Einige Anwendungen des Monotonieprinzips auf Differenzenverfahren

(a) Abstrakter Hintergrund: A und B seien mit einer Relation $\leq$ halbgeordnete lineare Räume, und der Operator P mit $D(P) \subset A$, $P(D(P)) \subset B$, $D(P) =$ Def.-Bereich von P, habe die Eigenschaft $Px \leq Py \Rightarrow x \leq y$. In der Terminologie von Collatz heißt P dann „von monotoner Art".

Gesucht ist eine Fehlerabschätzung für $u - \bar{u}$, wenn $Pu = s$ eine zu lösende Gleichung und $\bar{u}$ eine „Näherung" mit $P\bar{u} = \bar{s}$ ist. Wir setzen zusätzlich die Halbordnung als archimedisch voraus. Für eine Ordnungseinheit $\eta \in B$ gibt es dann $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ so, daß

$$-\varepsilon\eta \leq s - \bar{s} \leq \varepsilon\eta,$$

und aus
$$(1) \quad P\bar{u} - P(\bar{u} - \varepsilon w) \geq \varepsilon\eta \quad \text{und}$$
$$(2) \quad P(\bar{u} + \varepsilon w) - P\bar{u} \geq \varepsilon\eta$$

folgt die Einschließung $-\varepsilon w \leq u - \bar{u} \leq \varepsilon w$.

In der Praxis muß man ein geeignetes $w \in A$ finden. Wenn P linear ist, genügt $Pw \geq \eta$.

(b) Diskretisierung: A und B seien Räume vektorwertiger Funktionen, deren Definitionsbereiche mit einem Gitter $\Gamma_h(A)$ bzw. $\Gamma_h(B)$ überzogen werden, η_h sei auf $\Gamma_h(B)$ komponenten- und punktweise stets $= 1$, die Halbordnung in den entsprechenden Räumen A_h und B_h sei die natürliche. Diskretisierungsparameter $h \to 0$.

Für die mit h indizierten Gleichungen von (a) gilt daran analoges, auch P ist zu indizieren, P_h ist ein Näherungsoperator zu P, es soll

$$\frac{1}{h^i}\left\| P_h u\big|_{\Gamma_h(A)} - (Pu)_{\Gamma_h(B)} \right\| \to 0 \quad \text{bei } h \to 0 \text{ gehen.}$$

$\| \; \|$ ist die Maximum-Norm.

Aus der monotonen Art folgt dann diskrete Konvergenz der Näherungslösung u_h gegen u, wenn eine Konstante K und ein w_h für $h \to 0$ so existieren, daß $\|w_h\| \leq K$

und für die $\bar{u}_h = u\big|_{\Gamma_h(A)}$ gilt

$$P_h \bar{u}_h - P(\bar{u}_h - \varepsilon_h w_h) \geq \varepsilon_h \eta_h \quad \text{und} \quad P_h(\bar{u}_h + \varepsilon_h w_h) - P_h \bar{u}_h \geq \varepsilon_h \eta_h$$

(c) Anwendungen: Anwendung auf natürlich sich anbietende Diskretisierung von 2-Punkt-Randwertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen und auf Randwertaufgaben für schwach gekoppelte parabolische Systeme ergibt, daß manche in der Literatur üblichen Voraussetzungen entbehrlich sind. Das Monotonie-Prinzip führt weiter als das Maximumprinzip.

Rudolf Gorenflo, 7.1.1972
GORENFLO

Die wichtigen klassischen Kettenbruchalgorithmen können entstanden gedacht werden aus einer geometrischen Idee: geeignete Pflasterungen eines zugrundeliegenden topologischen Raumes X erzeugen Folgen von monoton feiner werdenden Partitionen von X. Dabei treten (aus Zusammenhangsgründen) Ausnahmemengen auf. – Der geometrische Hintergrund suggeriert eine Fülle neuer Algorithmen.

A. Leutbecher, 10.1.72.

Sei Ω eine beschränkte offene Punktmenge des R^n mit glattem Rand. Zunächst wird der Begriff ~~[illegible]~~ der gebrochenen Potenz eines elliptischen Operators

$$\sum_{|\alpha| \leq 2m} A_\alpha(x) D^\alpha$$

unter Null-Dirichletbedingungen von den Räumen $L^p(\Omega)$, in denen er üblicherwelche erklärt ist, auf die Räume $C^\alpha(\bar{\Omega})$ übertragen. Mit Hilfe dieser Theorie wird ein Regularitätssatz für die ~~L~~ schwache Lösung gewisser parabolischer Differentialgleichungen hergeleitet.

Der zweite Teil beschäftigt sich mit a-priori Schranken für die Hölder-Norm des Gradienten der Lösungen parabolischer Systeme

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial t} - \sum_{i,j} a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x_i \partial x_j} = f_\lambda(t,x,\underline{u},D\underline{u}), \quad \lambda = 1,\dots,L.$$

Hierbei genügt f_λ einer Wachstumsbedingung

$$|f_\lambda(t,x,\underline{u},D\underline{u})| \le \|\underline{u}\|_{C^0}\,\mu(\|\underline{u}\|_{C^0})\,|D\underline{u}|^2 + K$$

und $\|\underline{u}\|_{C^0}\,\mu(\|\underline{u}\|_{C^0})$ erfüllt eine Kleinheitsbedingung. Die Kleinheitsbedingung ist im Falle einer einzigen Gleichung überflüssig.

Auch für quasilineare Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x,Du)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f(x,t,u,Du)$$

läßt sich unter einer ähnlichen Wachstumsbedingung an f wie oben und gewissen Bedingungen an die a_{ij} sowie $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial t}$ eine a-priori Schranke für $\sup_{0 \le t \le T} \|Du(t)\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}$, $T > 0$, herleiten.

17. 1. 1972

Wolf von Wahl

28.1.1972: Über einige unimodularen Gitter.

Sei $K = GF(q)$, $q = 4ab-1$, χ der quadratische Charakter von K, ergänzt durch $\chi(\infty) = -\chi(0) = 1$, $H = (\chi(\alpha+\beta))$ die von Gilman-Paley gefundene Hadamard-Matrix. Die Bilinearform $\begin{pmatrix} aI & \frac{1}{2}H \\ \frac{1}{2}H & bI \end{pmatrix}$ definiert mod dem Radikal einen $4ab$-dim. $\mathbb{Z}$-Modul $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ der Diskr. $\frac{1}{4}$, der genau drei mit $(0,a,b)$, $(a,0,b)$, $(a,b,0)$ bezeichnete unimodulare Gitter (mit den Paritäten b, $a+b+1$, a) besitzt, entsprechend den Bedingungen Σx_α, $\Sigma(x_\alpha+y_\alpha)$, $\Sigma y_\alpha \equiv 0 \bmod 2$ für die Koeffizienten. Die Gitter mit ihren Gruppen

$$M = (2,3,0), \quad M' = (0,2,3), \quad \Lambda = (2,0,3)$$

feiern heute ihren $\underline{32^{ten}}$ Geburtstag!

