Über holomorphe Korrespondenzen

Korrespondenzen, d.h. mengenwertige Abbildungen, treten in der Funktionentheorie in natürlicher Weise auf. Beispiele "holomorpher" Korrespondenzen, die nicht Abbildungen im üblichen Sinne sind: 1) Mehrdeutige Funktionen, die durch analytische Fortsetzung eindeutiger holomorpher Funktionen entstehen; 2) Meromorphe Funktionen von mehr als einer Variablen mit Unbestimmtheitsstellen. – Es wird über einige Aspekte einer allgemeinen Theorie holomorpher Korrespondenzen berichtet. Eine solche Theorie scheint vor allem zum Studium von Fortsetzungseigenschaften holomorpher Abbildungen nützlich zu sein; dies wird am Beispiel des 2. Riemannschen Hebbarkeitssatzes und seiner Verallgemeinerungen illustriert.

Karl Stein
18. 12. 1972.

Untergruppen formeller Gruppen von endlichem Index

Der Vortrag befaßt sich mit der Verallgemeinerung von Sätzen aus der Darstellungstheorie endlicher Gruppen auf formelle Gruppen (gemeinsame Arbeit mit H.-J. Schneider, München, erscheint in J. Alg. (1975??) und Man. Math. 1973). Seien k ein Körper, G eine formelle k-Gruppe, (d.h. ein endliche Limites erhaltender gruppenwertiger Funktor auf den endlich dimensionalen k-Algebren) und $G' \subset G$ eine (formelle) Untergruppe von G. Seien H bzw. H' die G bzw. G' assoziierten Hopf-

Über konvergente Zerlegungen bei nichtlinearen Abbildungen

Zu lösen sei die Gleichung $F(x)=w$, wobei $F: B \to B$ (Banachraum). $\hat{F}: B\times B \to B$ sei eine Zerlegung von F. Dann kann man das Iterationsverfahren $\hat{F}(x^{k+1}, x^k) = w$, $k=0,1,2,\ldots$, $x^0 \in B$, zur Auflösung von $F(x)=w$ betrachten. Es wird der von Varga („Matrix Iterative Analysis") eingeführte Begriff der regulären Zerlegung auf nichtlineare Abbildungen verallgemeinert und damit das entsprechende Resultat wie bei linearen Gleichungssystemen bewiesen:

$K \subset B$ sei regulärer und Rieszscher Kegel, $\hat{F}$ reguläre Zerlegung von F, $F(x)=w$)

(F invers isoton, surjektiv $\Rightarrow$ $\hat{F}(x^{k+1}, x^k) = w$, $\lim_{k\to\infty} x^k = x^*$, $F(x^*)=w$, F injektiv)

G. Maeß
20.12.1972

(Beginn vorige Seite, Untergruppen .....)

algebren. Die Abbildung $H=H(G) \longmapsto G=G(H)$ ist eine Äquivalenz von Kategorien: für eine endlich dimensionale k-Algebra B ist

$$G(B) = \{X \in B\otimes H : \Delta_B(X) = X\otimes X,\ \varepsilon_B(X)=1\}$$

Δ und ε sind dabei die Diagonalabbildung bzw. Augmentation von H.

Sei $H/\!/H' = H/HH'^{+}$, $H'^{+} = \mathrm{Ke}(\varepsilon : H' \longrightarrow k)$, die dem homogenen Raum G/G' assoziierte Coalgebra; $B = (H/\!/H')^*$ ist eine augmentierte linear kompakte k-Algebra. Der Index $[G:G']$ von G' in G ist die Vektorraumdimension von $H/\!/H'$. Die Gruppe G heißt konstant, falls $H \cong k[G(k)]$ gilt, und separabel, falls die erweiterte Gruppe $\bar{k}\otimes G$ (mit $H(\bar{k}\otimes G) \cong \bar{k}\otimes H(G)$) konstant ist. G heißt infinitesimal, falls die Algebra (linear kompakt) H^* ein lokaler Ring ist. Ist k perfekt, so ist G semidirektes Produkt $G_{sep}\cdot G_0$ seines separablen bzw. infinitesimalen Anteils G_{sep} bzw. G_0.

Aus dem Satz von Cartier über die Struktur der affinen Algebren homogener Räume infinitesimaler formeller Gruppen über perfekten Körpern folgt

<u>Satz 1</u>: Ist $[G:G'] < \infty$, so ist der Unterraum

$$B^B := \{ \bar{f} \in B = (H/\!/H')^* ; \forall b \in B : b\bar{f} = \varepsilon(b)\bar{f} \}$$

von B der <u>Integrale</u> von B eindimensional ||

Sei $\bar{f} : H/\!/H' \longrightarrow k$ ein von Null verschiedenes Integral.

<u>Satz 2</u>: Die Abb. $\bar{f}$ ist "semilinear, d.h. es existiert ein k-Algebrahomomorphismus $\bar{\sigma} : H' \longrightarrow k$ mit $\bar{f}(x'z) = \bar{\sigma}(x')\bar{f}(z)$, $x' \in H'$, $z \in H/\!/H'$. ||

Für $x \in H$ sei $\Delta(x) = \sum x_1 \otimes x_2 \in H \otimes H$. Man definiert

$$f : H \longrightarrow H' : x \longmapsto \sum x_1 \bar{f}(\bar{x_2})$$

$$b : H' \longrightarrow H' : x' \longmapsto \sum x'_1 \bar{b}(x'_2)$$

<u>Satz 3</u>: Ist $[G:G'] = [H/\!/H' : k] < \infty$, so ist $H' \subset H$ eine projektive Frobeniuserweiterung zweiter Art im Sinne von Nakayama-Tzuzuku, d.h. es gilt mit den obigen Bezeichnungen genauer:

1) H ist endlich erzeugt und projektiv als H'-(Rechts- oder Links-)Modul.
2) b ist ein k-Algebraautomorphismus von H'
3) f ist rechts H'-linear und links b-semilinear d.h. ~~die Abbildung $H \to Hom(H_{H'}, H'_{H'}) : x \to$~~ $f(x'x) = b(x')f(x)$ für $x' \in H'$, $x \in H$.
4) Die Abbildung $H \longrightarrow Hom(H_{H'}, H'_{H'}) : x \longmapsto fx$ ist bijektiv. ||

Der Beweis von Satz 3 beruht auf Satz 1, Satz 2 und den folgenden Sätzen von eigenständigem Interesse.

<u>Satz 4</u>: Sei $G' < G$ eine Untergruppe von nicht notwendig endlichem Index. Dann existiert ein links $H/\!/H'$-colinearer, rechts H'-linearer unitärer augmentierter Isomorphismus $H \cong H/\!/H' \otimes H'$, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1) G/G' ist infinitesimal, d.h. $(H/\!/H')^*$ ist lokal.
2) k ist algebraisch abgeschlossen oder, allgemeiner, G_{sep} ist konstant.
3) k ist perfekt und G' ist infinitesimal.
4) (D. Voigt) Für alle endlichen Körpererweiterungen $k < l$ ist $G(l) \longrightarrow (G/G')(l)$ surjektiv. !!
5) G ist endlich, d.h. $[H : k] < \infty$

<u>Vermutung</u>: 1) Die Aussage von Satz 4 gilt, falls $[G : G'] < \infty$. 2) Die Aussage gilt i. a. nicht für ~~wenn~~ kommutative, separable formelle Gruppen oder dual für affine (oder sogar affine algebraische) multiplikative ~~Gruppen~~.

<u>Satz 5</u>: Sei $G' < G$ eine Untergruppe von endlichem Index. Ist

1) G separabel oder 2) die Charakteristik $ch(k) = 0$ oder 3) $ch(k) = p > 0$ und a) G_{sep} endlich und b) der infinitesimale Teil G_0 von G von endlicher Höhe, d.h. für jedes a aus dem Jacobsonradikal von $H(G_0)^*$ gilt $a^{p^n} = 0$ mit festem $n \geq 0$,

so enthält G' einen Normalteiler von G von endlichem Index. Sind in 3) a) oder b) (D. Voigt) nicht erfüllt, so ist die Aussage des Satzes i. a. falsch. ||

d. 8. Januar 1973 Ulrich Oberst

„Über einige iterative Methoden zur Operatorinvertierung"

Es soll der Inverse A^{-1} eines lin. und beschränkten Operators in einem reellen Banach-Raum $B \neq \{0\}$ iterativ angenähert werden. Dazu erweitert man die Operationen $+$ und $\cdot$ zu geeigneten Verknüpfungen

$$\oplus : L(B) \times I(L(B)) \ni (S,T) \to S \oplus T \in I(L(B)),$$

$$\otimes : I(L(B)) \times L(B) \ni (T,S) \to T \otimes S \in I(L(B)).$$

Dabei bedeutet $I(L(B))$ den Raum der Intervalle über $L(B)$. Für einen geordneten Raum $L(B)$ mit normalem bzw. regulärem Kegel K lassen sich iterative Verfahren angeben, die Folgen von Intervallen $\mathcal{X}^0, \mathcal{X}^1, \mathcal{X}^2, \dots$ berechnen. Unter entsprechenden Bedingungen an $\mathcal{X}^0$ läßt sich

$$A^{-1} \in \mathcal{X}^n, \; n \geq 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \mathcal{X}^n = A^{-1}$$

beweisen. Diese Verfahren können als "Verallgemeinerungen des SCHULZ'schen Verfahrens zur Matrizeninvertierung angesehen werden. Im $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ gehen sie in Verfahren zur iterativen Einschließung von Inversen von Matrizen über. Wird der ganzzahlige Parameter $k = 3$ gewählt dann erhält man ein bezüglich des Rechenaufwands optimales Verfahren.

Jürgen Herzberger
15. 1. 1973

22. Januar 1973: E. Brieskorn, Göttingen
„Die Monodromie von isolierten Singularitäten von vollständigen Durchschnitten."

29.1.1973 **Bemerkungen zum Satz von Korovkin**

Es wird – ausgelöst durch den klassischen Satz von Korovkin – folgende Fragestellung untersucht: Gegeben ein lokalkompakter Raum X und $\mathcal{H}$ ein adaptierter Unterraum von $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ im Sinne von Choquet. $\mathcal{H}_0$ sei die Menge der stetigen Funktionen f mit $|f| \le h$ für ein $h \in \mathcal{H}$. Von $f \in \mathcal{H}_0$ wird gesagt, daß es die Korovkin-Eigenschaft besitzt, wenn für jedes Netz $(L_i)_{i \in I}$ positiver linearer Abbildungen $L_i : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}$ mit $\lim L_i h = h$ im Sinne der lokal-gleichmäßigen Konvergenz für alle $h \in \mathcal{H}$ gilt: $(L_i f)$ konvergiert ebenfalls lokal-gleichmäßig gegen f. Es wird gezeigt, daß die Menge dieser Funktionen mit dem Raum $\hat{\mathcal{H}}$ der $\mathcal{H}$-affinen Funktionen zusammenfällt. Dabei heißt $f \in \mathcal{H}_0$ $\mathcal{H}$-affin, wenn

$$\sup\{g \in \mathcal{H} : g \le f\} = \inf\{h \in \mathcal{H} : h \ge f\}.$$

Es gilt $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_0$ genau dann, wenn X mit dem Choquet-Rand $\partial_{\mathcal{H}} X$ zusammenfällt.

