem: Die postlim. separable C^*-Algebra A hat genau dann ein zweipunktiges Spektrum $\{1,2\} = \hat{A}$, mit $\overline{\{1\}} = \hat{A}$, wenn sie zu genau einer der Algebren A_∞, $A_{n,d}$ ($n < \infty$, $0 \le d < n$ oder ∞) isomorph ist.

Das Ergebnis wird in einer gemeinsamen Arbeit mit H. Behncke bewiesen. LEPTIN H. Leptin

(23. 6. 1971)

Die Stufe von Ringen algebraischer Zahlen.

Für einen kommutativen Ring A mit Eins sei die Stufe $s(A)$ die kleinste Zahl s, sodaß -1 in A Summe von s Quadraten ist (bzw. ∞ falls es kein solches s gibt). Nach einem kurzen Bericht über bekannte Ergebnisse von E. Artin, Pfister, Knebusch wurde ein Beweis für den folgenden Satz skizziert: Ist A ein Ring algebraischer Zahlen, so gilt

$$\max\{s(A\otimes\mathbb{R}), s(A\otimes\mathbb{Z}_p)\} \le s(A) \le \max\{s(A\otimes\mathbb{R}), s(A\otimes\mathbb{Z}_p), 3\},$$

wo das Maximum über alle Primzahlen p zu erstrecken ist.
Es wurde noch diskutiert wann links oder rechts das Gleichheitszeichen gilt, und der Zusammenhang mit Ergebnissen von A. Moser und von M. Peters erörtert.

28.6.1971 Martin Kneser

KNESER

Quadratsummen und elliptische Kurven über Funktionenkörpern

Vor fast 100 Jahren hat D. Hilbert die Frage nach der Darstellbarkeit positiv definiter Funktionen als Summe von Quadraten aufgeworfen. Er konnte zeigen, daß ~~für~~ eine pos. def. Funktion $f(x,y) \in \mathbb{R}(x,y)$ Summe von 4 Quadraten ist. Man wußte aber bisher nicht, ob nicht 4 durch 3 ersetzt werden kann. In einer gemeinsamen Arbeit haben Cassels, Ellison und der Vortragende gezeigt, daß die folgende von Motzkin entdeckte Funktion

$$f(x,y) = 1 + x^2y^4 + x^4y^2 - 3x^2y^2$$

in $\mathbb{R}(x,y)$ positiv-definit, aber nicht Summe von 3 Quadraten ist. Zum Beweis wird eine mit f in engem Zusammenhang stehende elliptische Kurve konstruiert und unter wesentlicher Verwendung des Satzes von Mordell-Weil die Gruppe ihrer $\mathbb{R}(x)$-rationalen Punkte bestimmt.

5.7.71 A. Pfister PFISTER

Quadratische Reziprozitätsgesetze.

Bericht über eine zusammen mit W. Scharlau angestellte Untersuchung über A. Weils "quadratisches Reziprozitätsgesetz" (Acta Math. 111, Kapitel II, 1964). A. Weil beweist dieses Gesetz mit analytischen Methoden. Es hat folgende Bauart: Sei Γ der projektive A-Modul vom Rang 1 der ganzen Weilschen Differentiale eines Zahlkörpers F (A = ganze Zahlen von F) und Ω der eindim. F-Modul $\Gamma \otimes_A F$ aller Weilschen Differentiale von F. $W(\Omega)$ bezeichne die Wittgruppe der nichtsingulären quadratischen Formen über F mit Werten in Ω und $W(\Gamma)$ die Untergruppe (!) der nichtsing. quadratischen Formen über A mit Werten in Γ. Analoge Bezeichgn. $W(\Omega_{\mathfrak{g}})$, $W(\Gamma_{\mathfrak{g}})$ für die Komplettiergn an den Primstellen $\mathfrak{g}$ von F.*) Dann gibt es Charaktere $\gamma_{\mathfrak{g}}$ von $W(\Omega_{\mathfrak{g}})$ in die Gruppe Π_8 der achten Einheitswurzeln von $\mathbb{C}$, so daß

R1) $\gamma_{\mathfrak{g}}(W(\Gamma_{\mathfrak{g}})) = 1$

R2) $\prod \gamma_{\mathfrak{g}}(\xi) = 1$ für alle $\xi \in W(\Omega)$

*) $W(\Gamma_{\mathfrak{g}}) = 8\mathbb{Z}$ für $\mathfrak{g}$ reell, komplexe $\mathfrak{g}$ nicht betrachtet. –

R3) $\gamma_{\mathfrak{g}}(\varphi_{\mathfrak{g}}) = -1$ für die anisotrope 4-dim. $\Omega_{\mathfrak{g}}$-wertige Form $\varphi_{\mathfrak{g}}$.

Wir ~~leiten~~ definieren elementar Invarianten dieser Art $\gamma_{\mathfrak{g}}$ so daß 1) – 3) gelten, ohne die inhaltliche Bedeutung der $\gamma_{\mathfrak{g}}$ bei A. Weil zu beachten, da diese "analytischen" Charakter hat. Weiter fragen wir nach allen einrangigen projektiven A-Moduln Γ' so daß ein Gesetz ~~der~~ $(\gamma_{\mathfrak{g}})$ mit R1) – R3) existiert.

Theorem 1. Γ' hat genau dann ein solches "Reziprozitätsgesetz", wenn die Klasse $[\Gamma'] \in \mathrm{Pic}(A)$ in $2\,\mathrm{Pic}(A)$ liegt.