M und Λ waren No. 10 und 11 meiner Untersuchung Hamb. Abh. 14 S. 323, ich fand sie am 28.1.1940 durch Studium des Steiner-Systems $S(5,8,24)$ und bestimmte die Gruppenordnungen: $G(M) = 2^{24}M_{24}$, $G(M') = 2^{12}M_{24}$, $G(\Lambda) : 2^{12}M_{24} = 3^4 5^2 (2^{12}-1)$, usw. Λ wurde 1967 von Leech wiederentdeckt, $G(\Lambda)$ von Conway untersucht. –

Satz. Aus $a,b,c > 1$, $23 \neq q = 4ab-1 \geq a^2c^2 - 3ac+4$, $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}+\mathfrak{B}$, $\mathfrak{x} \notin \mathfrak{A}$ folgt $(\mathfrak{x},\mathfrak{x}) > c$. ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ s. oben)

(Interessante Beispiele abgekürzt notiert:
$q = 167$, $(0,3,14) \geq 6$, $(3,0,14) \geq 6$; $q = 719$, $(4,0,45) \geq 8$; $q = 1499$, $(4,0,75) \geq 9$; $q = 1559$ $(5,0,78) \geq 10$, $(0,5,78) \geq 10$

Für $a = 2$ oder $b = 2$ sind die drei erwähnten Gitter $(0,a,b)$, $(a,0,b)$, $(a,b,0)$ monomial, wenn $ab \neq 6$, d.h. ihre linearen Automorphismengruppen sind monomial. Dies folgt nach gesonderter Diskussion über $(2,0,4)$ und $(0,2,4)$ aus dem Satz.

$(3,b,0)$ ist stets monomial, $(3,0,b)$ und $(0,3,b)$ für $q > 251$.

Parallele zum Reziprozitätsgesetz für $\left(\frac{a}{b}\right)$, insbesondere im Fall $(3,0,4)$.

Ernst Witt

3/1. 1972 Gitter über Ordnungen

Sei o ein Dedekindring, dessen Quotientenkörper k ein algebraischer Zahlkörper ist. Sei A/k eine halbeinfache Algebra und R eine o-Ordnung in A d.h. ein Unterring mit $1 \in R$, $kR = A$, welcher endlich erzeugter o-Modul ist. Darstellungen von R in o werden vermittelt durch o-Gitter, d.h. endlich erzeugte R-Moduln ohne o-torsion. Zwei Gitter gehören zum gleichen Geschlecht, wenn sie an allen Primstellen isomorph sind. Es wurde die Konstruktion einer Invariante skizziert, mit deren Hilfe die Isomorphieklassen in einem Geschlecht charakterisiert werden können. Weiter wurde diese Invariante dazu benutzt, um Eigenschaften der R-Gitter herzuleiten.

H. Jacobinski

7. Februar 1972 Fast Bairesche topologische lineare Räume

Ein topologischer linearer Raum X heiße fast Bairesch oder ein (α)-Raum, wenn er die folgende Eigenschaft (α) hat:

Ist (A_n) eine aufsteigende Folge von absolutkonvexen abgeschlossenen Teilmengen von X mit $\bigcup_n A_n = X$, so sind die A_n für alle hinreichend großen n absorbant.

Diese Eigenschaft ist schwächer als die Eigenschaft, daß X ein Bairescher Raum im Sinne von Bourbaki ist. (α) läßt sich im lokalkonvexen Fall dual charakterisieren, es gibt mehrere hinreichende Bedingungen für (α), und die fast Baireschen Räume haben zahlreiche Permanenzeigenschaften, z.B. bezüglich Produktbildung. Zu den Anwendungen dieser Räume gehören Formen der Sätze vom abgeschlossenen Graphen und von der offenen Abbildung, ein Analogon des Satzes von Banach-Steinhaus und andere Stetigkeitsaussagen.

W. Roelcke

14 Februar 1972

Homotopieäquivalente kompakte zush. Gruppen.

Seien G, G' kompakte zusammenhängende Gruppen. Sei Z_0 die Zusammenhangskomponente der $1 \in G$ des Zentrums $Z(G)$, sei K die Kommutatorenuntergruppe G und $D = K \cap Z_0$. Entsprechend seien Z_0', K' und D' für G' definiert.

Sei G homotopieäquivalent zu G'. Dann ist $Z_0/D \cong Z_0'/D'$ (isomorph). Es ist G homöomorph $(Z_0/D) \times K$.

Die verallgemeinerten universellen Überlagerungen $\tilde{G}$ und $\tilde{G}'$ sind homotopieäquivalent. Es ist $\tilde{G} \cong \mathbb{R}^m \times \tilde{K}$ und $\tilde{K}$ ist ein Produkt von einfach-zush., kompakten, einfachen Liegruppen. I. a. sind dann nicht $\tilde{K}$ und $\tilde{K}'$ isomorph. Aber die Ausnahmen davon rühren im wesentlichen von dem folgenden Beispiel her: $\mathrm{Spin}(8)^\omega$ ist homöomorph $\mathrm{Spin}(8)^\omega \times \mathrm{Spin}(7)$, wo ω eine unendliche Kardinalzahl ist.

Eine Art von Anwendung wird auf Restklassenräume $G \to G/I$ mit Schnitt gegeben.

H. Scheerer

"Recent results concerning the relationship between axiomatic and probabilistic potential theory." 10 april '72

1) To each Bauer sheaf $\mathcal{H}$ for which 1 is superharmonic there exists a standard process Y such that the process Y^U obtained by killing Y at $\complement U$ has as its excessive functions the cone of non-negative hyperharmonic functions on U, U an arbitrary open locally compact subset of E.

2) If a Bauer sheaf admits a Green function then there exist two diffusions X and Y in duality such that (i) the excessive functions defined by X coincide with the cone of non-negative hyperharmonic functions defined by the sheaf and (ii) Y is adjoint to X in a suitable sense (for example, if an adjoint sheaf exists then the excessive functions defined by Y coincide with the cone of non-negative hyperharmonic functions defined by the adjoint sheaf.

JC Taylor

Automorphismen des Siegelschen Quotienten zweiten Grades 17.4.72

Seien Γ_n die Siegelsche Modulgruppe, H_n die (verallgemeinerte) Siegelsche Halbebene n-ten Grades. Der Quotient $Q_n = H_n/\Gamma_n$ ist ein normaler, komplexer Raum. Die Gruppe der analytischen Automorphismen von Q_n für $n \geq 3$ ist nach einem Resultat von Gottschling trivial. Für den Fall $n = 2$ ($n = 1$ ist natürlich klassisch) wird gezeigt: Die Gruppe der analytischen Automorphismen von Q_2 ist eine komplexe Liegruppe $\simeq (\mathbb{C}^\times)^3$.
Dazu reduziert man das Problem zunächst auf ein algebraisch-geometrisches Problem (nämlich auf die Bestimmung der (algebraischen) Automorphismen der Varietät Q_2) und benutzt dann die bekannte Struktur (cf. Igusa) des graduierten Ringes der ganzen Modulformen zu Γ_2.

S. Suckow

Über vollständige Regularität in Gruppenalgebren 24.4.72

Es sei $[FC]^-$ bzw. $[SIN]$ die Klasse derjenigen lokalkompakten Gruppen, in denen die Klassen konjugierter Elemente relativ kompakt sind bzw. das Einselement eine invariante Umgebungsbasis besitzt. Es wird gezeigt, daß für $G \in [FC]^- \cap [SIN]$ die Gruppenalgebra $L^1(G)$ (bzw. ihr Zentrum $Z^1(G)$) vollständig regulär (bzw. stark vollständig regulär) ist. Ferner wird für eine Klasse diskreter Gruppen, die die nilpotenten der Klasse ≤ 3 enthält, bewiesen: $L^1(G)$ ist genau dann vollständig regulär, falls G klassenendlich ist. Schließlich wird ein Beispiel einer metabelschen, nicht klassenendlichen diskreten Gruppe mit vollständig regulärer Gruppenalgebra angegeben.