H. Bauer

5.2.1973 **Normkonvergenz von Fourierreihen in rearrangement invarianten Funktionenräumen.**

Ist S_n der Operator der $f \in L^1_{2\pi}$ die n-te Teilsumme seiner Fourierreihe zuordnet, d.h.

$$S_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2} t} \, dt ,$$

dann sind für die $L^p_{2\pi}$-Räume folgende Aussagen äquivalent: $\lim_{n\to\infty} \| S_n f - f \|_p = 0$ $f \in L^p_{2\pi}$; der Konjugiertenoperator H, gegeben durch

$$H f(x) = \text{P.V.} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \frac{\cos \frac{1}{2} t}{2 \sin t/2} \, dt .$$

ist stetig auf $L^p_{2\pi}$; der Raum $L^p_{2\pi}$ ist reflexiv ; der Raum

$L^p_{2\pi}$ ist uniform konvex. In diesem Vortrag werden die Fourierteilsummen für allgemeine r.i. Banach-Funktionenräume 2π-periodischer Funktionen untersucht und folgende Sätze angegeben

Satz: Besitzt der r.i. Banach-Funktionenraum X die Fatou-Eigenschaft (vergl. Luxemburg: Banach Function Spaces. ~~Delft~~ Assen 1955 dann sind folgende Aussagen äquivalent

(i) $\| S_n f - f \| \to 0$, $n \to \infty$ für alle $f \in X$

(ii) H ist stetig auf X und X besitzt eine absolut stetige Norm

(iii) Es gibt ein p mit $1 < p < 2$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$), so daß $L^{p'}_{2\pi} \subset X \subset L^{p}_{2\pi}$ und $L^{p'}_{2\pi}$ dicht in X ist.

Für Orliczräume X 2π-periodischer Funktionen gilt der

Satz: $\| S_n f - f \| \to 0$, $n \to \infty$, für alle $f \in X$ genau dann, wenn X reflexiv ist

Für die Lorentzräume $\Lambda(\varphi, p)$, $1 < p < \infty$, $\varphi(t) \neq 0$, $t \in (0, 2\pi$ gilt der

Satz: $\Lambda(\varphi, p)$ ist uniform konvex genau dann, wenn $\| S_n f - f \| \to 0$, $n \to \infty$ für all $f \in \Lambda(\varphi, p)$.

(5.2.73) H. Johnen

7.2.1973. Spezialisierung Hilbertscher Modulformen.

Hilbertsche Modulformen in 2 Variablen z_1, z_2 werden durch $z_i = \nu_i \xi$ spezialisiert, wobei ν_1, ν_2 ganze konjugierte Zahlen des zugrunde liegenden quadratischen Zahlkörpers sind. Es entstehen auf diese Weise Modulformen von doppeltem Gewicht der einzigen Variablen ξ bzgl. der Kongruenzuntergruppe $\Gamma_0(N(\nu))$. Es wird nun vorausgesetzt, dass die Norm $N(\nu)$ eine natürliche Primzahl sei, und gezeigt: alle Modulformen in ξ zu $\Gamma_0(n(\nu))$ von hinreichend grossem und von geradem Gewicht sind auf diese Weise aus Hilbertschen Modulformen erzeugbar (endlich viele Fälle, wo der Funktionenkörper zu $\Gamma_0(n(\nu))$ hyperelliptisch sein könnte, werden ausgeschlossen). – Beweisskizze: Darstellung aller Modulformen geraden Gewichts zu $\Gamma_0(n(\nu))$ als Polynome in Thetareihen. Diese erweisen sich als Spezialisierungen von "gewissen" Thetareihen in z_1, z_2, welche jedoch nur bzgl. einer Kongruenzuntergruppe

$$\tilde{\Gamma} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma,\ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & b\nu \\ c\nu' & d \end{pmatrix} \bmod q,\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n(\nu)) \right\}$$

invariant sind. Nachweis, dass die Bilder der Modulformen zu Γ und $\tilde{\Gamma}$ bei der Spezialisierung $z_i = \nu_i \xi$ "im wesentlichen" übereinstimmen, wobei homologische Methoden der Modultheorie verwandt werden.

M. Eichler.

Gruppenringe endlich erzeugter nilpotenter Gruppen über kommutativen Noetherschen Hilbert Ringen.

Bekanntlich ist der kommutative Ring R ein Hilbert-Ring, wenn jedes Primideal von R Durchschnitt von maximalen Idealen ist. Ein nicht notwendig kommutativer Ring ist (in Analogie hierzu) ein Hilbert Ring, wenn jedes Primideal Durchschnitt von maximalen Idealen M mit R/M artinsch ist. Im kommutativen Fall sind beide Definitionen identisch. Ein nicht notwendig kommutativer Ring R ist ein <u>Jacobson Ring</u>, wenn jedes Primideal von R Durchschnitt von primitiven Idealen ist. Hierbei ist bekanntlich Q ein primitives Ideal von R, wenn Q der Kern einer irreduziblen Darstellung von R ist.

<u>Satz 1</u>. Ist G eine endlich erzeugte nilpotente Gruppe und R ein Noetherscher Jacobson Ring, so ist der Gruppenring RG ein Noetherscher Jacobson Ring.

Der Beweis dieses Satzes begründet sich wesentlich auf

<u>Lemma 1</u>. Ist R ein Noetherscher Ring mit Automorphismus α, ist X eine Unbestimmte über R ~~und~~, und ist $S = R[X,\alpha]$ der Ring aller Polynome $f(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ mit Multiplikation $Xr = \alpha(r)X \quad \forall r \in R$, so gilt für jedes Primideal P von S entweder

1) $P = P \cap R + XS$ oder
2) $(P \cap R)S$ ist ein Primideal von S derart, daß entweder $P = (P \cap R)S$ oder P die Höhe Eins über $(P \cap R)S$ hat.

Weiter ist $P \cap R$ ein α-primes Ideal von R im Sinne der

<u>Definition</u>: Das Ideal X von R mit $X = X^\alpha$ ist <u>α-prim</u>, wenn aus ~~A~~ $A = A^\alpha$, $B = B^\alpha \underset{\text{Ideal}}{\trianglelefteq} R$ mit $AB \leq X$ stets $A \leq X$ oder $B \leq X$ folgt.

<u>Satz 2</u> Ist R ein kommutativer Noetherscher Hilbert Ring und G eine endlich erzeugte nilpotente Gruppe, so ist jeder einfache Faktorring des Gruppenringes RG eine zentral einfache Algebra.

Der Beweis dieses Satzes stützt sich im wesentlichen auf

<u>Lemma 2</u>. Sei R ein (rechts und links) Noetherscher Ring mit Automorphismus α derart, daß jedes Ideal von R und $T = R[X,\alpha]_{(X)}$ eine Menge von zentralisierenden Erzeugenden hat. Sei $M \neq 0$ ein Primideal von $S = R[X,\alpha]$ derart, daß $X \notin M$ und $M \cap R = 0$

Dann ist α^n ein innerer Automorphismus von R für ein $n \geq 1$.

Für jedes Primideal $P \neq 0$ von R ist die Bahn $\{P, \alpha(P), \alpha^2(P), \dots\}$ endlich.

Abschließend werden die primitiven Faktorringe eines Gruppenringes R einer endlich erzeugten nilpotenten Gruppe über einem kommutativen Noetherschen Hilbert-Ring erörtert.

Die Ergebnisse dieses Vortrags sind Gegenstand einer gemeinsamen Arbeit mit Herrn A. W. Goldie (Leeds).

(12. 2. 73) G. Michler (Tübingen)

Higman-Neumann-Neumann Extensions from a Logical Point of View.

In a celebrated paper the mathematicians named in the title showed that if U & V are subgroups of a group G, $U \cong V$, then G can be embedded in a group H with element t s.t. V is the transform of U by t. In the special case U is finitely generated and G is f.p. (finitely presented) it is the case that H is f.p. and has a "parameter identity" which explicitly characterizes those elements of G which are in the subgroup U.

Can one give such a construction if U is a finitely generated sub semi-group of G? In the early 1950's the author, in connection with his approach to the word problem, had frequent discussions on this question with Kurt Gödel — and this abstract formulation of the then missing step for the unsolvability of the word problem is to a great extent here.

The answer is "Yes". Indeed as is explained here at the end, such a construction is possible if and only if U is "recursively enumerable." (This is explained below.)

Here is the exact construction when U is a subgroup group. Let G have generators $g_1, g_2, \ldots g_N$ and relations $R_1, R_2, \ldots R_K$. Then without loss of generality suppose U is generated by $g_1, g_2, \ldots g_M$, $M \leq N$.

Then G_M^+, the desired embedding group has the generators:

$$g_1, g_2, \ldots g_N;$$

$$l_i, r_i, \quad i = 1, 2, \ldots M;$$

$$x, q, t, k$$

and the relations; — where $i, j = 1, 2, \ldots M$

$$R_1, R_2, \ldots R_K;$$

$$x g_j = g_j x^2,$$

$$r_i g_j = g_j x r_i x,$$

$$* \quad q g_j = l_j q r_j,$$

$$t l_i = l_i t$$

$$k r_i = r_i k, \quad k x = x k, \quad (q^{-1} t q) k = k (q^{-1} t q)$$

Theorem 1. Let Σ be a variable for words of G; Γ^+, for words which consist of positive powers of $g_1, g_2, \ldots g_M$; i.e., words on the symbols $g_1^{+1}, g_2^{+1}, \ldots g_M^{+1}$. Then for all Σ of G

$$(\exists \Gamma^+)\ \Sigma = \Gamma^+ \text{ in } G \iff [k, (\Sigma^{-1} q^{-1} t q \Sigma)] = 1 \text{ in } G_M^+.$$

The main tool of the proof is Britton's Lemma.

The generalization taking U to be only recursively enumerable is as follows.

Here we call a set S of elements of a group recursively enumerable if the set of words representing ~~representing~~ the elements is recursively enumerable.

Theorem 2. Let H be an arbitrary group & S an arbitrary subset of the elements of H. Then a necessary & sufficient condition that S is recursively enumerable is that H can be embedded in a group D obtained from H by adding a finite number of generators & relations such that D has a parameter identity exactly characterizing those elements of H which are in S.

The main trick is the replace* of the proof of Theorem 1 by a Turing Machine which semi-computes S.

Britton's Theorem A rather than his Lemma is needed.