Korollar (Hecke): Die Klasse $[\Gamma]$ des Weilschen Differentialmoduls (= Klasse der Differente $\mathfrak{D}_{F/\mathbb{Q}}$) ist in $2\,\mathrm{Pic}(A)$ gelegen. (Dies konnte man bislang nur "analytisch" beweisen.) Dann untersuchen wir, "wie viele" Reziprozitätsgesetze es ~~auf~~ Γ gibt. $\mathfrak{K}$ bezeichne den Kokern der kanonischen Abbildung

$$W(F) \longrightarrow \coprod_{\mathfrak{g}} W(F_{\mathfrak{g}})/W(\Gamma_{\mathfrak{g}})$$

$\mathfrak{K}$ ist ein Modul über dem Witt-Ring $B(A)$ der nichtsing. Bilinearformen mit Werten in A und dann auch über $\tilde{B}(A) = B(A)/B_0(A)^3$ mit $B_0(A)$ = Ideal der geradedim. Formen in $B(A)$. Damit ist auch die Charaktergruppe $\mathfrak{K}^* = \mathrm{Hom}(\mathfrak{K}, \mathbb{T}) = \mathrm{Hom}(\mathfrak{K}, \mathbb{T}_8)$ ein $\tilde{B}(A)$-Modul.

Theorem 2. $\mathfrak{K}^*$ ist freier $\tilde{B}(A)$-Modul vom Rang 1. Die "Reziprozitätsgesetze" $(\gamma_{\mathfrak{g}})$ mit R1) – R3) entsprechen den Basiselementen von $\mathfrak{K}^*$.

Indem man nach Rez.gesetzen fragt für die überdies gilt

*) R4) $\gamma_{\mathfrak{g}}(\langle \gamma \rangle) = e^{\frac{2\pi i}{8}}$

für vorgegebenes festes $\gamma \in \Omega$ und alle reellen $\mathfrak{g}$, erhält man analog zu obigem Korollar auch die Charakterisierung des Bildes der Differente in der engeren Klassengruppe, die zuerst von Armitage (analytisch) hergeleitet wurde (Inventiones 2, 1967).

(12.7.71) M. Knebusch

Excision in Algebraic K-Theory

It is known that excision holds for the relative functor $K_0(R, I)$ of Bass. In other words, if $f: A \to B$ is a ring homomorphism, $I \subset A$, $J \subset B$ 2-sided ideals and if $f: I \approx J$ then f induces an isomorphism $K_0(A, I) \approx K_0(B, J)$. It is shown that the corresponding assertions for $K_1(R, I)$ and $K_2(R, I)$ are false. As a consequence of this, it is shown that the Mayer-Vietoris sequences of Milnor cannot be extended to higher dimensions. Milnor has shown that for a cartesian diagram

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d] & R_1 \arrow[d, "f_1"] \\ R_2 \arrow[r, "f_2"'] & R' \end{tikzcd}$$

with f_1 onto, there is an exact sequence $K_1(R) \to K_1(R_1) \oplus K_1(R_2) \to K_1(R') \to K_0(R) \to K_0(R_1) \oplus K_0(R_2) \to K_0(R')$. There is no functor K_2 from rings to groups such that $K_2(R_1) \oplus K_2(R_2) \to K_2(R') \to K_1(R) \to K_1(R_1) \oplus K_1(R_2)$ is exact for all such diagrams. If f_1 and f_2 are both onto, Milnor gives such a sequence using his K_2. In this case, the sequence cannot be extended to K_3 for any functor K_3.

(15.7.71)

R. G. Swan

SWAN

18 Sept. 1971

On rational representations of Chevalley groups in nonzero characteristic.

Virtually everything known about the rational (i.e. algebraic) representations of Chevalley groups (= connected semisimple algebraic groups) defined over a field of char $p \neq 0$, goes back to Chevalley, Curtis and Steinberg, and there has no major progress since the latter's famous Nagoya paper in 1963 (apart from Borel's simplifications of results of Curtis, and special computations of Braden, Springer and Veldkamp, and excluding J.E. Humphreys' paper to appear very soon in J. of Algebra). The two major problems are the determination of the characters of the irreducible representations which are classified by their highest weights in exactly the same way as in characteristic zero, and the "classification" (in some sense) of all indecomposable modules. It is hoped that the ideas + results presented in my lectures at the recent Budapest Summer School on Group Representations (on which I report in this lecture) together with Humphreys' findings constitute some progress towards these problems.

The basic new tool for handling representations of Chevalley groups is what I like to call the "hyperenveloping algebra" of the group (or of its Lie algebra). To describe it we start with a complex semisimple Lie algebra $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, a Chevalley form $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$ with rootspace decomposition $\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}^{\alpha}$ where $\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}$ is the $\mathbb{Z}$-span of the coroots in the Cartan subalgebra $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ of $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, and Δ is the corresp. rootsystem. Let $U_{\mathbb{Z}}$ be the Kostant $\mathbb{Z}$-form of the universal enveloping algebra $U_{\mathbb{C}}$ of $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, viz. the subring gen. by $\frac{e_\alpha^n}{n!}$, for $\alpha \in \Delta$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Now, if K is any working field of char. $p \neq 0$ (which would also be the base field for G-modules) we call $U_K = U_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} K$ the hyperenveloping algebra associated to the simply-connected Chevalley group G with Lie algebra $\mathfrak{g}_K = \mathfrak{g}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} K$. This U_K is <u>not</u> finitely generated as a K-algebra, and the subalgebra gen. by $\mathfrak{g}_K$ is simply the restricted enveloping algebra of the latter. Now a G-module (= finite-dim'l. rational rep^n) gives rise to an infinitesimal action of $\mathfrak{g}_K$ which is a restricted representation. In fact, there is even an action of U_K, which was already (indirectly) exploited by Borel in his famous Princeton lecture (Springer-Verlag L. notes # 131). Conversely, even though there exist f.d. $\underline{u}$-modules (restricted rep$^{\underline{ns}}$ of $\mathfrak{g}_K$) which do not come from a G-module, every f.d. U_K-module can be uniquely lifted to a G-module.

