17.12.73 Homogene Algebren und die allgemeine RICCATI-Diff. Gleichung.

Sei $X$ ein endl. dim. Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $\mathfrak{A} = (X, \cdot)$ eine beliebige kommutative Algebra auf $X$ mit Produkt $(u,v) \mapsto u^2$. Es wird das RICCATI-Problem der Differentialgleichung $\dot{x} = x^2$, $x = x(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, betrachtet. Nach Bemerkungen über relative Erhaltungssätze wird die Gruppe $\Gamma(\mathfrak{A})$ der die Lösungen erhaltenden Funktionskeime untersucht. Ein Funktionskeim $h$ in $0 \in X$ gehört per Definition genau dann zu $\Gamma(\mathfrak{A})$, wenn mit $x$ auch $h(x)$ eine Lösung der RICCATI-Gleichung ist und $h(u) = u + \dots$ gilt.

<u>Satz.</u> Sei $\mathfrak{A}$ eine Algebra mit Einselement auf $X$. Dann gilt.

a) Für jedes $h \in \Gamma(\mathfrak{A})$ ist $h_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, eine 1-Parameter-Untergruppe von $\Gamma(\mathfrak{A})$, wenn

$$h_\alpha(u) = \frac{1}{\alpha} h(\alpha u)$$

definiert wird.

b) Gilt $h(u) = u + h_2(u) + \dots$, $g(u) = u + g_2(u) + \dots$, $h_2, g_2$ vom Grad 2, mit $h_2 = g_2$, dann ist $h = g$.

c) $\Gamma(\mathfrak{A})$ ist kommutativ und isomorph ~~zu~~ der additiven Gruppe eines Teilvektorraumes von $X$.

Diese und weitere Ergebnisse lassen sich auf Banach-Räume übertragen.

Runge (MÜNSTER/Westf.)

7. 1. 1974 Formale Gruppen und Folgen von dividierten Potenzen.

Seien $k$ ein komm. Ring, $k$-Alg die Kategorie der kommutativen $k$-Algebren, $k$-Alg$_{st}$ die Kategorie der topologischen komm. $k$-Algebren, Func die Kategorie der kovarianten Funktoren von $k$-Alg in die Kategorie der Mengen. Man erhält folgendes Diagramm von Kategorien, Funktoren und vollen Unterkategorien

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Func} & \underset{(\ )^\circ}{\overset{O}{\rightleftarrows}} & (k\text{-Alg}_{st})^{op} & & \\
\cup|_\pi & & \cup| & & \\
\mathrm{Func}_{gf} & \cong & (k\text{-Alg}_{gf})^{op} & & k\text{-Coalg} \\
\cup|_\pi & & \cup|_\pi & \xrightarrow{(\ )^\circ} & \cup| \\
\mathrm{Func}_{pf} & \cong & (k\text{-Alg}_{pf})^{op} & \underset{(\ )^\circ}{\overset{\cong}{\leftarrow}} & k\text{-Coalg}_{pf}
\end{array}$$

$$\underbrace{\mathrm{Func}_{pf} \longrightarrow k\text{-Coalg}_{pf}}_{B}$$

in dem die mit $\pi$ gekennzeichneten Einbettungen Produkte erhalten, also auch Gruppen in den jeweiligen Kategorien. Von Interesse ist vor allem die letzte Zeile, in der $\mathcal{A} \in k\text{-Alg}_{pf}$ genau dann, wenn $\mathcal{A} = \varprojlim \mathcal{D}$ mit der Topologie des proj. Limes und $\mathcal{D}$ ein gefiltertes Diagramm in $k$-Alg, so daß für $D \in \mathcal{D}$ gilt $\mathcal{A} \xrightarrow{pr} D$ surjektiv und so daß für jeden stetigen Alg. Homomorphismus $\mathcal{A} \to A$ eine Faktorisierung

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & D \\ & \searrow & \downarrow \\ & & A \end{array}$$

existiert und so daß alle $D \in \mathcal{D}$ endl. erzeugte proj. $k$-Moduln sind.