April 9, 1973 (W. W. Boone)

Verwandtschaftsstrukturen bei Verzweigungsprozeß-Populationen

Ist $Z(t)$ die Gesamtgröße $Z_\xi(t)$, $\xi = 1, 2, \ldots$ die der n-ten Generation in einem Verzweigungsprozess, ~~ergibt~~ mit Lebensdauervert. G und mittlerer Nachkommenschaft $m>$ so gilt $\sum_{\xi=1}^{K_t(x)} Z_\xi(t)/Z(t) \longrightarrow \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t'^2}dt'$ falls $(K_t(x) - t/\bar{\mu})/\sqrt{\frac{\bar{\sigma}^2 t}{\bar{\mu}^3}} \to x$ wobei $\bar{\mu}$, $\bar{\sigma}^2$ zu $\bar{F}(t) = m\int_0^x e^{-\alpha x}dG(x)$ gehören. (M. L. Samuels, B. Kharlamov, A. Martin-Löf)

Hieraus folgt, daß asymptotisch die Generation G_t eines zufällig herausgegriffenen Objekts zur Zeit t $N(t/\bar{\mu},\ t\bar{\sigma}^2/\bar{\mu}^3)$ ist.

Der Satz wurde mit Hilfe der L_2-Konvergenz von $Z(t)e^{-\alpha t}$ gegen eine Zufallsvariable W bewiesen nach vorherigem Ausrechnen von $\sum^{K_t} EZ_\xi(t)/EZ(t) \longrightarrow \Phi(x)$.

Die Folgerung läßt sich auch mit folgender Methode beweisen: Man setzt $L_i = 1$ falls bei der i-ten Verzweigung das herausgegriffene Objekt (oder einer seiner Vorfahren) entsteht, $L_i = 0$ sonst. Dann ist $G_t = L_1 + \ldots + L_n$, wenn bis zur Zeit t $N_t = n$ Verzweigungen erfolgt sind. In bedingter Wahrscheinlichkeit gegeben N_t und alle Familiengrößen bis zur Zeit t sind die L_i unabhängig. Man wendet dann den zentralen Grenzwertsatz an und sieht, daß die Normierungskonstanten fast sicher asymptotisch gleich werden. Das entfernt die Bedingung von Familiengrößen. Schließlich benutzt man $N_t(m-1)e^{-\alpha t} \to W$ f.s., um auch die Bedingung $N_t = n$ loszuwerden.

Diese Methode läßt sich auch verwenden, um z.B. folgende Fragen zu beantworten:

(1) Verwandtschaftsgrad von 2 (oder mehr) zufälligen Objekten zur Zeit t

(2) Anzahl der Objekte, die vor der Zeit τ mit einem zufälligen Objekt einen gemeinsamen Vorfahren hatten

(3) Anzahl der Objekte, die n-Generationen zurück einen gemeinsamen Vorfahren hatten.

Für ähnliche Fragestellungen bei subkritischen und kritischen Prozessen ($m<1$, $m=$ gibt es Ansätze, die z. B. von einigen Diplomanden in Mainz näher untersucht werden.

16.4.73 Wolfgang Bühler

Growth of finitely generated groups

Let G be a group with a finite set S of generators. Let $l_S(g)$ denote the length of $g \in G$ as a word in S, and $\gamma_S(m)$ the number of g with $l_S(g) \leq m$. Then $e_S = \lim_{\to m} \gamma(m)^{1/m} \geq 1$ exists, and $\gamma_S(m) \geq e_S^m \ \forall m$; we say G has exponential growth if $e_S > 1$ (this is independent of S). Conjecture. If G does not have exponential growth it has a nilpotent subgroup of finite index. Theorem (Milnor-Wolf) The conjecture is true if G is solvable. // A theorem of Tits also implies the conjecture if $G \subset GL_n(F)$ for some field F. In case G is nilpotent with lower central series $G = G_1 > G_2 > \cdots$ let $r_h = \operatorname{rank}(G_h / G_{h+1})$ and put $d(G) = \sum_{h \geq 1} h \cdot r_h$. Then $\exists A, B > 0$ such that $A m^{d(G)} \leq \gamma_S(m) \leq B m^{d(G)} \ \forall m \geq 1$. Motivation for these questions comes from the following results of Milnor: Let M be a complete Riemannian manifold of dimension d. I. If the mean curvatures of M are ≥ 0 and $S \subset \pi_1(M)$ is finite $\exists A > 0$ such that $\gamma_S(m) \leq m^d \ \forall m \geq 1$. II If M is compact with sectional curvatures < 0 then $\pi_1(M)$ is finitely generated of exponential growth.

(3/5/73) Hyman Bass

Die Hochschild-Homologie vollständiger Durchschnitte

Sei $\tilde R$ eine Algebra von konvergenten Potenzreihen (oder strikt konvergenten) Potenzreihen, $R = \tilde R/\mathfrak{a}$ ein Restklassenring von $\tilde R$. Eine antikommutative bigraduierte Algebra $E(R)$ über R wird folgendermaßen definiert: Sei $\tilde\Omega$ die Algebra der alternierenden Differentialformen von $\tilde R$ über dem bewerteten Koeffizientenkörper K. $F^p\tilde\Omega^n := \mathfrak{a}^{p-n}\tilde\Omega^n$, $F^p\tilde\Omega$ $(p \in \mathbb{Z})$ ist ein Unterkomplex von $\tilde\Omega$, $F^p\tilde\Omega^n \supset F^{p+1}\tilde\Omega^n$ $(\mathfrak{a}^{-q} := \tilde R$ für $q \in \mathbb{N})$. Sei $E^{p,q}(R) := H^{p+q}(F^p\tilde\Omega / F^{p+1}\tilde\Omega)$. Satz. Die Charakteristik von K sei 0. Dann haben isomorphe K-Algebren $R = \tilde R/\mathfrak{a}$, $R' = \tilde R'/\mathfrak{a}'$ isomorphe Algebren $E(R)$, $E(R')$.

Sei nun $S := R \amalg R$ (direkte Summe oder analytisches Tensorprodukt) und $\Omega(R) := \mathrm{Tor}^S(R,R)$. Dann ist z.B. $\Omega(\tilde R) = \tilde\Omega$. $\Omega(R)$ heißt die Hochschild-Homologie von R. Wird $\mathfrak{a}$ von einer Primfolge erzeugt, d.h. ist R vollständiger Durchschnitt, so kann eine S-freie Auflösung von R durch eine differentielle graduierte Algebra explizit angegeben werden, die zeigt: $\Omega(R) \cong E(R)$, wenn $E(R)$ als einfach graduierte Algebra $\bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} E^m(R)$ aufgefaßt wird mit $E^m(R) := \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} E^{m+q,-q}(R)$.

7.5.73 Klaus Wolffhardt

Eigenwertprobleme in Schiefkörpern.

Sei A eine quadratische Matrix über einem Körper K und $\alpha \in K$. Wenn K kommutativ ist, sind folgende Aussagen äquivalent: a) Eine Zeile $u \neq 0$ existiert, derart dass $uA = \alpha u$, b) eine Spalte $v \neq 0$ existiert, derart dass $Av = v\alpha$, c) $A - \alpha$ ist singulär. Wenn K nicht kommutativ ist, sind diese Aussagen i. allg. nicht äquivalent und definieren linke, rechte bzw. singuläre Eigenwerte von A. Die linken und rechten Eigenwerte sind Ähnlichkeitsinvarianten und können wie im kommutativen benutzt werden um eine

Normalform von A zu erreichen. Genauer gesagt, lässt sich A auf eine Diagonalsumme von 2 Teilen transformieren, einen algebraischen und einen transzendenten Teil. Der algebraische Teil hat eine Normalform wie im kommutativen, der transzendente Teil verhält sich noch besser: über einem passenden Erweiterungskörper lässt er sich auf Skalarform (nicht nur Diagonalform) transformieren. Der Beweis gründet sich auf dem Konjugierungssatz für Schiefkörper (das Analogon der Higman-Neumann-Neumann Konstruktion, s. Seite 64) und einem Satz von Bergman über freie Produkte von ~~Schiefs~~ Ringen.

Die singulären Eigenwerte sind von Interesse für die Lösung allgemeiner Gleichungen über Schiefkörpern, aber bisher ist wenig über sie bekannt. Insbesondere wäre eine Bejahung folgender Vermutungen von Interesse:

<u>Verm. 1.</u> Jede Matrix hat einen Eigenwert (über einem passenden Erweiterungsschiefkörper).

<u>Verm. 2.</u> Eine Matrix über einem Körper E mit zentralem Unterkörper C der separabel in E abgeschlossen ist, hat einen von 0 verschiedenen Eigenwert ausser wenn sie über C triangularisierbar ist.

Einfache Beispiele zeigen dass die Bedingung über C jedenfalls notwendig ist.

14. 5. 1973

P. M. Cohn (London)

Construction of K-theories 16-5-73

The object of K-theorie is to find derived functors (at the moment to the left) to the functor K_0 defined by Grothendieck.

If E is a functor from rings to rings such that it is a cotriple (i.e., $\exists$ natural transformations $\varepsilon: E \to Id$, $\mu: E \to E^2$ with $E\varepsilon \circ \mu = \varepsilon E \circ \mu = id$) it gives two ways of defining higher K-theories. One is to take a "projective resolution" of a ring, i.e, the sequence $E\Omega^n R \to E\Omega^{n-1} R \to \dots \to E\Omega R \to ER \to R \to 0$, then apply the functor Gl ($= \varinjlim Gln$) and compute the homology. The second method is to consider the simplicial complex $E^n R \rightrightarrows E^{n-1} R \dots ER \to R$ with face operators $\varepsilon_i : E^n R \to E^{n-1} R$, $\varepsilon_i = E^i \varepsilon E^{n-i-1}$ and degeneracies $\mu_j : E^n R \to E^{n+1} R$, $\mu_j = E^j \mu E^{n-j-1}$, suppose it is asferical, and then, after applying Gl, compute the homotopy groups.

It is easy to see that, if E is a left exact functor, both theories coincide.

We will consider, in particular, the case in which ER is the free ring generated by the nonzero elements of R. In this case the theories are different.

By a kind of spectral sequence we obtain the obstructions for the theory to coincide and, in particular, the "chain complex" theory has disadvantages with respect to the "simplicial complex" theory. The first, for instance, is not a homotopy invariant.

O. E. Villamayor

Picard groups of algebraic groups

The object is to compute Picard groups of linear algebraic groups and to show how to perform geometric constructions on algebraic groups by considering their Picard groups.

Lets agree to work over a fixed algebraically closed field of any characteristic. The key is the following

<u>Thm</u> Let $E \to V$ be a Zariski-fibration with fiber F. If E, V, F are smooth varieties and F is <u>rational</u> then there exists an exact sequence

$$0 \to U'(V) \to U'(E) \to U'(F) \to Pic(V) \to Pic(E) \to Pic(F) \to 0$$

where $U'(X)$ denotes the multiplicative group of zero-free regular functions modulo constants.

In order to study isogenies of algebraic groups (linear) one deduces the following two companion thms

<u>A</u> Let $\pi : G' \to G$ be an isogeny with diagonalizable kernel. Then $0 \to X(G) \to X(G') \to X(\mathrm{Ker}\,\pi) \to Pic\, G \to Pic\, G' \to$ is exact.

<u>B</u> For a linear alg. group G there exists an isogeny with diagonalizable kernel $G' \to G$ with $Pic\, G' = 0$.