E. Kaniuth

Extremale harmonische Funktionen auf Gruppen. 8.5.72

Sei $(G, \mathcal{H})$ eine harmonische Gruppe mit $1 \in \mathcal{H}_G$, wobei G eine abelsche, lokal-kompakte, zusammenhängende topologische Gruppe ist. Eine harmonische Funktion $h \geq 0$ auf G liegt genau dann auf einem extremalen Strahl des konvexen Kegels ${}_+\mathcal{H}_G$, wenn es ein harmonisches Exponential f (d.h. eine stetige Funktion $f: G \to \mathbb{R}_+^*$ mit $f(x+y) = f(x)f(y)$ und $\int f \, d\chi_0^V = 1$ für eine reguläre Umgebung V von 0) und eine reelle Zahl $\lambda \geq 0$ mit $h = \lambda f$ gibt. Da G homöomorph zu $\mathbb{R}^n \otimes K$ gilt mit maximaler kompakter Untergruppe K von G, ergibt sich, daß die Menge der extremalen Strahlen von ${}_+\mathcal{H}_G$, versehen mit der vagen Topologie, zu einer der folgenden Mengen homöomorph ist: $\{0\}$, $\mathbb{R}^{n-1}$ $(n>1)$, S^{n-1}, $S^{n-r-1} \times \mathbb{R}^r$ $(1 \leq r \leq n-1)$.

Ist $G = \mathbb{R}^n$, so sind nach Bony alle harmonischen Gruppen durch elliptische oder parabolische Differentialoperatoren $A = \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ mit konstanten Koeffizienten gegeben. In diesem Fall erhält man folgenden Darstellungssatz: Zu jeder Lösung $h \geq 0$ von $Au = 0$ gibt es genau ein positives Radon-Maß ν_h auf M_A mit $h(x) = \int_{M_A} e^{\langle x, y \rangle} \nu_h(dy)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$, wobei $M_A = \{y \in \mathbb{R}^n : \sum_{i,j} a_{ij} y_i y_j + \sum_i a_i y_i = 0\}$ ist. Dabei ist M_A also der Rand eines Ellipsoids bzw. Paraboloids, je nachdem ob A elliptisch bzw. parabolisch ist.

Jürgen Bliedtner.

Erwartete Zuwächse von Punktprozessen 15.5.72

Wir betrachten Punktprozesse auf R die stationär sind und endliche Intensität α haben. $N(\omega, Q)$ bezeichne die zufällige Anzahl der Punkte des Prozesses in der Borelschen Menge Q. Es sei $[b,c]$ ein endliches Intervall. Für jede Zerlegung $\Delta = \{b = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_{n+1} = c\}$ dieses Intervalles definieren wir $S_\Delta(\omega) = \sum_{\nu=0}^{n} E(N[\xi_\nu, \xi_{\nu+1}) \mid \mathcal{F}_{\xi_\nu})$, wobei $\mathcal{F}_t$ $(-\infty < t < \infty)$ die σ-Algebra der in $(-\infty, t)$ eintretenden Ereignisse. <u>Satz</u> Es existiert eine Version von $E(N[x,y) \mid \mathcal{F}_x)$ $(-\infty < x < y < \infty)$ derart, daß $\lim_{\|\Delta\| \to 0} S_\Delta(\omega) = W(\omega, [b,c))$ existiert f.s. und im Mittel. $Y(\omega) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{E(N[0,\varepsilon) \mid \mathcal{F}_0)}{\varepsilon}$ existiert f.s. aber nicht immer im Mittel. Die zufällige Intervallfunktion W läßt sich zu einem zufälligen Maß $W(\omega, Q)$, (Q Borelsch) erweitern. Satz Sei W f.s. atomfrei und $0 \le t_1(\omega) < t_2(\omega) < \ldots$ die nicht-negativen Punkte des Prozesses. Wir definieren $0 \le \tau_1(\omega) \le \tau_2(\omega) \le \ldots$ durch $\tau_n(\omega) = W(\omega, [0, t_n(\omega)))$. Die Folge $\{\tau_n(\omega)\}$ ist f.s. strikt aufsteigend und zwar ein homogener Poissonscher Prozess in $[0,\infty)$ mit Intensität 1 und unabhängig von $\mathcal{F}_0$.

Sei P_0 die Palmsche Wahrscheinlichkeit des Prozesses. Wenn $P_0 \ll P$ (absolut stetig) auf $\mathcal{F}_0$ ist, dann existiert eine Radon-Nikodymsche Ableitung $X(\omega)$: $P_0(A) = \int X(\omega) P(d\omega)$ $(A \in \mathcal{F}_0)$. $X(t,\omega) = X(\omega - t)$ ist dann ein stationärer stochastischer Prozess. Satz Folgende Aussagen sind äquivalent: (i) $P_0 \ll P$ auf $\mathcal{F}_0$; (ii) $Y(\omega) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{E(N[0,\varepsilon) \mid \mathcal{F}_0)}{\varepsilon}$ existiert auch im Mittel (iii) W ist f.s. absolut stetig bezüglich des Lebesgueschen Maßes λ. In diesem Fall sind $Y = \alpha X$ und $W(\omega, [0,t)) = \alpha \int_0^t X(u,\omega)\, du$. Satz W ist f.s. atomfrei bzw. absolut stetig bezüglich λ dann und nur dann wenn die bedingte P_0-Verteilung des kleinsten positiven Punktes des Prozesses, gegeben $\mathcal{F}_0$, f.s. stetig bzw. absolut stetig ist.

F. Papangelou

Sprühregen und lineare Zusammenhänge 29-5-72

"Sprühregen" (= sprays) und lineare Zusammenhänge, die symmetrisch sind, stehen in umkehrbar eindeutiger Beziehung zueinander: für diesen Satz von Ambrose, Palais und Singer wurde nach einigen Vorbereitungen ein einfacher Beweis gegeben.

Jens Lyaunt,

H^p spaces of martingales 31-5-72

We first try to show how the classical H^p spaces of analitic functions can be described with martingales associated to the brownian motion. Then extending this situation we introduce the H^p spaces of continuous martingales, which are the space of continuous martingales ~~whi~~ with their maximum in L^p. Following a paper of Getoor and Sharpe ("conformal martingales" to be published in inventiones mathematicae), we then study the dual of H^1, which is a Banach space of "almost bounded martingales".

N Duflo

Rings with finite Krull dimension 31-5-72.

The definition of Krull dimension defined by Gabriel & Rentschler in C.R. 1967 which certainly extends to abelian categories the classical notion due to Krull expressed in terms of lengths of chains of prime ideals of a ring. For a ring R, possibly non-commutative the relationship between the new Krull dimension $|R|$ and the classical one, $cl\,|R|$ is considered. The following results indicate this connection.

Thm 1 If $|R|$ exists (as an ordinal) then $cl|R|$ exists and $cl|R| \leq |R|$.

examples show that $cl|R| = 0$ and $|R|$ not exist is possible. Also $cl|R| = 0$ and $|R| = n$ any +ve integer, is possible. For commutative noetherian rings the two notions coincide.

The effect which the existence of $|R|$ has on the structure of R is considered.

Thm 2 If $|R|$ exists then the powers of the nil radical N of R are distinct.

Thm 3 If R is commutative, $|R|$ exists and $cl|R| < \infty$ then N is nilpotent.

It may be possible to extend thm 3 either to the case of non-commutative rings, or to arbitrary $cl|R|$; at the moment the outlook is undecided.

Alfred Goldie

5.6.72

Das Stoppen eines Markov-Prozesses.