Let X be the char. group of the torus T of G corresp. to the subalg. $\mathfrak{h}_K = \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} K$ of $\mathfrak{g}_K$, and W the Weyl group of G w.r.t. T. Write X additively, and identify it with $\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^* = \mathrm{Hom}(\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}) \subset \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$. Let $\lambda_1, \dots \lambda_\ell$ be the fundamental ~~roots~~ weights (w.r.t. some choice Δ_+ of positive roots in Δ), and $X^+ = \{\sum m_i \lambda_i \mid m_i \geq 0\} \subset X$ be the fundamental "Weyl chamber". For $\lambda \in X^+$, let M_λ

P.T.O.

(resp. $V_{\lambda,\mathbb{C}}$) denote "the" irreducible G-module (resp. $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-module) with highest wt. λ. One knows the character of $V_{\lambda,\mathbb{C}}$ (i.e. its weight-multiplicities for the action of $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$, or equivalently for that of the corresp. complex torus) by Weyl's character formula, and it is possible to concoct out of it an indecomposable G-module $V_{\lambda,K}$ whose character (i.e. wt. mult. for the action of T) is again given by the same (Weyl's) formula; to be precise, if $V_{\lambda,\mathbb{Z}}$ denotes the image of a highest wt. vector of $V_{\lambda,\mathbb{C}}$ under $U_{\mathbb{Z}}$, one puts $V_{\lambda,K} = V_{\lambda,\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} K$. Now, in order to find the character of M_λ's it suffices to know the composition factors of $V_{\lambda,K}$'s. The first step in this direction is dubbed "A Harish-Chandra principle for nonzero characteristics":

Conjecture: Let $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\in\Delta_+} \alpha$, and let $\tilde{W}$ be the extension of W on $p.X$; $\tilde{W}$ acts on X in the obvious manner. Then a necessary condition for M_λ and M_μ to occur as comp. factors of some indecomposable G-module is that $\lambda+\delta$ and $\mu+\delta$ lie in the same $\tilde{W}$-orbit.

This was conjectured by me in an infinitesimal form in 1966, and was communicated in this form in December 1967 to T. A. Springer. It has been proved by Humphreys for $p >$ the Coxeter number, and recently I proved it for $p \nmid |W:1|$ by exploiting U_K above, and more generally whenever for $\lambda+\delta$ & $\mu+\delta$ in distinct $\tilde{W}$-orbit, one can find ξ lying in the intersection of $U_{\mathbb{Z}}$ and the envelope of $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ whose value (when considered as a poly. on $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{C}}$ with integral values on $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Z}}$) at $\lambda+\delta$ and $\mu+\delta$ differ by an integer not divisible by p. It is hoped that this property holds for all p; at any rate the conjecture is known to be true for G_2 with $p=3$ (Springer) and for F_4 with $p=2$ (Veldkamp), which makes one believe its general validity. Also, one expects the sufficiency of the stated condition.

Concerning the second basic question of the classification of the indecomposable G-modules, one wishes to pursue the analogy from Artinian rings where one has the complete reducibility in the category of projective modules. In this light the following result is interesting: There exists a unique (algebraic) action of G on $\underline{\underline{u}}$ whose associated infinitesimal action coincides with the regular representation. It is conjectured that this action preserves the PIM's (the indecomposable components of the $\underline{u}$-module $\underline{u}$); this is indeed true for SL_2, as follows from some recent computations of V. Jayakumar. It is also interesting to look at the "higher truncations" of U_K (and their PIM's), gen. by elts. of the form $\frac{e_\alpha^n}{n!} \otimes 1_K \in U_K$ for n ranging between 0 and $q-1$ where q is a p-power. Also, if $G_{\mathbb{F}_q}$ denotes the finite Chevalley group corresp. to the field of cardinality q, the restriction of these PIM's (which should be G-modules by the previous conjecture) to $G_{\mathbb{F}_q}$ are expected to be again PIM's of the group-algebra $KG_{\mathbb{F}_q}$ for almost all PIM's.

Daya-Nand Verma

T.I.F.R. (Bombay-5)

Offene, kompakte Unterringe spezieller lokal kompakter Ringe

Es wurden topologische Ringe A ohne offene Linksideale betrachtet, die aber offene Unterringe R enthalten. Im ersten Teil des Vortrags wurde gezeigt, daß unter der angegebenen Voraussetzung der Ring A stets bis auf Isomorphie durch jeden seiner offenen Unterringe bestimmt ist. Es ist nämlich A topologisch isomorph zum topologischen Quotientenring $Q_*(R)$ von R. Dabei wurde $Q_*(R)$ wie folgt definiert: sei $I_*({}_RR)$ die topologisch injektive Hülle von ${}_RR$ (Definition siehe Goldman und Sah J. A 11 (1969) section 3) und $H_*(R) = \widetilde{Hom}_R(I_*, I_*) = \{ f \in Hom_R(I_*, I_*) : f \text{ stetig} \}$, dann heißt $Q_*(R) := \widetilde{Hom}_{H_*}(I_*, I_*)$ der topologische Quotientenring von R. $Q_*(R)$ wird ein topologischer Ring, wenn man R ~~als~~ in der natürlichen Einbettung in $Q_*(R)$ als offener Unterring auszeichnet. Ferner wurde eine Charakterisierung der kommutativen linear kompakten Ringe angegeben, die sich als offene Unterringe in einen topologischen Ring ohne offene Linksideale einbetten lassen.