Restricting ourselves to character free groups, a combination of <u>A</u> and <u>B</u> yields universal covering spaces $\tilde{G} \to G$ and fundamental groups $\pi_1(G)$ subjected to

$$Pic\, G = X(\pi_1(G))$$

In order to compute $Pic\, G$ for a semi-simple group one chooses a Borel subgroup B of G and consider the fibration $G \to G/B$. The exact sequence of <u>Thm</u> yields

$$0 \to X(B) \to Pic(G/B) \to Pic\, G \to 0$$

The two first nontrivial groups in the sequence are finitely generated free and the map between them is given by the Cartan matrix for the root system of G.

28.5.1973

Birger Iversen

The hopfian problem for 3-manifold groups

A group G is hopfian if each epimorphism $G \to G$ is an isomorphism and is residually finite ($G \in R\mathcal{F}$) if for $1 \neq g \in G$ $\exists$ normal subgroup N of finite index in G with $g \notin N$. Finitely generated residually finite groups are hopfian.

There is a class $\mathcal{M}$ of compact 3-manifolds (including the irreducible, sufficiently large ones) such that if $M, M' \in \mathcal{M}$ and $f: (M, \partial M) \to (M', \partial M')$ induces an $\cong$ $f_*: \pi_1(M) \to \pi_1(M')$ then f is homotopic to a homeomorphism $M \to M'$. Since a degree one map $f: (M, \partial M) \to (M', \partial M')$ of oriented manifolds of the same dimension induces an epimorphism $f_*: \pi_1(M) \to \pi_1(M')$ we have: Theorem If $M, M' \in \mathcal{M}$ are orientable and one of $\pi_1(M), \pi_1(M')$ is hopfian and if $\exists$ degree one maps $f: (M, \partial M) \rightleftarrows (M', \partial M'): g$ then $M \approx M'$. Thus we have

Question If M is a compact 3-manifold is $\pi_1(M)$ hopfian? or, more generally, is $\pi_1(M) \in R\mathcal{F}$? For some partial answers:

Theorem (Hempel-Jaco) If M is a compact 3-manifold and if there is an exact sequence $1 \to N \to \pi_1(M) \to Q \to 1$ with $1 \neq N$ finitely generated and $|Q| = \infty$, then N is the fundamental group of a compact 2-manifold and if $N \neq \mathbb{Z}$ then Q is an extension of a finite group by either $\mathbb{Z}$ or $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$. The structure of M (up to connected sum with a homotopy 3-sphere) can be explicitely described and it follows that (assuming M is sufficiently large in the case $N = \mathbb{Z}$) that some finite sheeted cover, $\tilde{M}$, of M is either a surface bundle over S^1 or a Seifert fibered manifold. Since $\pi_1(\tilde{M})$ can be shown to be residually finite, it follows that $\pi_1(M) \in R\mathcal{F}$.

For M sufficiently large $\pi_1(M)$ can be built up, starting with free groups, by a sequence of amalgamated free products and HNN constructions corresponding to a reduction of M to a union of 3-cells by a sequence of cuts along incompressible surfaces. Such constructions do not, in general, preserve either hopficity or residual finiteness. However, in the 3-manifold case, the bonding subgroup(s) come from incompressible surface(s) in the boundary and are thus 'nicely placed'. It is hoped that this may save the situation. For some evidence. Theorem: If $G = A \ast_C B$, A, B, C finitely generated, then $G \in R\mathcal{F}$ provided G is C-separable in the sense that if $1 \neq g \in A \cup B$ then $\exists$ subgp. H of finite index in G with $g \notin H$ and either $g \in C$ or $g \notin H \cdot C$. Some examples are given of this situation to unions of handle bodies e.g. if M is the double of a handle body along an incompressable surface in its boundary, then $\pi_1(M) \in R\mathcal{F}$.

June 4, 1973 John Hempel

TENSOR PRODUCTS OF BANACH SPACES AND HARMONIC ANALYSIS.

A norm α defined on tensor products of all pairs of Banach spaces $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ is said to be reasonable (in the sense of Grothendieck) if $\lambda \leq \alpha \leq \gamma$, where λ and γ are the least and greatest cross-norms, and if $\alpha((S \otimes T)t) \leq \|S\| \|T\| \alpha(t)$. We consider the VAROPOULOS SPACES

$$V^\alpha(X,Y) = \mathcal{C}_0(X) \otimes_\alpha \mathcal{C}_0(Y), \quad \alpha \text{ reasonable},$$

with X, Y locally compact Hausdorff spaces. Important special cases $V^p(X,Y)$ arise when $\alpha = \alpha_p$ (defined as in Lapresté C.R. Acad Sci Paris 1972) Let G be a compact group and set $V^\alpha(G) = P(V^\alpha(G,G))$ and $V^p(G) = V^{\alpha_p}(G)$. By using important characterizations of these norms α_p we can obtain many results in L^p-multiplier theory: for example

THEOREM: (i) $V^p(G)$ is a pointwise Banach algebra;

(ii) $(V^p(G))^* = M^p(G) = \mathrm{Hom}_{L^1(G)}(L^p(G), L^p(G))$.

There are generalizations to locally compact abelian groups and to amenable groups. The fundamental idea is to use simple Banach spaces ($\mathcal{C}(X)$ for instance) and 'throw' the complications into the norm α used. This enables us to extend the Varopoulos theory (for the greatest cross norm γ) for the Fourier Algebra to more general Banach algebras.

June 18, 1973 John E. Gilbert

Some Properties of group rings

Let KG be the group ring of a group G over a commutative ring K with 1. Write $\Delta = \Delta_K(G) = \{ \Sigma a_g g \mid \Sigma a_g = 0 \}$. For γ, μ in a ring R write the Lie product $[\gamma, \mu] = \gamma\mu - \mu\gamma$. For subsets A, B of a K-algebra R denote $[A, B]$ = K-module generated by all $[a, b]$. By induction one defines $R^{[2]} = [R, R]$, $R^{[n]} = [R, R^{[n-1]}]$ and $D^{[2]}R = [R, R]$, $D^{[n]}R = [D^{[n-1]}R, D^{[n-1]}R]$. We say R is Lie nilpotent (Lie solvable) if $R^{[n]}$ ($D^{[n]}R$) $= 0$ for some n. For group rings one has the following

<u>Theorem</u>: Let $R = KG$ where K is a field of char. $p \geq 0$.

a) R is Lie nilpotent $\Leftrightarrow$ G is nilpotent and p-abelian.

b) For $p \neq 2$ R is Lie solvable $\Leftrightarrow$ G is p-abelian

c) For $p = 2$, R is Lie solvable $\Leftrightarrow$ G has a p-abelian subgroup of index $\leq$

(Here, for $p > 0$ a group G is said to be p-abelian if G' is a finite p-group and G is 0-abelian $\Leftrightarrow$ G is abelian)

It follows easily from this that

<u>Proposition</u> a) KG Lie nilpotent $\Rightarrow$ Unit group of KG is nilpotent.

b) KG Lie solvable $\Rightarrow$ Unit group of KG is solvable.

The converse of a) holds if G is finite. The converse of b) holds if G is finite and $\mathrm{ch}\, K \neq 2, 3$. In general the converse remains open.

Herstein has asked the question

Does $\gamma, \mu \in KG$, $\gamma\mu = 1 \Rightarrow \mu\gamma = 1$?

The answer is known to be "yes" if $\mathrm{ch}\, K = 0$, while if $\mathrm{ch}\, K = p > 0$, the question is open.

The following consideration gives a sufficient condition for a positive answer.

Let $\gamma\mu = 1$ then $e = 1 - \mu\gamma = e^2$ and so $e \in \bigcap_n \Delta^{(n)} = \Delta^{(\omega)}$

Here by $R^{(n)}$ we mean by induction $[R, R^{(n-1)}]_R$, namely, idealize the Lie series at each step. Also $e \in \bigcap_n (\Delta G' KG)^n = \left(\bigcap_n (\Delta G')^n\right) KG = (\Delta G')^{\omega} KG$.

Hence a sufficient condition can be read off from the next

Proposition. $\Delta^{\omega}G$ is nilpotent $\Leftrightarrow$ $D_{\omega}G = \{g \mid g-1 \in \Delta^{\omega}G\}$ is a finite p-group.

$\Delta^{(\omega)}G$ is nilpotent $\Leftrightarrow$ $D_{(\omega)}G = \{g \mid g-1 \in \Delta^{(\omega)}G\}$ is a finite p-group.

One may take these considerations one step further by defing

$$\Delta^{\omega^{n+1}} = \left(\Delta^{\omega^n}\right)^{\omega} \quad \text{and} \quad \Delta^{\omega^{\omega}} = \bigcap_n \Delta^{\omega^n} = \Delta^{\lambda} \text{ say}$$

Further $\Delta^{\lambda^{m+1}} = \left(\Delta^{\lambda^m}\right)^{\lambda}$. Then we have

Theorem. Let KG be the group ring of a finite group G and suppose $\bigcap_n p^n K = 0$ for all primes p ~~[illegible]~~ dividing $(G:1)$. Then

$$\Delta^{\lambda^c} = 0 \text{ for some } c \Leftrightarrow G \text{ is solvable.}$$

This has applications to existance of idempotent elements and ideals in KG.

June 20, 73 SKSehgal

The author and J. Shaneson have developed a program for the global study and classification of piecewise-linear (P.L.) embeddings in codimension 2. This codimension is the only one in which a P.L. embedding may be not locally-flat, e.g. may have singularities. The local behavior of these singularities is related to the theory of locally flat knots. Our earlier work on codimension 2 differentiable or PL locally flat embeddings described the role of knot theory as the "coeffcient theory" in general codimension 2 classification problems, with the knot cobordism group identified with a homology-surgery obstruction group. The results on PL embeddings with singularities use these earlier results. Here is an example of an application of our methods to transformation groups.

Theorem: Let $G = S^1$ or any finite cyclic group. Then for $n \neq 4, 6$ every free Pl G action on S^{n-2} equivariantly embeds into every free Pl G action on S^n.

This is far from being the case if the embeddings are required to be non-singular. Another application of our general P.l. embedding theory is:

Theorem: If M^n $n \geq 3$ is a closed oriented Pl manifold with $\pi_{n+1}(\Sigma M) \longrightarrow H_{n+1}(\Sigma M)$ surjective, then there is a P.l. embedding of M in R^{n+2}.

This can, for example be applied to the case M of the homotopy type of $S^{4p} \times S^q$. Choosing M to have appropriate Pontrjagin classes, the singularity set of any such embedding of M must be of dimension at least $4p$. Another application of our methods is given by:

Theorem: Let $M^n \xrightarrow{f} W^{n+2}$ be an embedding or Poincaré embedding of M in W, $n \geq 3$ odd, M and W oriented. Let $g : N \longrightarrow M$ be a homotopy equivalence of closed manifolds. Then fg is homotopic to a P.L. embedding.