Gegeben der meßbare Raum $(E, \mathcal{B})$, darauf der sub-stochastische Kern P. Man betrachtet die Ordnung in der Menge der Maße auf $(E, \mathcal{B})$ („Balayage-Ordn."):

$$\mu > \nu \quad :\Leftrightarrow \quad \langle \mu, f \rangle \geq \langle \nu, f \rangle \text{ f. alle } P\text{-exzessiven } f.$$

Es wird zu μ, ν ein Maß $\bar{\nu}$ konstruiert mit folgender Eigenschaft:

a) $\mu > \bar{\nu}$, $\bar{\nu} \leq \nu$

b) wenn $\mu > \rho$, $\rho \leq \nu$, so gilt $\bar{\nu} > \rho$.

Insbesondere gilt $\bar{\nu} = \nu$ genau dann, wenn $\mu > \nu$.
Durch probabilistische Interpretation dieser Konstruktion erhält man folgende Deutung der Ordnung „$>$":

$\mu > \nu$ genau dann, wenn $\nu = \mu P_T$ f. eine geeign. Stoppzeit T.

Diese Ergebnisse übertragen sich wörtlich auf eine weite Klasse zeitlich kontinuierlicher Halbgruppen, sofern man $\mu > \nu$ durch

$$\lim_{\alpha \to 0} \sup_{\substack{f \leq 1 \\ f \in \mathcal{S}^\alpha}} \langle \nu - \mu, f \rangle = 0 \text{ erklärt}$$

($\mathcal{S}^\alpha$: Menge der α-exzessiven Funktionen).

Als Anwendung der Methode, die ~~zum~~ zur Konstruktion der Stoppzeit T oben geführt hat, wird ein Satz vom Typ des SKOROCHOD'schen Satzes in der Brown'schen Bewegung nunmehr für allgemeine Markov-Prozesse aufgestellt.

Hermann Rost.

Let be $0<x<1$, $-1<\nu<\infty$, $K\in(-\infty,+\infty)$, $k\in(0,\infty)$ and
$$\begin{cases} v(a_n,x) = a_n^{-\nu} J_\nu(a_n x) + K\, a_n^{\nu} J_{-\nu}(a_n x) & (K=0 \text{ if } \nu\geq 0), \\ v(a_n,x) = -\frac{2}{\pi}(\lg(k a_n))\cdot J_0(a_n x) + Y_0(a_n x) & , \end{cases}$$
solutions of Bessel's equation $(xy')' + (a_n^2 x - \nu^2/x)y = 0$ satisfying at $x=1$

(1) $\alpha u_n(1) + \beta u_n'(1) = 0$, $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$, α,β real.

Here a_n runs in the set of zeroes defined by (1) such that $\pi > \arg a_n \geq 0$. Then if $c_n = \int_0^1 u_n(x) f(x)\cdot x\,dx / \| u_n \cdot \sqrt{x}\|_2^2$ and $S_N f = \sum_1^N c_n\cdot u_n$ it holds:

Th. Assume $1\leq p\leq\infty$, $-\infty<\beta<+\infty$. Then $\forall f: f x^\beta \in L^p(0,1)$,

$S_N f \to f$ in the space L^p associated to the measure $x^{\beta p}dx$ $0<x<1$, if and only if $1<p<\infty$ and

$$\{(\nu+\tfrac12)\wedge 0\} + \tfrac32 - \beta > 1/p > \tfrac12 - \beta - \{(\nu+1/2)\wedge 0\}.$$

The described systems $\{u_n\}$ are "essentially" all the orthogonal systems of solutions of Bessel's equation complete in L^2 with respect to the measure $x\,dx$, $0<x<1$ — for $\nu\in(-\infty,+\infty)$.
Besides, for $\beta=0$, all these systems verify: $S_N f \to f$ a.e. when $\beta=0$ and $x^\beta\cdot f\in L^p(0,1)$, $1<p<\infty$, $\{(\nu+\frac12)\wedge 0\} + \frac32 > \frac1p > \frac12 - \{(\nu+\frac12)\wedge 0\}$.

Rafael Panzone.

12.6.72

Nullstellen von quadratischen Formen.

Sei φ eine quadratische Form über einem Körper k einer Char. $\neq 2$. Eine Körpererweiterung K/k heiße generischer Nullstellenkörper, falls a) $\varphi\otimes K$ isotrop ist und b) zu jedem Körper L/k mit $\varphi\otimes L$ isotrop eine Stelle $\lambda: K \xrightarrow[k]{} L\cup\infty$ existiert. z. B. ist stets der Funktionenkörper $k(\varphi)$ der Quadrik $\varphi=0$ über k generischer Nullstellenkörper von φ (sogar mit einer "generischen Nullstelle"). $k(\varphi)$ ist genau dann rein transzendent über k, wenn φ isotrop ist. Man kann nun zu jeder Form φ über k einen "generischen Zerfällungsturm" $k=K_0\subset K_1\subset\dots\subset K_h$ wie folgt konstruieren: Sei

$i_0(\varphi)$ der Witt-Index von φ und φ_0 die Kernform von φ. Falls $\dim \varphi_0 > 1$ wähle K_1 als gen. Nullst. körper von φ_0 und definiere $i_1(\varphi) :=$ Witt-Index von $\varphi \otimes K_1$, $\varphi_1 :=$ = Kernform von $\varphi \otimes K_1$. Falls $\dim \varphi_1 > 1$ wähle K_2 als gen. Nullst. körper von φ_1 und definiere $i_2(\varphi) =$ = Witt-Index von $\varphi_1 \otimes K_2$, $\varphi_2 =$ Kernform v. $\varphi_1 \otimes K_2$ etc. h, sowie die Indizes $i_r(\varphi)$ und "im wesentlichen" die φ_r hängen nicht von der Wahl des Zerfällungsturms ab. Für einen beliebigen Körper L/k gibt es genau ein $r \in [0,h]$, so daß der Index von $\varphi \otimes L$ $= i_0(\varphi) + \dots + i_r(\varphi)$ ist und die Kernform von $\varphi \otimes L$ eine Spezialisierung von φ_r ist. Die Formen der "Höhe" $h = 1$ sind gerade die "Pfisterformen" $\tau = (1, a_1) \otimes \dots \otimes (1, a_s)$, $s \geq 1$, und ihre reinen Anteile τ' ($\tau = (1) \perp \tau'$). Dieser Satz ist eine Folge eines Normensatzes: Sei φ quadr. Form über k, und $p(t_1, \dots, t_r)$ ein normiertes irreduzibles Polynom über k in bel. vielen Variablen $t_1, \dots, t_r$. Dann gleichwertig:

(i) p ist Ähnlichkeitsnorm von $\varphi \otimes k(t_1, \dots, t_r)$

(ii) Es gibt ein quadratfreies Polynom $f(t_1, \dots, t_r)$ in $k[t_1, \dots, t_r]$ mit $p | f$ und f Ähnlichkeitsnorm von $\varphi \otimes k(t_1, \dots, t_r)$

(iii) φ hyperbolisch über dem Funktionenkörper $k(p) = \mathrm{Quot}\; k[t_1, \dots, t_r]/(p)$ zu p.

Über jedem formalreellen Körper k gibt es Formen $n \times (1)$ von beliebig großer Höhe.

Die Untersuchungen schließen eng an Arbeiten von Pfister, Arason-Pfister und Elman-Lam an.

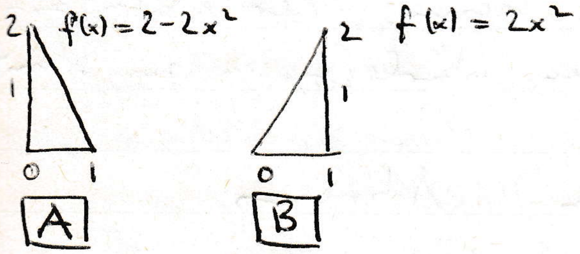
Manfred Knebusch

15.6.72

Neue Methoden der Erzeugung nicht-gleichverteilter Zufallszahlen.