<u>Satz</u>: Sei R ein kommutativer linear kompakter, Hausdorff'scher Ring und $\mathcal{F}$ der Umgebungsfilter der offenen Linksideale von R. Dann sind äquivalent:

(1) R läßt sich als offener Unterring in einen topologischen Ring A ohne offene Linksideale einbetten

(2) (a) R ist torsionsfrei bzgl. $\mathcal{F}$, d.h. $\forall\, 0 \neq r \in R$ ist $ann_R r \notin \mathcal{F}$

(b) $\mathcal{F}$ erfüllt die Bedingungen

T1: Ist $I \in \mathcal{F}$ und $a \in R \Rightarrow (I:a) = \{x \in R \mid xa \in I\} \in \mathcal{F}$

T2: Ist I ein Linksideal und $J \in \mathcal{F}$ und gilt $\forall a \in J$, $(I:a) \in \mathcal{F}$ dann folgt stets $I \in \mathcal{F}$.

(c) ~~$\forall L \in \mathcal{F}$ $\forall I \in \mathcal{F}$~~ jedes $I \in \mathcal{F}$ ist $\mathcal{F}$-projektiv

(Definition $\mathcal{F}$-projektiv siehe Goldman: J. A. 13 (1969) S. 30

Im zweiten Teil wurden spezielle lokal kompakte Ringe ohne offene einseitige Ideale betrachtet. Es wurden die offenen, kompakten Unterringe für folgende Ringe A charakterisiert.

I) A ist ein lokal kompakter einfacher Ring ohne offene Linksideale (siehe Goldman-Sah J.A. 11 (1969) section 6)

II) A ist ~~l.k.~~ lokal kompakter Ring ohne offene einseitige Ideale mit maximalen, offenen, kompakten Unterringen (siehe Goldman-Sah: J.A. 11 (1969) section 6)

III) A ist lokal kompakter, total unzusammenhängender total klassischer Ring (Definition siehe Goldman-Sah J.A. 11 (1969) Seite 423).

18. 10. 71 Frank Eckstein

Multiplizität und Spezialisierungstheorie

$R, \tilde{R}$ seien kommutative Ringe mit Einselement, $t_1, \dots, t_r \in R$ und $\mathfrak{a} = (t_1, \dots, t_r)\cdot R$. $\mathcal{C}(R)$ bzw. $\mathcal{C}_N(R)$ bezeichne die Kategorie der unitären R- bzw. Noetherschen R-Moduln. Ferner sei im folgenden G eine (add. geschriebene) abelsche Gruppe und $\mu : \mathcal{C}(R) \to \{\infty\} \cup G$ eine G-wertige Funktion auf $\mathcal{C}(R)$. Wir definieren nun:

(W_1, W_2, W_3) $(W_i \in \mathcal{C}(R))$ heißt exakt, wenn für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ $L_R(W_2, \mathfrak{p}) = L_R(W_1; \mathfrak{p}) + L_R(W_3; \mathfrak{p})$ gilt ($L_R(W, \mathfrak{p})$ = Länge von $W \otimes_R R_{\mathfrak{p}}$).
Ein Funktor $T : \mathcal{C}(R) \to \mathcal{C}(\tilde{R})$ heißt quasiexakt auf $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}(R)$, wenn T jedes exakte Tripel in $\mathcal{C}$ in ein exaktes Tripel (in $\mathcal{C}(\tilde{R})$) überführt, und schließlich nennen wir μ stark additiv auf $\mathcal{C}$ (add. auf $\mathcal{C}$), wenn $\mu(W_2) = \mu(W_1) + \mu(W_3)$ gilt für jedes exakte Tripel (Sequenz) (W_1, W_2, W_3) in $\mathcal{C}$.
Man kann zeigen, daß μ genau dann stark add. auf $\mathcal{C}_N(R)$ ist, wenn (1) aus $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}' \in \mathrm{Spec}(R)$, $R/\mathfrak{p} \in \mathcal{C}_N(R)$, $\mu(R/\mathfrak{p}) \neq \infty$ $\mu(R/\mathfrak{p}') = 0$ folgt und wenn (2) für $W \in \mathcal{C}_N(R)$ und $\mathfrak{a} = \{\mathfrak{p} / \mathfrak{p}$ isolierter Primideal von $0 : W\}$ $\mu(W) = \sum_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{a}} L_R(W; \mathfrak{p}) \cdot \mu(R/\mathfrak{p})$ gilt. Hieraus folgt, daß μ stark additiv auf $\mathcal{C}_N(R)$ ist, wenn μ additiv auf $\mathcal{C}_N(R)$ ist und eine Ordnungsfunktion (d.h. G total geordnet und $\mu(M) \geq 0$ für $M \in \mathcal{C}(R)$).

Mit Hilfe obiger Definitionen wollen wir folgende Fragestellung formulieren: Gegeben sei eine Klasse $\mathcal{E}$ quasiexakter Funktoren $T : \mathcal{C}(R) \to \mathcal{C}(\tilde{R})$. Man bestimme die Invarianten von $T(W)$ ($W \in \mathcal{C}(R)$, $T \in \mathcal{E}$), die von der Wahl von $T \in \mathcal{E}$ unabhängig sind. Wir behandeln nun zwei Typen von Klassen quasiexakter Funktoren, bei denen man eine (Teil-) Antwort auf diese Fragestellung geben kann. Dabei erhalten eine weitgehende Verallgemeinerung (I) des wichtigsten Teils der Samuelschen Multiplizitätstheorie (Multiplizität von Idealen, die von Parametersysteme erzeugt werden, vgl. auch D. J. Wright, General multiplicity theory, Proc. London Math. Soc. (3) 15 (1965), 269.–288) mit einem besonders einfachen Zugang zum Assoziativgesetz und (II) der analytischen Spezialisierungstheorie von A. Weil.