Again, if N is chosen to have certain Pontrjagin classes, the embedding must be very singular. More generally, let $f : M^n \longrightarrow W^{n+2}$ be a map of compact P.l. manifolds with M closed, M and W oriented. Let ξ_f be the 2-plane bundle whose Euler class is the image of the Poincaré dual of $f_*[M]$ under $H^2(W, \partial W) \longrightarrow H^2(W) \xrightarrow{f^*} H^2(M)$ (possibly $\partial W = \emptyset$)

Theorem: If $g : M \to W$ is a Pl embedding homotopic to f, let $S(g)$ denote the set of non-locally flat points of g. Let $L(f) = L(M) - g^* L(W)\, L(\xi_f)$ where L denotes the Thom-Hirzebruch classes. Let $D : H^*(M, Q) \longrightarrow H_*(M, Q)$ denote Poincaré duality. Then $DL(f)$ is in the image of

$$H_*(S(g)) \longrightarrow H_*(M).$$

Thus, low dimensional L-classes give high dimensional singularities. June 1973 S. Cappell

Qasicomplemented Banach Algebras

The notion of complemented Banach algebras has been studied very extensively very recently by many authors. The notion arises from certain properties of Hilbert space. Let A be a Banach algebra and let L_r denote the set of all right closed ideals of A. Let q be a mapping of L_r into itself with (i) $M \cap M^q = \{0\}$, where $M \in L_r$ and $M^q = q(M)$, (ii), $M^{qq} = M$, (iii) $M_1 \supset M_2 \Rightarrow M_1^q \subset M_2^q$, $M_1, M_2 \in L_r$. Then q is called a right quasicomplementor on A and A with q is called a right quasicomplemented Banach algebra. If in addition q satisfies (iv) $M \oplus M^q = A$, $\forall M \in L_r$ then A with q is called a right complemented Banach algebra. One shows that every dual A^*-algebra is right quasicomplemented and a B^*-algebra is dual iff it is right quasicomplemented. The algebra of compact operators on a Hilbert space is (quasi) complemented. A structure for semisimple quasi complemented algebras A in which every max. mod. (right) ideal is closed and for each $x \in A$, $x \in \overline{xA}$, can be written as a direct sum of simple quasicomplemented algebras. As for the representation of primitive quasicomplemented Banach algebra A with the conditions imposed in the last sentence, one shows that A can be represented as an algebra of compact operators on a Hilbert space with Soc A mapped on the algebra of operators of finite ra

Taqdir Husain

A Tauber-Wiener theorem for Gauss and Poisson kernels on a Lie group.

Let G be a Lie group, LG the Lie algebra of G and $X_1, \dots, X_n$ a basis of LG. We define the laplacian L on G as an operator defined on C^∞ functions by the formula

$$L = X_1^2 + \dots + X_n^2 .$$

L is essentially self-adjoint on $L_2(G)$ and

$$e^{tL} f = p_t * f ,$$

where $p_t \in L_1(G)$, $p_t \geq 0$ and $\int p_t(x) \varphi(x) dx < C$ for all $t \leq s$ and every submultiplicative function φ on G. We call p_t the Gauss kernel. The main object of the study is the commutative Banach $*$-subalgebra A of $L_1(G)$ generated by p_t, $t > 0$.

<u>Theorem</u>. If G is of polynomial growth, then A has the Tauber-Wiener property. (i.e. for every ideal $I \neq A$ in A there is a proper regular ideal M in A such that $I \subset M$).

This theorem implies such a tauberian theorem for the Gauss kernels:

Let $f \in L_\infty(G)$, if for a $t > 0$ the limit

$$\lim_{x \to \infty} p_t * f(x)$$

exists and is equal to a, then for every function $g \in L_1(G)$ the limit

$$\lim_{x \to \infty} g * f$$

exists and is equal to $a \cdot \int g(x) dx$.

The Poisson kernel is defined along the same lines as in E. M. Stein, Topics in harmonic analysis...., it belongs to A and a similar theorem of tauberian type is proved for it.

Andrzej Hulanicki

Stabile Smith-Homologie

Wendet man die von Bröcker und Hook eingeführte Stabilisierung auf die Smith-Homologie an, so ergibt sich eine äquivariante Homologietheorie, $H_*^G(-)$, die stabile Smith-Homologie.

Für $G = \mathbb{Z}_2$ gelten nun:

1) Ist X ein $\mathbb{Z}_2$-Raum vom $\mathbb{Z}_2$-Homotopietyp einer $\mathbb{Z}_2$-Mannigfaltigkeit, so kann man $H^*_{\mathbb{Z}_2}(X)$, die zugehörige Kohomologietheorie definieren und man hat $H^*_{\mathbb{Z}_2}(X) = H^*(E\mathbb{Z}_2 \times_{\mathbb{Z}_2} X)$

2) Eine leicht zu definierende Abbildung $\mu : N_*^{\mathbb{Z}_2} X \longrightarrow H_*^{\mathbb{Z}_2} X$ induziert einen Isomorphismus $N_*^{\mathbb{Z}_2} X \otimes_{N_*^{\mathbb{Z}_2}} H_*^{\mathbb{Z}_2} \cong H_*^{\mathbb{Z}_2} X$

3) Man kann Abbildungen $\sigma : H_*^{\mathbb{Z}_2} \longrightarrow N_*^{\mathbb{Z}_2}$ erklären (z. B. Eulerklasse $\longmapsto$ Eulerklasse) die einen Isomorphismus $\varphi : H_*^{\mathbb{Z}_2} X \otimes_{H_*^{\mathbb{Z}_2}} N_*^{\mathbb{Z}_2} \cong N_*^{\mathbb{Z}_2} X$ induzieren. Dies ist i. a. aber nur ein Isomorphismus von N_*-Moduln. Die Frage, ob man σ so wählen kann, daß φ ein Isomorphismus von $N_*^{\mathbb{Z}_2}$-Moduln wird, führt auf das Problem ob $\log c$, der Logarithmus der zur formalen Gruppe von N^* gehört, im Bild von $\alpha : N^*_{\mathbb{Z}_2} \longrightarrow N^* B\mathbb{Z}_2$ liegt, wobei α durch $E\mathbb{Z}_2 \xrightarrow{pr} \text{Punkt}$ induziert wird. Dies konnte bisher noch nicht entschieden werden.

4) Aus 1 und 3 folgert man leicht: es gibt einen Isomorphismus von N_*-Moduln $N^*_{\mathbb{Z}_2} X \cong H^*(E\mathbb{Z}_2 \times_{\mathbb{Z}_2} X) \otimes_{H^*_{\mathbb{Z}_2}} N^*_{\mathbb{Z}_2}$.

4. 7. 73 P. Löffler

Some connections between Harmonic Analysis and the topology of manifolds.

If G is a locally compact unimodular topological group, and if Γ is a discrete subgroup of G such that $\Gamma\backslash G$ is compact, it is well-known that the right regular representation T of G on $L_2(\Gamma\backslash G)$ decomposes as a discrete direct sum of irreducible representations of G; Moreover if ω is any equivalence class of irreducible unitary representations of G, then the multiplicity of ω in the representation T is finite. Let $m_\Gamma(\omega)$ be this multiplicity. Then m_Γ is a function on $\hat{G}$, the socalled spectral function of Γ. It is remarkable that in some important cases, the function m_Γ has a bearing on the structure of Γ as well as on the topology of certain coset spaces of G. For example, if $G = SL(2,R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};\ a, b, c, d \in R,\ ad-bc=1 \right\}$, then if Γ, Γ' are two such groups and if $m_\Gamma = m_{\Gamma'}$, then Γ and Γ' are isomorphic. This is a theorem of Tanaka. More generally, if G is any semisimple Lie group, connected with finite centre, and if K is a maximal compact subgroup, then the spectral function m_Γ of a discrete uniform subgroup Γ of G determines several topological invariants of the manifold $\Gamma\backslash G/K$, (assuming Γ is torsion free). Indeed if Γ, Γ' are torsion-free discrete subgroups of G with $\Gamma\backslash G$, $\Gamma'\backslash G$ compact, and if $m_\Gamma = m_{\Gamma'}$, then one can show: $\chi(\Gamma\backslash G/K) = \chi(\Gamma'\backslash G/K)$, $\chi_y(\Gamma\backslash G/K) = \chi_y(\Gamma'\backslash G/K)$ where χ is the Euler characteristic, χ_y is Hirzebruch's χ_y-characteristic. Moreover, if V is any linear K-module and $\mathbb{V}$ the vectorbundle on G/K associated to the principal bundle $K \to G \to G/K$ by the K-module V, we have for each r, $\dim H^r(\Gamma, \mathbb{V}) = \dim H^r(\Gamma', \mathbb{V})$, where $H^r(\Gamma, \mathbb{V})$ are the

Cohomology groups of the sheaf of germs of Γ-invariant C^∞ ~~sections~~ of forms on G/K with coefficients in V.

R. Gangolli

August 10, 1973.

Phasenübergänge in Markoffschen Feldern.

Sei $(\Omega, \underline{\underline{F}})$ standard Borel, $(\hat{\underline{\underline{F}}}_V)_{V \in \underline{\underline{V}}}$ ein absteigendes System von σ-Feldern in $\underline{\underline{F}}$, $\hat{\underline{\underline{F}}}_\infty = \bigcap_V \hat{\underline{\underline{F}}}_V$ das zugehörige Rand-Feld. Gegeben sei ein System $\Pi = (\pi_V(\cdot|\cdot))_{V \in \underline{\underline{V}}}$ von bedingten Wahrscheinlichkeiten bzg. $(\hat{\underline{\underline{F}}}_V)_{V \in \underline{\underline{V}}}$. Jedes WV P auf $(\Omega, \underline{\underline{F}})$ mit

$$E[\varphi | \hat{\underline{\underline{F}}}_V](\omega) = \int \varphi \, d\pi_V(\cdot|\omega) \qquad (P\text{-f.s.})$$

heißt eine Phase mit lokaler Charakteristik Π. In den Gittergasmodellen der Statistischen Mechanik ($\Omega = S^{Z^\nu}$ für ein $\nu \geq 1$, S endlich, $\underline{\underline{V}}$ = alle endlichen Teilmengen von Z^ν, $\hat{\underline{\underline{F}}}_V$ beschreibt was außerhalb von V passiert, $\pi_V(\cdot|\cdot)$ ist über ein Interaktions-Potential definiert, cf. Georgii, Lecture Notes Physics 16) ist die Menge $\mathcal{G}(\Pi)$ aller Phasen ein metrisierbarer Simplex, man hat also (1) die Choquet'sche Integraldarstellung zur Verfügung. außerdem weiß man, daß (2) extremale Phasen durch ein 0-1 Gesetz auf dem Randfeld charakterisiert sind. Es wird gezeigt, daß sich (1) und (2) auch im allgemeinen Fall*, insbesondere also ohne Kompaktheitsannahmen, herleiten lassen. Die Methode ist analog der klassischen Konstruktion des Martinrandes in der Theorie der Markoffschen Prozesse (cf. Dynkin, Nice 1970).