Die heute üblichen Computerverfahren der Gewinnung von zufälligen Größen beginnen alle mit der Erzeugung von $[0,1)$-gleichverteilten Zufallsvariablen u. Dafür wird am häufigsten die Lehmersche multiplikative Kongruenzmethode verwendet. Nicht-gleichverteilte Zufallszahlen x mit vorgegebener Verteilungsfunktion $F(x)$ lassen sich prinzipiell leicht aus $[0,1)$-gleichverteilten Größen u gewinnen: Man setze hierfür $u = F(x)$ und invertiere ($x \leftarrow F^{-1}(u)$). Die Inversion ist jedoch numerisch oft mühsam, und für alle praktisch bedeutsamen statistischen Verteilungen existieren daher schnellere Methoden.

Als ein Beispiel werde die für Simulationssprachen wichtigen Dreiecksverteilungen betrachtet:



Durch Inversion erhält man die Verfahren.

A: $x \leftarrow 1-\sqrt{u}$ B: $x \leftarrow \sqrt{u}$

Mit Hilfe von zwei $[0,1)$-Variablen u_1 und u_2 kann man dies verbessern zu A: $x \leftarrow |u_1+u_2-1|$, B: $x \leftarrow 1-|u_1+u_2-1|$ oder noch günstiger A: $\mathrm{Min}(u_1,u_2)$, B: $\mathrm{Max}(u_1,u_2)$. Eine neue Methode, die wiederum mit einer $[0,1)$-Zufallszahl auskommt, aber die langsame Quadratwurzel vermeidet, ist die folgende.

Sei $u = 0{,}b_1 b_2 b_3 \ldots$ die Binärdarstellung einer zunächst erzeugten Zufallszahl. Wenn $b_1 = 0$ ist, dann setze man $x \leftarrow u$. Hat aber u am Anfang k Bits, die gleich eins sind ($b_1 = b_2 = \ldots = b_k = 1$, $b_{k+1} = 0$), dann setze man $x \leftarrow 0{,}b_{k+2} b_{k+3} \ldots b_{2k+1} 0\, b_{2k+2} b_{2k+3} \ldots$ x ist dann auch $\boxed{A}$-verteilt, und eine ähnliche Methode (in der nur die Rolle von 0 und 1 zu vertauschen ist) ergibt die Verteilung $\boxed{B}$. Diese Transformation ist 'pathologisch' aber bestens programmierbar in Internkode.

Als ein weiteres Beispiel wird nun eine Methode von v. Neumann / Forsythe vorgestellt, die Stichproben in endlichen Intervallen [a, b) von einer Wahrscheinlichkeitsdichte der Form $Ce^{-G(x)}$ liefert:

1. Erzeuge ein [0,1)-verteiltes u. Setze $x \leftarrow a + (b-a)u$
2. Berechne $t \leftarrow G(x)$.
3. Erzeuge k (unabhängige) weitere gleichverteilte [0,1)-Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_k$. Dabei ist k bestimmt durch die Bedingung $t \geq u_1 \geq u_2 \geq \ldots \geq u_{k-1} < u_k$. Wenn k gerade ist, gehe zurück nach 1. Andernfalls akzeptiere x.

Die existierenden Beweise für die Gültigkeit dieses Algorithmus sind unnötig kompliziert, man kann die Methode tatsächlich in 2 Zeilen beweisen. Ausgedehnte Vergleiche auf zwei verschiedenen modernen Computern haben erwiesen, daß das Verfahren (in einer vom Verfasser stark modifizierten Form) zu einem speziellen Algorithmus für die Normalverteilung erweitert werden kann, der allen bisher bekannten Erzeugungsmethoden überlegen zu sein scheint.

Joachim H. Ahrens

Kurt Reidemeisters topologisches Werk und seine Auswirkungen in der Gegenwart. 26. 6. 1972.

1. Gruppentheorie und 1- und 2-dimensionale Topologie. „Reidemeister-Verfahren". Topologische Methoden in der Gruppentheorie.

2. Knotentheorie. Knotengruppe, Alexander-Matrix, Überlagerungen, quadratische Form. Dehnsches Lemma. Papakyriakopoulos.

3. Topologie der Polyeder und Kombinatorische Topologie der Komplexe. Hauptvermutung, Poincarésche Vermutung. Verwandte Polyeder. Präzisierung der kombinatorischen Topologie (Piecewise Linear Topology).

4. Homotopieketten. Homotopieinvarianten. Abelsche Fundamentalgruppen 3-dimensionaler Mannigfaltigkeiten, Torsion, Torsionsideale.

5. Anwendungen auf differenzierbare Mannigfaltigkeiten (Cairns, Whitehead

Existenz und Eindeutigkeit differenzierbarer Strukturen (Kervaire, Milnor), Existenz und Eindeutigkeit linearer Strukturen (Milnor, Kirby-Siebenmann, Moise). Einfluß Reidemeisters. Offene Probleme.

Wolfgang Franz

The purpose of the talk is to suggest a definition of an „elementary object" of representation theory. The question imposes itself upon taking into account, that the possibility of a unique direct integral decomposition into irreducible components fails to hold true already for five dimensional Lie groups. The proposed substitute is a „trace class" factor representation. This is a unitary ~~algebra~~ representation T, such that the v. Neumann algebra $R(T)$ its generates carries a trace φ, such that the family $\{T(f);\ f \in L(G),\ \varphi(T(f)(T(f))^*) < \infty\}$ generates $R(T)$.

Theorem 1. For any connected solvable Lie group G the right (or left) regular representation is of trace class.

Theorem 2 For any connected topological group the right ring is semifinite.

The proof of these two theorems depends in a decisive fashion on ideas and methods developed by J. Dixmier during the last twenty years.

Theorem 3 Suppose, that G as in Th 1 and that it is simply connected. Then the global type of the right ring is I or II.

(L. Pukanszky, 28. 6. 72)

In der Transformationsgruppentheorie werden Sätze von dem folgenden Typ betrachtet: Ist G eine kompakte Gruppe, die auf einem (hinsichtlich eines gegebenen Koeffizientenringes R) azyklischen kompakten Raums X stetig operiert, so ist der Raum $\mathrm{Fix}(G,X)$ der Fixpunkte ebenfalls azyklisch. Diese Behauptung ist richtig für $G = \mathbb{Z}(p^n)$, $R = GF(p)$ [Smith], G zusammenhängend abelsch, $R = \mathbb{Q}$ [Borel, Conner], falsch für $G = A_5$, $X = \mathbb{C}^m$ für ein geeignetes m [Floyd und Richardson], $G = \mathbb{Z}(m)$, $m \neq p^n$, $R = \mathbb{Z}$ [Conner und Floyd].

Nun sei X ein kompaktes zusammenhängendes Monoid mit $0 \neq 1$, und G operiere auf X als eine Automorphismengruppe. Empirisch gut abgesichert ist die folgende Fixpunktvermutung: $\mathrm{Fix}(G,X)$ ist zusammenhängend ($\Leftrightarrow$ azyklisch für ein (alle) R, denn $\mathrm{Fix}(G,X)$ ist ein Monoid mit Null). Die Fixpunktvermutung ist richtig für alle auflösbaren G, deren Faktoren keine p adischen Untergruppen enthalten (also z.B. für $\mathbb{Z}(m)$: s.o.!). Es wurde der folgende, von Mislove und dem Vortragenden bewiesene Satz diskutiert: Ist die Menge der Hauptideale von X bezüglich $\subseteq$ vollständig geordnet und sind $0,1$ die einzigen Idempotenten von X, so gilt die Fixpunktvermutung für G = Gruppe der Einheiten mit der Operation durch innere Automorphismen. Dazu wurde der folgende transformationsgruppentheoretische Satz aufgestellt: Ist X ein topologischer Raum auf dem die kompakte Gruppe G operiert, dann ist $x \in X$ ein Fixpunkt, wenn x in der Bogenkomponente eines Fixpunktes liegt und Gx ein Retrakt von X ist. Haupthilfsmittel ist der Satz: Ist G eine kompakte Gruppe, H eine abgeschlossene Untergruppe, so besteht die Homotopieklasse der Restklassenabbildung $G \to G/H$ aus lauter Surjektionen.