(I) Es sei $W \in \mathfrak{C}(R)$, $E(\,;W)=0$, $E(t_1\ldots t_r;W) = \{w\in W \mid t_r^u w \in E(t_1\ldots t_{r-1};W)$ für ein $u\ge 0\} + t_r W$. Der hierdurch definierte Funktor $W \mapsto W/E(t_1\ldots t_r;W)$ werde mit $T_{(t)} = T_{(t_1\ldots t_r)}$ bezeichnet. $e_\mu(t_1\ldots t_r;W)$ heiße die μ-Multiplizität von $(t_1\ldots t_r)$ auf W, ferner sei $e_R(t_1\ldots t_r;W;\mathfrak p) = L_R(T_{(t)}(W);\mathfrak p)$ $(\mathfrak p\in \mathrm{Spec}(R))$. $e_\mu(t_1\ldots t_r;W)$ hängt i.a. von der Wahl von $(t_1\ldots t_r)$ ab. Gibt es ein $k\ge 0$ mit $\mathfrak a^k W/\mathfrak a^{k+1}W \in \mathfrak C_r(R)$ und $\mu(\mathfrak a^k W/\mathfrak a^{k+1} W)\ne\infty$, so hängt $e_\mu(t_1\ldots t_r;W)$ nur von $\mathfrak a, r$ (und W,μ) ab und ist gleich der Samuelschen Multiplizität $e_R(\mathfrak a,\mathfrak a^k W)$ von $\mathfrak a$ auf $\mathfrak a^k W$, wenn R Noethersch ist, $\dim \mathfrak a = 0$, μ die Länge auf $\mathfrak C(R)$ und r = Höhe von $\mathfrak a$ = Max Rang $\mathfrak p$ ($\mathfrak p$ durchlaufe die Primideale von $\mathfrak a$). Man zeigt mühelos, daß $e_\mu(t_1\ldots t_r;\ )$ additiv auf $\mathfrak C[t_1\ldots t_r] = \{W\in\mathfrak C(R) \mid W/t_1W \in \mathfrak C[t_2\ldots t_r]$; für jeden Untermodul M von W ex. ein $k\ge 0$ mit $M:_W t_1^k = M:_W t_1^{k+1}\}$ $(\mathfrak C[\,]=\mathfrak C(R))$ ist, wenn nur μ additiv auf $\mathfrak C(R)$ ist. Es folgt, daß $T_{(t)}$ quasiexakt auf $\mathfrak C_r(R)$ ist. Ferner ergibt sich als unmittelbare Konsequenz folgendes „Assoziativgesetz":

μ sei stark additiv auf $\mathfrak C_r(R/\mathfrak a)$, $0\le i\le r$, $W/E(t_1\ldots t_i;W)\in\mathfrak C_r(R)$, $\mathfrak a = \{\mathfrak p \mid \mathfrak p$ isolierter Primideal von $E(t_1\ldots t_i;W):W\}$, so ist

$$e_\mu(t_1\ldots t_r;W) = \sum_{\mathfrak p\in\mathfrak a} e_R(t_1\ldots t_i;W;\mathfrak p)\cdot e_\mu(t_{i+1}\ldots t_r;R/\mathfrak p). \quad (*)$$

Hieraus folgt z.B. das in „Local rings" von M. Nagata angegebene Assoziativgesetz, wenn R Noethersch ist, $W\in\mathfrak C_r(R)$ und $L_R(R/\mathfrak a)\ne 0$, da man dann in (*) $\mathfrak a$ durch $\tilde{\mathfrak a} = \{\mathfrak p \mid \mathfrak p$ isol. Pr. von $(t_1\ldots t_i)\cdot R$, $\mathfrak p+\mathfrak a\ne R$, Höhe von $\mathfrak a+\mathfrak p/\mathfrak p = r-i\}$ ersetzen kann. Als einfacher Ausdruck der Tatsache, daß $e_\mu(t_1;\ ;\mathfrak p)$ stark add. auf $\mathfrak C_r(R)$ ist, ergibt sich eine Verallgemeinerung (und ein einfacher homologischer Beweis) des Krullschen Hauptidealsatzes. Für den Zusammenhang mit der Theorie der Koszul-Komplexe ist wichtig, daß für $\mathfrak C[t_1\ldots t_r]$ folgender Spezialfall des Krullschen Durchschnittsatzes gilt: ist $W\in\mathfrak C[t_1\ldots t_r]$ und $\mathfrak a W = W$, so ist $W \overset{\mathfrak a}{=} 0$ (d.h. $\bigwedge_{w\in W}\bigvee_{\alpha\in\mathfrak a} (1-\alpha)\cdot w = 0$). Die hier angedeutete Multiplizitätstheorie läßt sich zum Teil auch unter der Voraussetzung entwickeln, daß R ein beliebiger Ring mit Einselement ist und $t_1\ldots t_r$ aus dem Zentrum von R.

(II) Es sei (Γ, m) ein quasilokaler Integritätsbereich, k der Quotientenkörper von Γ und $F = \Gamma/m$. $\sigma: \Gamma \to F$ sei der kanonische Homomorphismus und $\Omega \supseteq F$ ein algebraisch abgeschlossener Erweiterungskörper von F. $\varphi: B \to \Omega$ sei eine Erweiterung von σ zu einer Stelle von k (d.h. B ist Bewertungsring und $K = \varphi(B)$ ist Körper). Wir setzen nun $R = k[X_1 .. X_n]$ und $\tilde{R} = \Omega[X_1 .. X_n]$ (X_i Unbestimmte). Es sei $V \in \mathcal{C}(R)$, $j: B \to k$ die Inklusionsabbildung und $\phi = Id_V \otimes j$. Wir setzen dann

$$V_\varphi = (V \otimes_\Gamma B / \phi^{-1}(0)) \otimes_B K \quad \text{und}$$

definieren einen Funktor $T_{(\varphi)}: \mathcal{C}(R) \to \mathcal{C}(\tilde{R})$ durch $T_{(\varphi)}(V) = V_\varphi \otimes_K \Omega$.