H. Föllmer

* der von Nelson's Markoff-Feldern in der Quantenfeldtheorie her motiviert ist

Einige Probleme der kombinatorischen Optimierung

In der diskreten Optimierung spielen Existenz- und Eindeutigkeitsfragen fast keine Rolle, vielmehr sind es Fragen der praktischen Berechnung bzw. der Schnelligkeit der Lösungsverfahren, die ausschlaggebend sind.

Es werden verschiedene Zuordnungsprobleme und Lösungsverfahren hierzu diskutiert. Insbesondere wird die Störungsmethode zur Lösung des allgemeinen quadratischen Zuordnungsproblemes

„Gegeben seien n^4 nichtnegative Zahlen d_{ijpq}. Finde eine Permutation φ der Menge $S=\{1,2,\dots,n\}$, die $\sum_i \sum_p d_{i\varphi(i)p\varphi(p)}$ minimiert"

erläutert. Es wird darauf hingewiesen, daß das quadratische Bottleneck-problem

$$\min_{\varphi\in S}\ \max_{i,p}\ d_{i\varphi(i)p\varphi(p)}$$

durch ein Analogon der Störungsmethode leicht gelöst werden kann. Nichtenumerative Verfahren für derartige Probleme sind bis jetzt nicht bekannt. Doch aufgrund eines Satzes von Edmonds & Fulkerson (1968) gibt es eine Klasse R, so daß gilt

$$\min_{\varphi\in S}\ \max_{\substack{(i,j)\in\varphi\\(p,q)\in\varphi}}\ d_{ijpq} = \max_{\varrho\in R}\ \min_{\substack{(i,j)\in\varrho\\(p,q)\in\varrho}}\ d_{ijpq}$$

Während im linearen Fall R die Klasse aller $(h\times k)$-Matrizen mit $h+k=n+1$ ist (Gross, 1958), ~~ist~~ und daraus die Ungarische Methode zur Lösung linearer Zuordnungsprobleme abgeleitet werden kann, ist im quadratischen Fall nichts über R bekannt. Die Kenntnis von R hätte weitreichende Konsequenzen, würde sie doch die Herleitung nichtenumerativer Verfahren für quadratische Zuordnungsprobleme, das Rundreiseproblem und das Problem der Triangulierung von Input-Output Matrizen ermöglichen.

Rainer E. Burkard, Graz
17. 10. 1973

Die Klassifikation der von Neumann Algebren vom Typ III

Die erste Konstruktion von Faktoren vom Typ II_1, II_∞, III von Murray und von Neumann benützte die sog. group measure space construction. Ausgangspunkt dieser Konstruktion sind ein Maßraum $(X, \mathcal{B}, \mu)$ und Transformationen T dieses Maßraums, die X eineindeutig und bi-meßbar auf sich abbilden, so daß $\mu(A) = 0 \Leftrightarrow \mu(TA) = 0$, $A \in \mathcal{B}$. Eine solche Transformation T liefert einen Automorphismus $a \to Ta$ von $L_\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ durch $Ta(x) = a(Tx)$, f.f.a. $x \in X$, $a \in L_\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$. Die group measure space construction bildet ein verschränktes Produkt von $L_\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ in Bezug auf eine Automorphismengruppe, die durch eine abzählbare Gruppe solcher T gegeben ist. Bezeichne den Faktor der durch diese Weise aus der Gruppe $\{T^i : i \in \mathbb{Z}\}$ mit ergodischem T entsteht mit $\mathcal{W}(T)$. Zur Untersuchung der group measure space construction führt man die schwache Äquivalenz ein (H. A. Dye 1959). T und T' heißen schwach äquivalent falls es eine Transformation U gibt, so daß f.f.a. $x \in X$ $\{UT^ix : i \in \mathbb{Z}\} = \{T'^jUx : j \in \mathbb{Z}\}$. Wenn T und T' schwach äquivalent sind, dann sind $\mathcal{W}(T)$ und $\mathcal{W}(T')$ isomorph. Wir behaupten für ergodische T, T' die Umkehrung. Beim Beweis wird eine eineindeutige Beziehung hergestellt zwischen schwachen Äquivalenzklassen und Isomorphieklassen von ergodischen Strömungen. Dabei wird der Satz von Krengel-Kubo benützt, der es gestattet eine ergodische Strömung als Strömung unter einer Funktion zu schreiben. Die algebraische Invarianz des Strömungstyps ist ein Ergebnis der Tomitatheorie, genauer des Dualitätssatzes von Takesaki, der mittels des Radon-Nikodym Satzes von Connes bewiesen wurde.

22. 10. 1973 Wolfgang Krieger, Göttingen

Die Slater-Bedingung für Steuerungsprobleme mit partiellen Differentialgleichungen als Nebenbedingungen

Zunächst wird ein allgemeines Optimierungs=problem in Funktionenräumen vorgestellt und eine Verallgemeinerung der klassischen Slater-Bedingung angegeben. Die Bedeutung dieser Be=dingung wird erläutert anhand der Dualitätstheorie und der Theorie notwendiger Optimalitätskriterien.

Anschließend wird eine Konkretisierung auf ein Steuerungsproblem mit nichtlinearen Entwicklungs=gleichungen als Nebenbedingungen näher betrachtet, die Wahl der benutzten Räume und Lösungs=begriffe motiviert und die Slater-Bedingung für diese Problemklasse bewiesen.

Schließlich ~~f~~ wird auf die Bedeutung dieser Bedingung, insbesondere auf ihre Konsequenzen für die numerischen Anwendungen hingewiesen.

24. Oktober 1973 Frank Lempio, Hamburg

Spiegelungen in beschränkten symmetrischen Gebieten

Sei M eine komplexe Mannigfaltigkeit und $\Omega(M)$ die Gruppe der biholomorphen Abbildungen von M auf sich. Für $\omega \in \Omega(M)$ sei $M(\omega) := \{x \in M \mid \omega(x) = x\}$ die Fixpunktmenge von ω. Es ist stets $M(\omega)$ eine analytische Menge in M und falls ω endliche Ordnung besitzt sogar eine Untermannigfaltigkeit von M. Eine Abbildung $\omega \in \Omega(M)$ heißt Spiegelung in einem Punkt $x \in M$, wenn ω endliche Ordnung besitzt, wenn ferner $x \in M(\omega)$ und $\dim_x M(\omega) = \dim_x M - 1$ gilt. Das Ziel dieses Vortrags ist es, eine Übersicht über alle Spiegelungen in den beschränkten symmetrischen Gebieten im Sinne von E. Cartan zu geben. Ein solches Gebiet ~~M~~ ist biholomorph äquivalent zu einem kartesischen Produkt $M = M_1^{k_1} \times \ldots \times M_r^{k_r}$, wobei $M_1, \ldots, M_r$ nicht äquivalente irreduzible Gebiete sind. Die Gruppe $\Omega(M)$ ist das semidirekte Produkt aus dem Normalteiler $\mathfrak{N} := \Omega(M_1)^{k_1} \times \ldots \times \Omega(M_r)^{k_r}$ und der Untergruppe $\mathfrak{T} := S(k_1) \times \ldots \times S(k_r)$, wobei $S(k_i)$ die symmetrische Gruppe von k_i Elementen ist aufgefaßt als Permutationsgruppe der Faktoren in $M_i^{k_i}$.

<u>Theorem 1:</u> Existiert eine Spiegelung in $\Omega(M) - \mathfrak{N}$, so muß $M = M_1^{k_1} \times \ldots \times M_r^{k_r}$ mindestens zwei gleiche Faktoren der Dimension 1 enthalten, etwa $\dim M_1 = 1$, $k_1 \geq 2$. In diesem Fall ist jede Spiegelung aus $\Omega(M) - \mathfrak{N}$ konjugiert zu $(z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m) \mapsto (z_2, z_1, z_3, \ldots, z_m)$, wobei $m = \dim M$ und z_1 und z_2 über M_1 laufen.

Eine Spiegelung aus dem Normalteiler $\mathfrak{N}$ ist Spiegelung auf genau einem der $k_1 + \ldots + k_r$ Faktoren von M und ist die Identität auf den anderen Faktoren. Es müssen dann nur noch die Spiegelungen auf den irreduziblen Gebieten angegeben werden. Nach E. Cartan gibt es zunächst ~~die~~ 4 Serien von jeweils unendlich vielen irred. Gebieten, nämlich:

I. Für $p, p \in \mathbb{N}$ ist mit $p \leq q$ ist

$$M_{p,q} := \{ Z \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{C}) \mid E_q - Z^t \overline{Z} > 0 \}$$

ein irred. Gebiet mit $\dim M_{p,q} = pq$. Hierbei ist $\mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ die Menge der komplexen $p \times q$-Matrizen, E_q ist die q-reihige Einheitsmatrix, Z^t die Transponierte und $\overline{Z}$ die konjugiert Komplexe

II. Für $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 5$ ist

$$T_r := \{ Z \in \mathfrak{M}_{r,r}(\mathbb{C}) \mid Z^t = -Z,\ E_r - Z^t \overline{Z} > 0 \}$$

ein irred. Gebiet mit $\dim T_r = \frac{1}{2} r(r-1)$.

III. Für $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$ ist

$$S_r := \{ Z \in \mathfrak{M}_{r,r}(\mathbb{C}) \mid Z^t = Z,\ E_r - Z^t \overline{Z} > 0 \}$$

ein irred. Gebiet mit $\dim S_r = \frac{1}{2} r(r+1)$

IV. Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$ ist

$$L_n := \left\{ z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; |z^t z| < 1,\ 2 z^t \overline{z} < 1 + |z^t z|^2 \right\}$$

ein irred. Gebiet mit $\dim L_n = n$.

Schließlich gibt es noch 2 irred. Ausnahmegebiete R_{16} und R_{27} der Dimensionen 16 und 27.

<u>Theorem 2</u>: Es existieren ~~kle~~ <u>keine</u> Spiegelungen in $M_{p,q}$ mit $3 \leq p \leq q$ oder $2 = p < q$, T_r mit $r \geq 5$, S_r mit $r \geq 3$, R_{16}, R_{27}. Jede Spiegelung in $M_{2,2}$ ist konjugiert zu $Z \mapsto Z^t$. Jede Spiegelung in $M_{1,q}$ ist konjugiert zu $(z_{11}, z_{12}, \dots, z_{1q}) \mapsto (\lambda z_{11}, z_{12}, \dots, z_{1q})$ mit einer Einheitswurzel $\lambda \neq 1$. Jede Spiegelung in S_2 ist konjugiert zu $\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{12} & z_{22} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z_{11} & -z_{12} \\ -z_{12} & z_{22} \end{pmatrix}$. Jede Spieg. in L_n ist konjugiert zu $(z_1, z_2, \dots, z_n) \mapsto (-z_1, z_2, \dots, z_n)$. Das Resultat über R_{16} und R_{27} stammt von Herrn Pommerening aus dem Jahre 1972, die übrigen Resultate stammen aus dem Jahre 1969.