Karl Heinrich Hofmann 3. Juli 72.

Polynomiale Transformationen.

Im Zusammenhang mit der Widerlegung einer Vermutung von Narkiewicz (Coll. Math. 1963) betrachtete K.K. Kubota (J. of Number Theory 1972) folgende Eigenschaft (P^*) für einen Körper K: Für jede Teilmenge $E \subset K$ und je zwei Polynome $P, Q \in K[X]$ mit $\mathrm{gr}\, P > \mathrm{gr}\, Q$, $Q|_E$ injektiv

gilt: Ist $P(E) \supseteq Q(E)$, so ist E endlich.
Kubota bewies, daß jeder globale Körper (i. Sinne der Zahlentheorie) die Eigenschaft (P^*) hat.
Schärfer gilt: Jeder e.e. Körper erfüllt (P^*).

Franz Halter-Koch, 16.10.72

Die Algebra, die von den stetigen positiv definiten Funktionen auf einer lokal kompakten Gruppe G erzeugt wird, nennt man die Fourier-Stieltjes-Algebra $B(G)$. Ist G abelsch, dann ist diese Definition verträglich, nach dem Satz von Bochner, mit der bekannten Definition von $B(G)$ als die Fourier-Stieltjes-Transformierten von beschränkten Radonmaßen auf $\hat{G}$. Für eine beliebige lokal kompakte Gruppe G stimmt $B(G)$ überein mit der Menge der Darstellungskoeffizienten von stark stetigen unitären Darstellungen von G, und außerdem ist $B(G)$ gleich dem Dualraum der C^* Algebra $C^*(G)$.
Sei H eine abgeschlossene Untergruppe von G. Es wird das Problem untersucht, ob oder unter welchen Bedingungen die Einschränkungsabbildung von $B(G)$ in $B(H)$ surjektiv ist. Dies ist äquivalent zu der Frage, ob sich eine positiv definite Funktion auf H zu einer positiv definiten Funktion auf G fortsetzen läßt. Zu diesem Problem werden folgende Ergebnisse gezeigt.
Ist die Untergruppe H offen oder kompakt, dann ist die Einschränkungsabbildung ~~auf~~ H surjektiv. Ist H ein Normalteiler und jeder Automorphismus α_g von H, $g \in G$; $h \to g^{-1}hg$ ein innerer Automorphismus von H, dann ist die Einschränkungsabbildung surjektiv.
Ist H ein abelscher Normalteiler, der nicht im Zentrum von G enthalten ist, dann existiert ein Charakter χ auf H, der sich nicht positiv definit auf G fortsetzen läßt. Dieser Fall tritt bei allen zusammenhängenden nilpotenten Liegruppen auf

Volker Flory 23. 10. 72

A survey is given of problems concerning Ramanujan's function $\tau(n)$. The Ramanujan conjecture states that $|\tau(p)| \leq 2p^{11/2}$ for all primes p and this implies that $\tau(n) = O(n^{\frac{11}{2}+\varepsilon})$ for arbitrary $\varepsilon > 0$. The best known estimate, depending on A. Weil's estimate of Kloosterman sums, is that $\tau(n) = O(n^{6-\frac{1}{4}+\varepsilon})$. This together with the result that $\sum_{n \leq x} \tau^2(n) = \alpha x^{12} + O(x^{12-\frac{2}{5}})$ leads to the following estimates for the abscissa of convergence $\sigma(\cdots)$ of the Dirichlet series $f(s) = \sum \tau^2(n) n^{-s}$, $g(s) = \sum \tau(n) n^{-s}$ and $g^*(s) = \sum |\tau(n)| n^{-s}$:

$$\sigma(f) = 12, \quad 6 - \frac{1}{4} \leq \sigma(g) \leq 6 - \frac{1}{10}, \quad 6 + \frac{1}{4} \leq \sigma(g^*) \leq 6 + \frac{1}{2}$$

These also depend on estimates of W.B. Pennington which have recently been slightly improved by H. Joris. The functional equations satisfied by $f(s)$ and $g(s)$ are given and reference made to recent extensions of the former made by Shimura to cusp forms of half-odd dimension that are eigenforms for Hecke operators $T(p^2)$.

Further topics briefly discussed are congruences satisfied by $\tau(n)$ and the non-vanishing of $\tau(n)$, with the application of the latter to the non-identical-vanishing of Poincaré series. Finally, brief reference is made to the Sato–Tate conjecture on the distribution of θ_p, where $\cos\theta_p = \tau(p)/(2p^{11/2})$, and to elementary methods of proving the multiplicative properties of $\tau(n)$ by using the multiplicative properties of Kloosterman sums or the representation of $\tau(n)$ as a sum over Cayley integers of norm n.

R. A. Rankin 27 October 1972.

Über höheren H-funktionen.

Sei $F: \mathcal{A}_f \longrightarrow \mathcal{A}_f$ ein Kettenfunktor zwischen Ringen mit $\varepsilon: F \longrightarrow 1$ surjektiv. Sei $\Omega = \ker \varepsilon$. Dann gibt es eine kanonische Auflösung von 1 in [illegible] Eilenberg-Moore. In einer kommenden Arbeit mit O.E. Villamayor wird [illegible] definiert $H_1(A) = \mathrm{coker}\ GL(FA) : GL(FA) \longrightarrow GL(A)$ und $H_n(A) = H_1(\Omega^{n-1}A)$ und gezeigt dass es bei einer Faserung zwischen Ringen eine lange exakte Folge von H's bekommt. Speziell behandelt [illegible] die Fälle [illegible]

I F ist der freie Ringfunktor.

II $FA = A[t]$.

Im Falle I hat man $K_i = K_i$ von Gersten

[illegible] $K_2 \cong K_2$ [illegible] K_2 [illegible]
[illegible]
Im Falle II [illegible]
[illegible]
Im Falle III [illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible] I, [illegible] II.

6/11/1972 [illegible]

Rigid-analytische Gruppen

Unter einer rigid-analytischen Gruppe versteht man ein Gruppenobjekt in der Kategorie der rigid-analytischen Räume (im Sinne von Tate-Kiehl); es wurden für solche Gruppen einige Eigenschaften und Resultate erläutert.

Als Analoga zu den affin-algebraischen Gruppen hat man im rigid-analytischen Fall die affinoiden Gruppen, welche in ihren Eigenschaften ihren algebraischen Vorbildern sehr stark ähneln, jedenfalls soweit es sich um allgemeine Eigenschaften handelt. Ist insbesondere G affinoid, $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe, so läßt sich G/H als rigid-analytischer Raum definieren, G/H ist sogar affinoide Gruppe, wenn H Normalteiler in G ist.