Von D.G. Northcott und mir wurde der Zusammenhang zwischen der Modulstruktur von $V \otimes_\Gamma k$ und der von V_φ untersucht (mit $B = \Gamma$ natürlich; s.z.B. Northcott-Reufel: Reduction of polynomial modules by means of an arbitrary valuation. Ab. Math. Sem. Univ. Hamburg 28 (1965), S. 16–49). Mit Hilfe dieser Resultate kann man zeigen, daß $T_{(\varphi)}$ stark exakt auf $\mathcal{C} = \{W \in \mathcal{C}(R) \,/\, W \text{ endl. erzeugt}\}$ ist. Es besteht folgender Zusammenhang zu (I): Ist Γ ein r-dimensionaler regulärer lokaler Ring, so existiert ein r-rangiger Bewertungsring B (mit den Primidealen $p_0 < p_1 < \dots < p_r$) mit $p_i \cap \Gamma = (t_1 .. t_i)\Gamma$ und $B = \Gamma + p_r$. Dann ist $V_\varphi \simeq V / E(t_1 .. t_r; V)$.

Für welche $V \in \mathcal{C}(R)$ ist $e_{\tilde{\mu}}(\varphi, V) = \tilde{\mu}(V_\varphi \otimes_K \Omega)$ ($\tilde{\mu}: \mathcal{C}(\tilde{R}) \to G \cup \{\infty\}$) unabh. von der Wahl von φ? Als Antwort mag der folgende Satz genügen:

Es sei $\pi \in Spec(F[X])$, $\pi_1 .. \pi_\kappa$ die Primideale von $\pi \cdot \Omega[X]$, $G = \bigoplus_{\rho=1}^{\kappa} \mathbb{Z} \cdot \pi_\rho$ und $\mu(V) = \sum_{\rho=1}^{\kappa} L_{\tilde{R}}(V, \pi_\rho) \cdot \pi_\rho$ $(\infty \cdot \pi_\rho = \infty)$. Ferner sei $W \in \mathcal{C}(R)$ endlich erzeugt und $\mu(W \otimes_\Gamma \Omega) \neq \infty$ $(\Leftrightarrow L_{F[X]}(W \otimes_\Gamma F, \pi) \neq \infty)$. Dann gilt:

(1) Ist Γ quasi-ganzabgeschlossen (d.h. die ganzabgeschlossene Hülle R' von R quasi-lokal und der Restklassenkörper von R' rein inseparabel über F), so ist $e_\mu(\varphi, W)$ unabh. von der Wahl von φ. [Ist Γ nicht quasi-ganzabgeschlossen, so ist dieser Satz falsch.]

(2) Γ sei Noethersch und $s \geq 1$. Dann ist $e_\mu(\varphi, W) = \sum_{\rho=0}^{s} (-1)^\rho \mu(Tor_\rho^\Gamma(W, \Omega))$ für alle φ genau dann, wenn $\mu(Tor_{s+1}^\Gamma(W, \Omega)) = 0$ ist.

25.10.1971 Manfred Reufel

Anwendungen von C^*-Algebren auf die Struktur einzelner Operatoren.

Der Satz von Kaplansky über die Struktur dualer C^*-algebren läßt sich wie folgt verallgemeinern.

Satz 1: Sei H ein komplexer Hilbertraum und $\mathfrak{A} \subset B(H)$ eine C^*-algebra von Operatoren. Dann gibt es eine Zerlegung von H, $H = H_0 \oplus \sum_{i \in I} \oplus H_i$, in $\mathfrak{A}$-invariante Unterräume, sodaß mit $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}/H_i$ gilt

i) $\mathfrak{A}/H_0 \cap \mathcal{K}(H) = (0)$, $\mathcal{K}(H)$ die Algebra der kompakten Operat.

ii) $\mathfrak{A}_i = \mathcal{L}_i \otimes \mathbb{1}_{n_i}$, $H_i = K_i \otimes \mathbb{C}^{n_i}$, $n_i < \infty$ und

iii) $\mathcal{K}(K_i) \subset \mathcal{L}_i$ für alle $i \neq 0$.

Ist $\mathfrak{A}$ separabel so ist $|I| \leq \aleph_0$ und $\dim H_0^\perp \leq \aleph_0$.

Der kompakte Teil von $\mathfrak{A}$ induziert auf $\mathfrak{A}$ also eine diskrete Zerlegung. Auf einzelne Operatoren angewandt ergibt dieser Satz

Satz 2: Sei $A \in B(H)$ mit $p_j(A, A^*) = C_j \in \mathcal{K}(H)$ $j \in J$, wo die p_j komplexe Polynome in zwei nicht vertauschbaren Veränderlichen sind. Dann haben H und A eine Zerlegung

i) $H = H_0 \oplus \sum_{i \geq 1} \oplus H_i$, $A = A_0 \oplus \sum \oplus A_i$ $A_i = A/H_i$ mit

ii) $p_j(A_0, A_0^*) = 0$, A_i ist für $i \neq 0$ von endlicher Vielfachheit $n_i < \infty$, $\dim H_0^\perp \leq \aleph_0$

iii) $p_j(A_i, A_i^*) = C_{i,j}$ mit $|C_{i,j}| \to 0$ für $i \to \infty$

A ist vom Typ I genau wenn A_0 vom Typ I ist. A ist postliminal, wenn jeder Operator B mit $p_j(B, B^*) = 0$ $\forall j$ postliminal ist.