29.10.1973, E. Gottschling, Mainz

Eine Charakterisierung linearer Transformationen in endlichdimensionale Vektorräume

Sei $\mathbb{K}^n$ der n dim. Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Es sei $L=\{l_i\}$ eine Familie von Richtungen und $\mathcal{T}(L)$ die Menge der 1-1 Abbildungen des $\mathbb{K}^n$ in ~~den~~ $\mathbb{K}^m$ mit der Eigenschaft, daß jede Gerade der Gestalt $\lambda l + a$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $l, a \in \mathbb{K}^n$, $l \in L$ wieder auf eine Gerade abbildet. $\mathcal{T}_0(L) = \{T \in \mathcal{T}(L) ; T(0) = 0\}$

Es gilt dann der Satz:
Jede Abbildung $T \in \mathcal{T}_0(L)$ ist linear genau dann wenn L die folgenden Eigenschaften hat (modulo einem Körperautomorphismus)

1.) a) $m \le n$ L liegt nicht auf einem entarteten Kegel 2. Grades. b) $m > n$ L liegt auf keinem Kegel 2. Grades
c) $n = 2$ L enthält mindestens 3 verschiedene Richtungen.

2.) Sei $h_1 \dots h_n$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$ und $l \in L$, $l = \sum \lambda_i h_i$ so ist die Richtung von l durch die Verhältnisse $\frac{\lambda_i}{\lambda_j}$, $\lambda_j \neq 0$ charakterisiert. Sei $\mathbb{K}(L, h_1 \dots h_n)$ der kleinste Unterkörper von $\mathbb{K}$ der alle Verhältnisse $\frac{\lambda_i}{\lambda_j}$, $\lambda_j \neq 0$ enthält, so muß gelten $\mathbb{K}(L, h_1 \dots h_n) = \mathbb{K}$ für alle Basen $\{h_1 \dots h_n\}$

3.) Charakteristik von $\mathbb{K} \neq 2$

31. 10. 73

H. J. Borchers

Asymptotische Eigenschaften der Cramér-von Mises-Statistik für parametrisierte Klassen.

Sei $C_n = \int (\sqrt{n}(F_n^e - F(\cdot, \hat{\vartheta}_n)))^2 \, dF(\cdot, \hat{\vartheta}_n)$ die Cramér-von Mises-Statistik, wobei F_n^e die empirische Verteilungsfunktion zu n stoch. unabh. ZV'n $X_1, \dots, X_n$ ist und $\hat{\vartheta}_n = \hat{\vartheta}_n(X_1, \dots, X_n)$ eine Schätzfunktion des unbekannten Parameters ϑ einer gewissen vorgegebenen Familie von Verteilungen $\mathfrak{P} = \{P_\vartheta, \vartheta \in \Theta\}$; ferner bezeichne $F(\cdot, \vartheta)$ die zu P_ϑ korrespondierende VF. Es werden Limesaussagen für C_n hergeleitet, sowohl unter der Nullhypothese, als auch unter Alternativfolgen, die die Nullhypothese in geeigneter Weise approximieren. Die Betrachtungen basieren teilweise auf der Theorie der schwachen Konvergenz von Maßen in Hilberträumen, teilweise auf (direkte) ad hoc Betrachtungen unter Verwendung der Radon-Nikodym-Ableitungen der zugrundeliegenden L_2-wertigen Zufallsvariablen. Als Ergebnis erhält man eine asymptotische Darstellung der Schärfe des Cramér-von Mises-Tests. Analoge Betrachtungen sind möglich für die Klasse der zur Nullhypothese benachbarten Verteilungen. Während für benachbarte Verteilungen keine Gleichmäßigkeitsaussage für die schwache Konvergenz bewiesen werden kann, ist dies für die zuerst erwähnte Klasse möglich.

5. 11. 73

G. Neuhaus

GROWTH OF HAAR MEASURE IN NILPOTENT LIE GROUPS

Theorem. If G is nilpotent, connected, simply connected Lie group and $U \subset G$ an open, bounded ($\bar{U}$ compact) set, than there exists an integer p such that the

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|U^n|}{n^p}$$

exists and is positive. ($U^n = \{g_1 \cdots g_n : g_i \in U, i = 1, \ldots, n$, $|\cdot|$ denotes the Haar measure in G.)

Proof starts with definition of convergent sequence of polynomials. For example, $W_n(X_1^1, \ldots, X_1^N, \ldots, X_n^1, \ldots, X_n^N) = X_1^k + \ldots + X_n^k$ $(k = 1, \ldots, N)$ gives such convergent sequence of polynomials of variables $X_1^1, X_2^1, X_3^1, \ldots$; $X_1^N, X_2^N, X_3^N, \ldots$ Another example:

$$W_n(X_1^1, \ldots, X_1^N, \ldots, X_n^1, \ldots, X_n^N) = \sum_{i<j\le n} X_i^1 X_j^2 .$$

It is ~~as~~ a classical fact, that under ~~this~~ ours assumption on G we can identify G (as a topological and measure space) with R^N for some N, and we can express the multiplication in G as follows:

$$(x_1^1, \dots, x_1^N)(x_2^1, \dots, x_2^N) =$$
$$= \left(W^1(x_1^1, x_2^1), W^2(x_1^1, x_1^2; x_2^1, x_2^2), \dots, W^N(x_1^1, \dots, x_1^N, x_2^1, \dots, x_2^N) \right).$$

Let $x = (x^1, \dots, x^N)$. If, for $k = 1, \dots, N$

$$W_1^k(x_1) = x_1^k \quad \text{and}$$
$$W_{n+1}^k(x_1, \dots, x_{n+1}) = W^k(W_n^1, \dots, W_n^k, x_{n+1}^1, \dots, x_{n+1}^k)$$

then $\{W_n^k\}$, $k = 1, \dots, N$ is convergent. That is the fact, from which starts the proof.

8. XI 1973 Eugeniusz Poracki

P.S. Niech się wiedzie matematykom w Bielefeldzie, którzy są ludźmi całkiem do rzeczy.

Some evidence for an extension of the Brauer-Thrall conjecture

The Brauer-Thrall conjecture proposes a fundamental dichotomy in representation theory: that is, that a finite-dimensional algebra A over an algebraically closed field K is either of finite representation type or of strongly unbounded representation type. An algebra of strongly unbounded representation type ① has indecomposable representations of arbitrarily large dimension ② for an infinite number of dimensions d, has infinitely many non-isomorphic indecomposable representations of dimension d, ③ has indecomposable representations of infinite dimension. My colleague Peter Donovan and I have constructed some evidence that, for such algebras A there is a trichotomy extending the Brauer-Thrall dichotomy as follows:- Either ① A has finite representation type, or ② the indecomposable representations of A of a given dimension d form a finite number of one-parameter families, and have a very restricted class of endomorphism algebras or ③ there are algebraic families of indecomposable representations of A of arbitrarily high dimension (as algebraic spaces), and almost no restrictions on the endomorphism algebras of finite-dimensional representations of A. The trichotomy is clear in the case of representations of finite directed graphs (which are equivalent to representations of a certain algebra associated with the graph) and for representations in characteristic p of p-groups where $p \neq 2$. Partial results hold in the case $p = 2$ which is somewhat exceptional. It is also clear for algebras $K[x_1, \dots, x_m]/\langle x_1^{n_1}, \dots, x_m^{n_m}$ where K has arbitrary characteristic and either $m \geq 3$ or $m = 2$ and $\min n_i \geq 3$ or $n_1 = 2, n_2 = $

or $m_1 = m_2 = 2$. Algebraic families of indecomposable representations of arbitrarily high dimension can also be found in characteristic p for group algebras where the Sylow p-subgroup of the group is not a 2-group of maximal class.

M. R. Freislich (The work described is joint work with P. W. Donovan) 14/11/73

Zur Struktur der Siegelschen Modulgruppe.

Aufgrund der bekannten Konstruktion von Fundamentalbereichen weiss man, dass die Siegelsche Modulgruppe endlich präsentierbar ist. Man kommt so aber nicht zu definierenden Relationen in expliziter Gestalt; dies liegt an der Tatsache, dass die Minkowskische Reduktionstheorie nicht konstruktiv ist. Es war bereits früher (Math. Annalen 144) gezeigt worden, dass der allgemeine Fall auf den Fall der Modulgruppe 2. Grades zurückgeführt werden kann. Das Verfahren besteht darin, die Modulgruppe aus elementaren bekannten Untergruppen so aufzubauen, dass man ein vollständiges Relationensystem aus diesem Aufbau ablesen kann. – Für Geschlecht 2 konzentrieren sich die Schwierigkeiten. Auch hier gelingt eine explizite Präsentation vermöge von definierenden Relationen, welche einfache gruppentheoretische Aussagen über Untergruppen (isomorph zur ellipt. Modulgruppe, freie Abelsche Gruppen) beinhalten. Das angegebene Relationensystem hat einheitliche Bauart. Die direkte Reduktion auf ein endliches Teilsystem bleibt ein offenes Problem. Die Brauchbarkeit des angegebenen Relationensystems wird dadurch belegt, dass die Multiplikatorsysteme der Siegelschen Modulgruppe auf neue Art gruppentheoretisch bestimmt werden.

(19.11.73)

H. Klingen, Freiburg i. Br.

Lineare Darstellungen von Graphen

Gabriel hat gezeigt, daß ein zusammenhängender Graph Γ mit Orientierung Λ genau dann nur endlich viele unzerlegbare Darstellungen über einem Körper K besitzt, wenn $\Gamma = A_n, D_n, E_6, E_7$ oder E_8 gilt und daß es in diesem Falle eine Bijektion zwischen den unzerlegbaren Darstellungen einerseits und andererseits den positiven Wurzeln der entsprechenden quadratischen Form gibt. Jüngst haben Bernstein, Gelfand und Ponomarev einen neuen Beweis des Satzes geliefert, der diese Bijektion direkt konstruiert. Diese Methode kann man verwenden, um die unzerlegbaren Darstellungen von $\tilde{A}_n, \tilde{D}_n, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$ zu konstruieren. – Eine Gattung $(K_\alpha, {}_\alpha M_\beta)_{\alpha,\beta \in \Gamma_0}$ besteht aus (Schief-)Körpern K_α und K_α-K_β-Bimoduln ${}_\alpha M_\beta$ mit ${}_\beta M_\alpha = \mathrm{Hom}({}_\alpha M_\beta, K_\alpha) = \mathrm{Hom}({}_\alpha M_\beta, K_\beta)$. Sei $\Gamma_1 = \{\{\alpha,\beta\}, {}_\alpha M_\beta \neq 0\}$, und sei Λ Orientierung für den Graphen (Γ_0, Γ_1). Es sei $\mathcal{L}(K_\alpha, {}_\alpha M_\beta, \Lambda)$ die Kategorie der linearen Darstellung $V = (V_\alpha, {}_\beta\varphi_\alpha)$ wobei V_α ein K_α-Vektorraum und ${}_\beta\varphi_\alpha : V_\alpha \otimes_\alpha M_\beta \longrightarrow V_\beta$ eine K_β-lineare Abbildung ist. Ist $d_{\alpha\beta} = \dim({}_\alpha M_\beta)_{K_\alpha} > 1$ oder $d_{\beta\alpha} > 1$, so kann man die Kante $\alpha - \beta$ in Γ_1 als Mehrfachkante $\alpha \equiv \beta$ mit $d_{\alpha\beta} d_{\beta\alpha}$ Linien auffassen. Ist $d_{\alpha\beta} > 1$ und $d_{\beta\alpha} = 1$, so deutet man dies durch einen Pfeil $\alpha \Rightarrow \beta$ an. Dann gilt: $\mathcal{L}(K_\alpha, {}_\alpha M_\beta, \Lambda)$ besitzt genau dann nur endlich viele unzerlegbare Darstellungen, wenn der Graph Γ ein Dynkin-Diagramm $(A_n, B_n, \dots, G_2)$ ist, und es gibt eine Bijektion zwischen den unzerlegbaren Darstellungen und den positiven Wurzeln einer entsprechenden quadratischen Form. Außerdem kann man mit diesen Methoden die unzerlegbaren Darstellungen von Gattungen bestimmen, deren Graph ein erweitertes Dynkin-Diagramm $(\tilde{A}_n, \tilde{B}_{n1}, \dots, \tilde{G}_{22})$ ist. Diese Ergebnisse wurden in Zusammenarbeit mit V. Dlab erzielt.