Ein wesentliches Hilfsmittel beim Studium affinoider Gruppen ist der Funktor $G \mapsto \tilde{G}$, welcher einer affinoiden Gruppe G eine affin-algebraische ~~G~~ Gruppe $\tilde{G}$ über dem Restklassenkörper $\tilde{k}$ von k

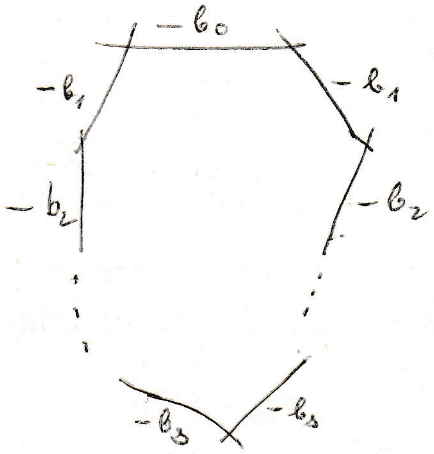
zuordnet, man hat eine kanonische Projektion $G \to \tilde{G}$.
(Allgemeiner läßt sich der Funktor $G \mapsto \tilde{G}$ für alle diejenigen rigid-analytischen Gruppen erklären, welche zu einem formellen Gruppenschema assoziiert sind.) Dieser Funktor gestattet es oftmals, aus der Struktur von $\tilde{G}$ auf die Struktur von G zu schließen, man weiß z.B., daß sich in $\tilde{G}$ enthaltene Torusanteile stets zu affinoiden Torusanteilen von G liften lassen.
Letzteres Resultat ist wichtig für die Untersuchung geschlossener rigid-analytischer Gruppen. Man nennt diese Gruppen auch abeloide Mannigfaltigkeiten, da sie die rigid-analytischen Analoga zu den abelschen Mannigfaltigkeiten darstellen. Jede abelsche Mannigfaltigkeit gibt vermöge des GAGA-Funktors Anlaß zu einer abeloiden Mannigfaltigkeit, und im 1-dimensionalen Fall ist sogar jede abeloide Mannigfaltigkeit abelsch, also eine elliptische Kurve. Man hat folgende analytische Beschreibung für elliptische Kurven G:

$\lvert j(G) \rvert \leq 1$	$\Rightarrow$	G hat gute Reduktion, d.h. man kann $\tilde{G}$ erklären, und $\tilde{G}$ ist elliptische Kurve
$\lvert j(G) \rvert > 1$	$\Rightarrow$	G besitzt den 1-dimensionalen affinen Torus G_m als universelle Überlagerung, es gilt $G \cong G_m / \Gamma$, wobei Γ eine von einem Element erzeugte "diskrete" Untergruppe von G_m ist.

S. Bosch 13. 11. 72

Die Hilbertsche Modulgruppe und die zugehörigen algebraischen Flächen.

Die Standardspitze der Hilbertschen Modulgruppe G von $k = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$, p prim $\equiv 1 \bmod 4$, hat folgende Auflösung



,

wo

$$W = \frac{\{\sqrt{p}\} + \sqrt{p}}{2} = b_0 - \frac{1}{b_1 - \cdots - \frac{1}{b_s - \frac{1}{b_s - \cdots - \frac{1}{b_1 - \cdots}}}}$$

primitive Periode

$\{\sqrt{p}\} \underset{\mathrm{Def}}{=}$ kleinste ungerade Zahl $> \sqrt{p}$

Jeder Strich repräsentiert eine rationale Kurve S_j der Selbstschnitt $-b_j$.
Definiert man induktiv A_k durch $A_{-1} = w$, $A_0 = 1$

$$b_k A_k = A_{k-1} + A_{k+1}$$

für $k \in \mathbb{Z}$, wobei

$$\begin{aligned} & b_0, b_1, \ldots, b_s, b_s, b_{s-1}, \ldots, b_1, b_0, b_1, b_2, \\ = \; & b_0, b_1 \quad\; b_s, b_{s+1}, b_{s+2}, \ldots, b_{2s-1}, b_{2s}, b_{2s+1}, b_{2s+2}, \end{aligned}$$

gesetzt wird, dann schneidet

$$\Gamma_j \left\{ \begin{aligned} z_1 &= A_j t \\ z_2 &= A_j' t \end{aligned} \right.$$

die Kurve S_j transversal

Aus dem Verhalten der Kurven Γ_j werden Rationalitätbeweise für die Hilbertsche Modulfläche gewonnen

$(H \times H)/G$ hat einen rat. Funktionenkörper $\Longleftrightarrow$ $p = 5, 13, 17$

$(H \times H)/G$ / Vertauschung der Faktoren von $H \times H$ hat rat. Funktionenkörper $\Longleftrightarrow$

$p = 5, 13, 17, \ldots < 193$, $p = 197, 229, 269, 293, 317$

20.11.72

F Hirzebruch

Existenz bester Tests

Mit Methoden der Funktionalanalysis wurde der folgende Satz bewiesen:
Es sei $\mathfrak{P}|\mathcal{A}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen und $Q|\mathcal{A}$ ein einzelnes Wahrscheinlichkeitsmaß.
Für jedes $\alpha \in [0,1]$ existiert ein bester Test zum Niveau α für die Hypothese $\mathfrak{P}|\mathcal{A}$ gegen die Alternative $Q|\mathcal{A}$.
Die folgende Verallgemeinerung dieses Satzes wurde angegeben:
Es seien $\mathfrak{P}|\mathcal{A}$ und $\mathfrak{Q}|\mathcal{A}$ zwei Familien von Wahrscheinlichkeitsmaßen von denen wenigstens eine dominiert ist.

a) Für jedes $\alpha \in [0,1]$ existiert ein Maximintest zum Niveau α für $\mathfrak{P}|\mathcal{A}$ gegen $\mathfrak{Q}|\mathcal{A}$.
b) Für jedes $\alpha \in [0,1]$ existiert ein Test zum Niveau α mit minimaximalem Schärfeverlust für $\mathfrak{P}|\mathcal{A}$ gegen $\mathfrak{Q}|\mathcal{A}$.

L. Rogge 6.12.1972

5ta

Das Differenzenverfahren bei Randwertaufgaben singulärer gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Es werden Randwertaufgaben der Art

$$\ell(y) = y'' + \frac{p_1(x)}{x} y' + \frac{p_2(x)}{x^2} y = f \ , \quad o<x<1$$

$$f, \ p_k \ \varepsilon \ C^2 \ [0,1] \ , \quad p_k = p_{ko} + O(x^\alpha) \ , \quad \alpha>o, \ k=1,2$$

$$\lim_{x\to o} [y, x^{1-\rho_2}] = 0 \ , \quad y(1) = 0.$$

Dabei bedeutet $[\ ,\ ]$ den Lagrange-Ausdruck von ℓ und ρ_1, ρ_2 sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung $\rho(\rho-1)+p_{1o}\ \rho + p_{2o} = 0$; Wir setzen ρ_1, ρ_2 reell und $\rho_1 > \rho_2$ voraus. Randwertaufgaben dieser Art treten in Physik und Technik sehr häufig auf.

Zur numerischen Lösung wird ein möglichst einfaches Differenzenverfahren verwendet: Sei $n \ \varepsilon \ N$, $h = 1/n$, $x_i = ih$, $i = o,1,\dots,n$. Sei $r \ \varepsilon \ N$, $1 \leq r < n$. Die Differenzen-Approximationen y_i für $y(x_i)$ ergeben sich dann aus dem Gleichungssystem

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2} + \frac{p_1(x_i)}{x_i} \frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h} + \frac{p_2(x_i)}{x_i^{\ 2}} y_i = f(x_i), \quad i=r,\dots,n-1$$

$$\frac{y_{r+1}-y_{r-1}}{2h} x_r^{\ 1-\rho_2} - y_r \{(1-\rho_2) - p_1(x_r)\} x_r^{\ -\rho_2} = 0, \quad y_n = 0 \ .$$

Über die Konvergenz dieses Verfahrens kann man beweisen:
Das kontinuierliche Randwertproblem habe nicht den Eigenwert 0. Dann sind die diskreten Probleme für hinreichend große r und hinreichend kleine h lösbar, und es gilt

$$|(y_i - y(x_i)| \leq C(1+x_i^{\ \rho_2}) h^{\mathrm{Min}\ (2, \rho_1-\rho_2, 2-\rho_2)} \ \ell n \frac{1}{h}$$

$$i=r,\dots,n-1, \quad C \text{ unabhängig von } r,h.$$

Für ganzzahliges ρ_1 läßt sich dieses Resultat noch verschärfen.