Der Satz hat Anwendungen auf fast normale Operatoren und auf spektrale Operatoren mit kompaktem quasinilpotenten Teil.

(H. Behncke; 2.11.1971)

Minkowskische Ungleichungen in orthogonalen Gruppen.

Für die orthogonalen Gruppen wird eine besonders einfache Methode zur Gewinnung der Minkowskischen Ungleichungen angegeben, welche die Zurückführung auf den Fall $k = \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{F}_q(t)$ vermeidet, sondern gleich für beliebige Zahlkörper k bzw. Funktionenkörper vom Transzendenzgrad 1 mit endlichem Konstantenkörper funktioniert: V sei ein Vektorraum mit einer nicht ausgearteten quadratischen Form über k und $G = O^+(V)$. Wenn $u_1, \dots u_r$ einen maximalen total isotropen Teilraum in V aufspannen, so ist $P = \{ p \in G \mid p u_i = \lambda_i u_i + \sum_{\nu < i} * u_\nu \}$ eine minimal parabolische Untergruppe von G, und die für P positiven Wurzeln sind $\lambda_i \lambda_j$ und $\frac{\lambda_i}{\lambda_j}$ für $i < j$, falls $2r = n$, und zusätzlich die λ_i, falls $2r < n$. Ist $G_A = K \cdot P_A$ die Iwasawa-Zerlegung, so sind die Funktionen $|\lambda_i|$ auf G_A durch $|\lambda_i(g)| = |\lambda_i(p)|$, falls $g \in K \cdot p$ $(p \in P_A)$ wohldefiniert. Es wird gezeigt: Es gibt Konstante $c, c' > 0$ so, daß zu $g \in G_A$ ein $\gamma \in G_k$ existiert mit $|\lambda_i(g\gamma)| \leq c\, |\lambda_{i+1}(g\gamma)|$ für $1 \leq i < r$ und

$$\begin{cases} |\lambda_{r-1}\lambda_r(g\gamma)| \leq c & \text{falls } 2r = n \\ |\lambda_r(g\gamma)| \leq c' & \text{falls } 2r < n \end{cases}$$

Für die Konstante c läßt sich ein möglicher Wert angeben, nämlich $c = d \cdot (\frac{4}{\pi})^l \cdot \frac{l!}{l^l}$, wenn $l = [k : \mathbb{Q}]$ und d die Diskriminante von k ist, bzw. $c = q^{2g}$, wenn g das Geschlecht und q die Elementanzahl des Konstantenkörpers von k ist. Die Konstante c' hängt von V (insbesondere von der quadratischen Form) ab. Sie stammt aus dem Lemma: Zu $g \in G_A$ gibt es $\xi \in V_k$, ξ isotrop und $\neq 0$, mit $\|g\xi\| \leq c'$ (falls $r > 0$). Dabei ist $\| \; \|$ eine geeignet normierte Höhe.

S. Böge

8. 11. 1971

15. Sept. 71 Über ein Problem von S. Chowla

Auf der Zahlentheorie Konferenz 1969 in Stony Brook, N.Y. stellte S. Chowla folgende Frage: Ist es richtig, daß für eine Funktion $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}\cancel{\mathbb{A}}$ (:= Körper d. ~~algebr.~~ rationale Zahlen) die mod p periodisch ist (p eine Primzahl), $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} f(n)$ nicht verschwindet? Unter der zusätzlichen Annahme, daß f ungerade oder gerade mit $f(0) = 0$ sei konnte er den Satz (1949 bzw 69) beweisen. A. Baker, B. Birch und der Vortragende lösten das Problem in folgender Weise:

Es sei $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{A}$ periodisch mod q ($\mathbb{A}$: die algebr. Zahlen, $q \in \mathbb{N}$), $f(n) = 0$ für $1 < (n,q) < q$, und es sei das Kreisteilungspolynom Φ_q irreduzibel über $\mathbb{Q}(f(1), \ldots, f(n))$. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} f(n) \neq 0$.

Ist die Funktion f gerade, so kann die Irreduzibilitätsforderung entfallen. –

Keine der Bedingungen darf fehlen.

Für q mit $(q, \varphi(q)) = 1$ enthält der Satz das Dirichletsche Ergebnis $L(1,\chi) \neq 0$; das allerdings im Beweis benötigt wird. Darüber hinaus folgt aber z. B.:

Die Zahlen $L(1,\chi)$, wo χ alle Nichthauptcharaktere mod q durchläuft, sind über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig, falls $(q, \varphi(q)) = 1$ ist.

Es ist ein offenes Problem, ob dies für alle Moduln q gilt.

Der Beweis benutzt wesentlich den Satz von A. Baker, daß, falls $\alpha_i \in \mathbb{A}$ und $\log \alpha_i$ linear abhängig / $\mathbb{A}$, daß dann die $\log \alpha_i$ bereits über $\mathbb{Q}$ linear abhängig sind.

E. Wirsing

Der Subnormalisator einer Untergruppe

Im Gegensatz zu den Verhältnissen bezüglich Normalität braucht eine Untergruppe, die in zwei größeren subnormal ist, nicht in deren Erzeugnis subnormal zu sein; es gibt also i. a. keine größte Untergruppe, in der sie subnormal ist. Man sollte deshalb zu einer gegebenen Untergruppe A von G nach Teilmengen $\mathcal{S}(A, G)$ von G suchen, derart daß für $A \leq B \leq G$ genau dann $A \trianglelefteq\trianglelefteq B$ gilt, wenn $B \subseteq \mathcal{S}(A, G)$ ist. Verschiedene solcher Mengen $\mathcal{S}(A, G)$ werden definiert, falls $|G| < \infty$:

$\{ g \in G \mid A \trianglelefteq\trianglelefteq \langle A, g \rangle \}$

$\{ g \in G \mid A \trianglelefteq\trianglelefteq \langle A, A^g \rangle \}$

$\{ g \in G \mid \bigwedge_{a \in A} \bigvee_{n \in \mathbb{N}} g(\circ a)^n \in A \}$, wobei $g \circ a = g^{-1}a^{-1}ga$ gesetzt ist,

$\{ g \in G \mid \bigwedge_{a \in A} \bigvee_{n \in \mathbb{N}} (a \triangleleft)^n g \in A \}$, wobei $a \triangleleft g = a^g := g^{-1}ag$ ist.