G. Ringel

(4.11.70)

Der Satz von Liouville über elementare Integrierbarkeit

Als elementar bezeichnet die klassische Differentialrechnung Funktionen, die sich durch Iteration aus der Identität $f(z)=z$ mittels algebraischer Operationen, Logarithmen, Exponentialfunktion, Winkelfunktionen und deren Umkehrungen erhalten lassen. Die Ableitung einer solchen Funktion ist wieder elementar, nicht aber (i.a.) das Integral, schon $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$, $\int \frac{e^x}{x}dx$, … sind nicht elementar. Der Kern dieses Problems ist algebraischer Natur, er ist unabhängig davon, welche Funktionszweige ausgewählt werden oder auf welchen Riemannschen Flächen man sich die Funktionen beheimatet denkt. Dies kommt schon bei Liouville (1833) zum Ausdruck, der sich als erster streng mit dieser Frage befaßt hat, seine Beweise sind allerdings analytischer Natur. Ähnlich ist es mit der Verallgemeinerung von Ostrowski (1946): algebraische Formulierung, analytischer Beweis. Hier soll ein algebraischer Beweis für das folgende zentrale Theorem von Liouville gegeben werden (etwas komplizierter ist der algebraische Beweis von Rosenlicht 1968): Seien $K \subset L$ Differentialkörper der Char. 0 (d.h. Körper mit einer Differentiation $'$, die additiv ist und die Produktregel erfüllt) mit dem gleichen Konstantenkörper $C=\{x \in K \text{ (od. } L);\ x'=0\}$. Eine Zwischenkörpererweiterung $K_1 \subset K_2$ heißt einfach elementar, wenn $K_2 = K_1(u)$ mit i) u alg$/K_1$ oder ii) $u' = g'u$ mit $g \in K_1$ oder iii) $u' = \frac{g'}{g}$ mit $g \in K_1$ (d.h. algebraische, exponentielle oder logarithmische Erweiterung). $z \in L$ heißt elementar über K, wenn es in einem Teilkörper liegt, den man durch endlich viele einfach elementare Schritte von K aus erhält. <u>Theorem</u>:

$L \ni z$ elementar über K, $z' \in K \Rightarrow \exists\, y_i \in K,\ c_i \in C: \quad z' = \sum_i c_i \frac{y_i'}{y_i} + y_0'$.

Zum Beweis zeigt man: Gibt es solch eine Darstellung in $K_2 = K_1(u)$, so auch in K_1, solange $K_1 \supseteq K$ und $K_2 | K_1$ elementar einfach. Es sind 3 Fälle zu betrachten: i) den algebraischen Fall erledigt man durch Spurbildung (nach Abel), ii) den exponentiellen Fall erledigt man durch Potenzreihenentwicklung an der Stelle $u=0$ von $K_2|K_1$ und Koeffizientenvergleich bei u^0, iii) den logarithmischen Fall erledigt man analog, allerdings durch Betrachtung der Stelle $u=\infty$, d.h. Entwicklung nach u^{-1}.

W.-D. Geyer
(3.12.73)

Die Bedeutung des Dualitätssatzes von Tate und Poitou in der Zahlentheorie

Das Bielefelder Auditorium sollte davon überzeugt werden, daß es sich bei dem oben genannten Dualitätssatz zwar nicht um einen gesellschaftsrelevanten, dafür aber um einen höchst erbaulichen, überaus tiefliegenden, viele klassische Theorien sammelnden, vielfältig und unmittelbar auf neue Probleme und Entwicklungen anwendbaren, fruchtbaren Satz der algebraischen Zahlentheorie handelt, der dem menschlichen Geist, um mit Jacobi zu reden, zur Ehre gereicht.

Von den vielen erwähnten Anwendungsmöglichkeiten sei der folgende einfache Beweis des Grunwaldschen Existenzsatzes als Beispiel hervorgehoben: Der Grunwaldsche Satz besagt, daß bei Vorgabe zyklischer Erweiterungen $K_\mathfrak{p}|k_\mathfrak{p}$ der Komplettierungen $k_\mathfrak{p}$ eines Zahlkörpers k bei endlich vielen Primstellen $\mathfrak{p}$ (bis auf einen speziellen Fall) stets eine globale zyklische Erweiterung $K|k$ vom Grade $[K:k] = \text{k.g.V.}\,[K_\mathfrak{p}:k_\mathfrak{p}]$ existiert, die die lokalen Körper $K_\mathfrak{p}|k_\mathfrak{p}$ an den betrachteten Primstellen $\mathfrak{p}$ als Komplettierungen annimmt. Ist $\mathfrak{G} = G(\bar{k}|k)$ bzw. $\mathfrak{G}_\mathfrak{p} = G(\bar{k}_\mathfrak{p}|k_\mathfrak{p})$ die absolute Galoisgruppe über k bzw. $k_\mathfrak{p}$, so läßt sich dieses Existenzproblem als die Frage nach der Surjektivität der Abbildung

$$H^1(\mathfrak{G},\mathbb{Z}/n) \xrightarrow{g} \prod_{\mathfrak{p}\in S} H^1(\mathfrak{G}_\mathfrak{p},\mathbb{Z}/n)$$

verstehen, wobei S eine endliche Primstellenmenge ist. Der Dualitätssatz liefert nun eine exakte Sequenz

$$H^1(\mathfrak{G},\mathbb{Z}/n) \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p}\in S} H^1(\mathfrak{G}_\mathfrak{p},\mathbb{Z}/n) \times \prod_{\mathfrak{p}\notin S} H^1(\mathfrak{G}_\mathfrak{p},\mathbb{Z}/n) \longrightarrow H^1(\mathfrak{G},\mu_n)^*,$$

wobei μ_n die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln ist, und der $*$ das Pontrjagindual andeutet. Nun ist klar, daß g surjektiv ist, wenn

$$\prod_{\mathfrak{p}\notin S} H^1(\mathfrak{G}_\mathfrak{p},\mathbb{Z}/n) \longrightarrow H^1(\mathfrak{G},\mu_n)^*$$

surjektiv, d.h. wenn die duale Abbildung

$$H^1(\mathfrak{G},\mu_n) \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p}\notin S} H^1(\mathfrak{G}_\mathfrak{p},\mathbb{Z}/n)^* = \prod_{\mathfrak{p}\notin S} H^1(\mathfrak{G}_\mathfrak{p},\mu_n),$$

also die Abbildung

$$k^*/k^{*n} \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p}\notin S} k_\mathfrak{p}^*/k_\mathfrak{p}^{*n}$$

injektiv ist. Dies aber ist unmittelbar einzusehen, wenn n ungerade ist und führt im allgemeinen Fall zu einer zusätzlichen Überlegung, die auf den genannten speziellen Ausnahmefall hinausläuft.

Jürgen Neukirch

(10.12.73)

17.12.73 Homogene Algebren und die allgemeine RICCATI-Diff. Gleichung.

Sei X ein endl. dim. Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $\mathfrak{A} = (X, \cdot)$ eine beliebige kommutative Algebra auf X mit Produkt $(u,v) \mapsto uv$. Es wird das RICCATI-Problem der Differentialgleichung $\dot{x} = x^2$, $x = x(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, betrachtet. Nach Bemerkungen über relative Erhaltungssätze wird die Gruppe $\Gamma(\mathfrak{A})$ der die Lösungen erhaltenden Funktionskeime untersucht. Ein Funktionskeim h in $0 \in X$ gehört per Definition genau dann zu $\Gamma(\mathfrak{A})$, wenn mit x auch $h(x)$ eine Lösung der RICCATI-Gleichung ist und $h(u) = u + \dots$ gilt.

<u>Satz.</u> Sei $\mathfrak{A}$ eine Algebra mit Einselement auf X. Dann gilt:

a) Für jedes $h \in \Gamma(\mathfrak{A})$ ist h_α, $\alpha \in \mathbb{R}$, eine 1-Parameter-Untergruppe von $\Gamma(\mathfrak{A})$, wenn

$$h_\alpha(u) = \frac{1}{\alpha} h(\alpha u)$$

definiert wird.

b) Gilt $h(u) = u + h_2(u) + \dots$, $g(u) = u + g_2(u) + \dots$, h_2, g_2 vom Grad 2, mit $h_2 = g_2$, dann ist $h = g$.

c) $\Gamma(\mathfrak{A})$ ist kommutativ und isomorph ~~zu~~ der additiven Gruppe eines Teilvektorraumes von X.

Diese und weitere Ergebnisse lassen sich auf Banach-Räume übertragen.

[illegible] (MÜNSTER/WESTF.)

7. 1. 1974 Formale Gruppen und Folgen von dividierten Potenzen.

Seien k ein komm. Ring, k-Alg die Kategorie der kommutativen k-Algebren, k-Alg_{st} die Kategorie der topologischen komm. k-Algebren, Func die Kategorie der kovarianten Funktoren von k-Alg in die Kategorie der Mengen. Man erhält folgendes Diagramm von Kategorien, Funktoren und vollen Unterkategorien

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Func} \arrow[r, shift left, "O"] & (k\text{-}\mathrm{Alg}_{st})^{op} \arrow[l, shift left, "()^\circ"] & \\
\mathrm{Func}_{gf} \arrow[u, phantom, "\cup\mathrm{I}_\pi"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & (k\text{-}\mathrm{Alg}_{gf})^{op} \arrow[u, phantom, "\cup\mathrm{I}"] & k\text{-}\mathrm{Coalg} \\
\mathrm{Func}_{pf} \arrow[u, phantom, "\cup\mathrm{I}_\pi"] \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[rr, bend right, "B"'] & (k\text{-}\mathrm{Alg}_{pf})^{op} \arrow[u, phantom, "\cup\mathrm{I}_\pi"] \arrow[r, shift left, "()^\circ", "\cong"'] & k\text{-}\mathrm{Coalg}_{pf} \arrow[u, phantom, "\cup\mathrm{I}"] \arrow[l, shift left, "()^\circ"]
\end{tikzcd}$$