Die Gruppen in $\mathrm{Func}_{pf}$ (= flache formale Gruppen) sind vollständig durch Hopf-Algebren in $\mathrm{Coalg}_{pf}$ bestimmt. Ein Ansatz wird gezeigt, wie gewisse flache formale Gruppen $G$ durch ihre Folgen von dividierten Potenzen $(b_i)$ in $B(G)$ bestimmt werden, was eine Verallgemeinerung der Dieudonné Moduln bedeutet.

B. Pareigis

10.1.1974: Burnside-Ring und Mackey-Funktoren für kompakte Liesche Gruppen. Sei $G$ kompakte Liesche Gruppe. Auf dem Halbring $\tilde{A}(G)$ der kompakten differenzierbaren $G$-Mannigfaltigkeiten (mit $+$ = disjunkte Summe, $\cdot$ = kartesisches Produkt) wird die Äquivalenzrelation eingeführt: $M \sim N \iff$ für alle abgeschlossenen Untergruppen $H$ von $G$ gilt $\chi(M^H) = \chi(N^H)$; dabei ist $M^H$ die $H$-Fixpunktmenge von $M$ und $\chi(X)$ die Euler-Charakteristik von $X$. Es ist $A(G) := \tilde{A}(G)/\sim$ ein kommutativer Ring mit 1, genannt Burnside-Ring. Das Produkt der Ringhomomorphismen $\varphi_H : A(G) \to \mathbb{Z}$; $M \mapsto \chi(M^H)$ ist (definitionsgemäß) injektiv. $A(G)$ ist additiv die freie abelsche Gruppe über $\Phi = \{$Menge der Konjugationsklassen $(H)$ von abgeschlossenen Untergruppen $H$ von $G$, die endlichen Index in ihrem Normalisator haben$\}$. Jedes Primideal von $A(G)$ hat die Form $\varphi_H^{-1}(p)$, $(p) \in \mathbb{Z}$ Primideal. Es ist $\varphi_H^{-1}(p) = \varphi_K^{-1}(p)$ jedenfalls dann, wenn $H \triangleleft K$ und $K/H$ Erweiterung eines Torus durch eine endliche $p$-Gruppe. Der Ring $A(G)$ ist isomorph zur stabilen $G$-äquivarianten Homotopie $\omega(G) := \varinjlim\, [V^c, V^c]^o_G$, wobei $V^c$ die Einpunkt-Kompaktifizierung des komplexen $G$-Moduls $V$ ist und $[V^c, V^c]^o_G$ die Menge der $G$-Homotopieklassen von $G$-Abbildungen $V^c \to V^c$ und der direkte Limes vermöge Einhängung über die Kategorie der $G$-Moduln und linearen Einbettungen definiert. Andere Definitionen von $A(G)$: statt diff. Mannigfaltigkeiten bel. Räume mit relevanter Euler-Charakteristik; oder Abbildungen mit Lefschetz-~~Ch~~ Indices. Erweiterungen von $A(G)$ zu Mackey-Funktoren sind in verschiedener Weise möglich: Entweder betrachtet man $A[S; G]$ gebildet aus Submersionen $M \to S$ mit Relation: faserweise gleiche Euler-Charakteristik; oder stabile äquivariante Kohomotopie $\omega^o_G(S)$. Homologie mit Koeffizienten in einem Mackey-Funktor liefern allgemeine Transfer-Sätze; damit läßt sich die alte Vermutung von Montgomery + Conner beweisen: Ist $X$ zusammenziehbare differenzierbare $G$-Mannigfaltigkeit, so ist der Orbitraum $X/G$ zusammenziehbar.

Tammo tom Dieck (Saarbrücken).