Hauptergebnis: Man bezeichne ein geordnetes Paar (a, b) von Elementen von G als periodisch, wenn die Folge $b, a \triangleleft b, \ldots, (a \triangleleft)^n b, \ldots$ rein periodisch ist, also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b = (a \triangleleft)^n b$ existiert. Sei $P(G)$ die Menge der periodischen Paare von G, und $\mathcal{S}(G)$ ihr Komplement in $G \times G$. Dann gilt: Ist $A \leq B \leq G$, so ist genau dann $A \trianglelefteq\trianglelefteq B$, wenn $A \times (B \setminus A) \subseteq \mathcal{S}(G)$.

Der entsprechende Satz gilt sogar für P_{prim} statt P, wobei P_{prim} aus denjenigen Paaren besteht, die periodisch sind und Primzahlpotenz-Ordnungen haben.

Der Beweis beruht auf dem folgenden Hilfssatz:
Sei A eine Untergruppe der endlichen Gruppe G. A sei nicht subnormal in G, aber A sei subnormal in jeder maximalen Untergruppe von G, in der A enthalten ist. Dann gibt es nur eine solche maximale Untergruppe.

22. 11. 71 Wielandt

Algebren mit holomorphem Funktionalkalkül.

Sei K eine der Teilmengen $\mathbb{C}$, $\bar{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le 1\}$, $\mathbb{D}$, $\{0\}$ von $\mathbb{C}$, $\mathcal{H}(p,q)$ $(p, q \in \mathbb{N})$ die Menge der Keime in K von holomorphen Funktionen $K^p \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{C}^q$ mit $f(K^p) \subset K^q$. $\mathcal{H}(p,1)$ enthält die Keime der Koordinaten-Funktionen z_i $(1 \le i \le p)$, und mit diesen als Projektionen ist $\mathcal{H}$ eine „algebraische Struktur". Die zugehörigen $\mathcal{H}$-Algebren lassen sich auch beschreiben als Mengen mit Struktur, die durch einen Funktionalkalkül gegeben ist; in den Fällen $K = \mathbb{C}$, bzw. $K = \{0\}$, ist diese Struktur reicher als die der kommutativen $\mathbb{C}$-Algebren, bzw. der lokalen kommutativen $\mathbb{C}$-Algebren.
Der Satz über die Existenz und Eindeutigkeit des „holomorphen Funktionalkalküls" in kommutativen Banach-Algebren wird in diesem Kontext interpretiert.

(S. Breitsprecher; 29. 11. 1971)

Aus dem Satz von Reidemeister folgt der Satz von Desargues. Für diesen von Klingenberg stammenden Satz wurde ein neuer Beweis gegeben, der sich algebraischer Hilfsmittel, speziell Gruppen bedient.

13. 12. 1971 Heinz Lüneburg

Diskretisierungs- und Stetigkeitsfragen bei Approximations- und Optimierungsproblemen.

Den Ausgangspunkt bildet das Problem, eine vorgegebene stetige reellwertige Funktion auf einem kompakten Intervall durch Linearkombinationen ebenfalls vorgegebener stetiger reellwertiger Funktionen unter unendlich vielen Nebenbedingungen im Sinne der Maximum-Norm möglichst gut zu approximieren. Die Diskretisierung des Problems besteht nun darin, die unendlich vielen Nebenbedingungen durch endlich viele zu ersetzen und anstelle der Maximum-Norm die entsprechende Halbnorm in endlich vielen Punkten des Intervalles zu betrachten. Behandelt wird die Frage, unter welchen Bedingungen Konvergenz der Minimalabweichungen der diskretisierten Probleme gegen die des Ausgangsproblems vorliegt, wenn man die Diskretisierung mehr und mehr verfeinert. Diese Fragestellung wird auf die folgende Weise verallgemeinert: Sei X eine konvexe Teilmenge eines normierten Vektorraumes E, sei Z ein halbgeordneter normierter Vektorraum mit Y als Ordnungskegel. Ferner sei $f: E \to \mathbb{R}$ ~~und~~ ein konvexes Funktional und $g: E \to Z$ eine konkave Abbildung. Dann ist $f(x)$ unter den Nebenbedingungen $x \in X$ und $g(x) \in Y$ zum Minimum zu machen. Mit $v(P)$ werde das Infimum von f auf der Menge $S = \{x \in X : g(x) \in Y\}$ bezeichnet. Anstelle von X, f und g werden jetzt Folgen $\{X_n\}$, $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ konvexer Teilmengen von E bzw. konvexer Funktionale auf E bzw. konkaver Abbildungen auf E betrachtet, die in geeigneter Weise gegen X bzw. f bzw. g konvergieren, und die Frage untersucht, unter welchen Bedingungen die zugehörigen Infima $v(P_n)$ der Funktionale f_n auf den Mengen $S_n = \{x \in X_n ; g_n(x) \in Y\}$ gegen $v(P)$ konvergieren. Hierzu wird ein allgemeiner Stetigkeitssatz angegeben und dessen Anwendung auf die obige Ausgangsfragestellung skizziert.

20. 12. 1971

W. Krabs.