27. 11. 1972 (F. Natterer)

Werte von Zetafunktionen quadratischer Zahlkörper

Sei K ein total-reeller Zahlkörper, $\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}$ ($\mathfrak{a}$ = Ideal von $\mathcal{O}$ = Ring der ganze Zahlen) die zugehörige Zetafunktion ($\mathrm{Re}\, s > 1$). $\zeta_K(s)$ kann auf $\mathbb{C}$ als meromorphe Funktion fortgesetzt werden; dann ist $\zeta_K(-2m) = 0$ und $\zeta_K(1-2m) \in \mathbb{Q}$ ($m \in \mathbb{Z}, m > 0$). Für $\zeta_K(1-2m)$ hat Siegel eine Formel gegeben [Nachr. Akad. Wiss. Göttingen 1969], aus der es folgt, daß $c_h \cdot \zeta_K(1-2m) \in \mathbb{Z}$, wobei c_h eine nur von $h = 2m \cdot [n : \mathbb{Q}]$ abhängige Zahl ist. In diese Formel gehen Potenzsummen $\sigma_r(\mathfrak{a}) = \sum_{\mathfrak{t} | \mathfrak{a}} N(\mathfrak{t})^r$ ($\mathfrak{a}$ = Ideal von $\mathcal{O}$, $r \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{t}$ durchläuft die Idealteiler von $\mathfrak{a}$) hinein.

Für $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ ~~ein~~ ein quadratischer Körper, kann man $\sigma_r(\mathfrak{a})$ explizit angeben, und die Siegelsche Formel dadurch auf elementarer Gestalt schreiben. Zum Beispiel sind

$$\zeta_K(-1) = \frac{1}{60} e_1(D), \quad \zeta_K(-3) = \frac{1}{120} e_3(D), \quad \zeta_K(-5) = \frac{1}{49140}\left[e_5(4D) + (32\chi(2) - 24)\, e_5(D)\right]$$

wobei D die Diskriminante und $\chi(m) = \left(\frac{D}{m}\right)$ der zugehörigen Charakter sind (mit $\zeta_K(s) = \zeta_{\mathbb{Q}}(s) \cdot L(s, \chi)$). Hier ist $e_r(n) = \sum_{|b| < \sqrt{n},\ b^2 \equiv n \,(\mathrm{mod}\, 4)} \sigma_r\left(\frac{n-b^2}{4}\right)$.

Um z.B. die Formel $\zeta_K(-3) = \frac{1}{120} e_3(D)$ auf elementarer Weise zu beweisen, kann man jetzt die „Kreismethode" von Hardy-Ramanujan anwenden. Die erzeugende Funktion $\sum_{n=1}^{\infty} e_3(n) x^n$ ist gleich $\Theta(z) \cdot G_4(2z)$, wo $\Theta(z) = \sum_{b=-\infty}^{\infty} e^{\pi i b^2 z}$ eine Θ-Funktion und $G_4(2z) = \sum_n \sigma_3(n) e^{4\pi i n z}$ eine Eisensteinsche Reihe ist (hier ist $x = e^{\pi i z}$, $|x| < 1$). Wenn man dann

$$e_3(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|x| = r < 1} \frac{\sum e_3(m) x^m}{x^{n+1}}\, dx = \frac{1}{2} \int_{i\varepsilon}^{2+i\varepsilon} \Theta(z) G_4(2z)\, dz$$

ausrechnen will, findet man einen Beitrag von jedem rationalen Punkt $\lambda \in \mathbb{Q}$ (nämlich $\frac{1}{2} \int_{z \approx \lambda + i\varepsilon} \Theta(z) G_4(2z)\, dz$), da $\Theta(z) G_4(2z)$ nach ∞ strebt für $z \to \lambda$. Diesen Beitrag kann man ausrechnen, und die Summe von den Beiträge von $\lambda \in \mathbb{Q}$, $0 < \lambda \leq 2$, liefert dann eine Reihe die (nach etwas Rechnen) auf eine L-Reihe zurückgeführt werden kann. Man findet

$$e_3(n) = \begin{cases} 0 & n \equiv 2, 3 \pmod 4 \\ \frac{360 D^{7/2}}{\pi^4} L(4, \chi) \sum_{d | m} \chi(d) \mu(d) d^3 \times \sigma_7\left(\frac{m}{d}\right) & n \equiv 0, 1 \pmod 4 \\ & (n = m^2 D \text{ mit } D \text{ eine Diskriminante}) \end{cases};$$

also insbesondere $e_3(D) = \frac{360 D^{7/2}}{\pi^4} L(4, \chi) = 120\, \zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{D})}(-3)$, in Übereinstimmung mit der Siegelschen Formel.

Don Zagier

11. 12. 72

54c

Dynamische Optimierung unter Stetigkeits- und Kompaktheitsvoraussetzungen

In der Theorie der dynamischen Optimierung befaßt man sich mit stoch. Prozessen, deren Verlauf durch ein Tupel $(s_1, a_1, \dots, s_t, a_t, \dots) \in H_\infty :=$ $:= S \times A \times S \times A \times \dots$ beschrieben werden kann, wobei $s_t \in S$ als Zustand eines Systems zur Zeit t und $a_t \in A$ als eine Aktion interpretiert werden kann, die zur Zeit t ergriffen wird. Durch die vorgegebene Startverteilung und das vorgegebene sogenannte Bewegungsgesetz sowie durch die Wahl eines Plans (einer Strategie) π wird ein W-Maß P_π auf H_∞ definiert, das die stochastische Entwicklung des Prozesses beschreibt. Bei der Wahl eines Plans π wird man sich an den Kostenfunktionen v_t orientieren, die jeweils die Kosten im Intervall $[t, t+1)$ angeben, und zwar wird ein Plan π^* als optimal angesehen, wenn er die mittleren Gesamtkosten $\sum_1^\infty \int v_t \, dP_\pi$ minimiert. Das Ziel des Vortrages war es, Voraussetzungen an das Bewegungsgesetz, den Aktionenraum A und die Kostenfunktionen v_t anzugeben für

(1) die Existenz eines optimalen Plans

(2) die Konvergenz von $\inf_\pi \sum_1^n \int v_t \, dP_\pi$ gegen $\inf_\pi \sum_1^\infty \int v_t \, dP_\pi$ für $n \to \infty$.

Zunächst wurde gezeigt, daß (1) und (2) gesichert sind, wenn eine Topologie auf $W(H_\infty)$, dem Raum aller W-Maße auf H_∞, gefunden werden kann, so daß gilt:

(α) $\Pi = \{P \in W(H_\infty) ; P = P_\pi$ für einen Plan $\pi\}$ ist kompakt in $W(H_\infty)$,

(β) $P \to \int v_t \, dP$ ist nach unten halbstetig auf Π.

Darauf wurden Stetigkeits- und Kompaktheitsbedingungen angegeben, so daß (α) und (β) für die schwache Topologie bzw. für die sogenannte ws^∞-Topologie auf $W(H_\infty)$ gilt.

Bielefeld, den 11. Dez. 1972 Manfred Schäl