14.1.74 Exponentialapproximation und globale Analysis

Bei der Analyse von physikalischen und biologischen Zerfallsprozessen hat man häufig an eine gegebene Meßkurve eine Funktion der Form $\sum_{n=1}^{N} \alpha_n e^{\lambda_n x}$ anzupassen, wobei die $\alpha$'s und $\lambda$'s Parameter sind die bestimmt werden sollen. Dieses nichtlineare Approximationsproblem hat – entgegen der Theorie von Rice – häufig mehrere Lösungen. Es ist das Ziel, die Anzahl der Lösungen abzuschätzen. Dies ist ein Problem der globalen Analysis. Da das Abstandsfunktional für die Tschebyscheff-Approximation nicht differenzierbar ist, muß man den Begriff des kritischen Punktes neu fassen. Wenn auch anders als in der Morse-Theorie geschieht dies in dem Sinne konsistent, daß die bekannte Beziehung zwischen kritischen Punkten und der Existenz von Deformationen der Niveaumenge erhalten bleibt. Die Sonderrolle der Tschebyscheff-approximation wird insofern deutlich, als hier anders als im $L_2$-Fall, jeder kritische Punkt eine lokal beste Approximation und nicht Sattelpunkt ist. Dies gilt insbesondere für die Familie der nichtdegenerierten Exponentialsummen. Ein Induktionsargument zeigt, daß bei Summen mit N-Termen höchstens N! Lösungen vorliegen. Die Abschätzung motiviert ein numerisches Verfahren.

D. Braess (Münster)

21.1.74 <u>Instabile Flächen konstanter mittlerer Krümmung</u>

Es sei $\Gamma$ eine rektifizierbare Jordankurve, die in der Einheitskugel $|x| \le 1$ des $\mathbb{R}^3$ enthalten ist und einer Sehnenbogenbedingung genügt. Wir bezeichnen mit $S(\Gamma)$ die Menge aller Vektorfunktionen $x: \bar{B} \to \mathbb{R}^3$ ($B = \{|w| < 1\}$, $w = u + iv$) der Klasse $C^0(\bar{B}) \cap C^1(B)$ mit $|x(w)| \le 1$ und $D(x) = \iint_B (x_u^2 + x_v^2)\,du\,dv < +\infty$, die den Einheitskreis $\partial B$ schwach-monoton auf $\Gamma$ abbilden und die Normierungsbedingung $x(\zeta_k) = p_k \in \Gamma$ ($\zeta_k = e^{\frac{2\pi i}{3}k}$, $k = 0, 1, 2$) erfüllen. Weiter sei $S^*(\Gamma)$ die Teilmenge aller $x \in S(\Gamma)$ mit $x \in C^2(B)$ und $\Delta x = 2H\, x_u \wedge x_v$, $x_u^2 = x_v^2$, $x_u x_v = 0$. Dabei ist $H$ eine reelle Konstante mit $|H| < \frac{1}{2}$. In Punkten $w$, wo $x_u \neq 0$ ist, stellt $x = x(w)$ eine Fläche konstanter mittlerer Krümmung $H$ dar. $S^*(\Gamma)$ ist die Menge aller kritischen Punkte des Funktionals

$E(x) = D(x) + 4H/3 \iint_B (x, x_u, x_v)\,du\,dv$ auf $S(\Gamma)$.

Mit der Abstandsfunktion $\rho(x_1, x_2) = \max_{\bar{B}} |x_1(w) - x_2(w)|$ wird $S(\Gamma)$ ein metrischer Raum. Eine Fläche $x^* \in S^*(\Gamma)$ heisst instabil, wenn in jeder Umgebung $U$ von $x^*$

ein $x \in S(\Gamma)$ mit $E(x) < E(x^*)$ existiert. Dann gilt der folgende Satz: Zu zwei echten relativen Minima von $E$ gibt es eine instabile Fläche $x^* \in S^*(\Gamma)$. Zum Beweis werden zunächst Polygone $\Gamma$ betrachtet, indem eine umkehrbar-eindeutige Beziehung zwischen der Menge $S^*(\Gamma)$ und den kritischen Punkten einer stetig differenzierbaren Funktion $f$ in $N$ Variablen hergestellt wird. Der allgemeine Fall wird durch Approximation erledigt. Die Methode stellt eine Weiterführung der klassischen Untersuchungen von R. Courant (Dirichlet's Principle, New York 1950) dar. Eine zusammenfassende Darstellung ist erschienen in Jber. DMV 74 (1972), 123–130.

E. Heinz (Göttingen)

Klassifizierende Räume und unendliche Schleifenräume

28.1.74 In der Theorie der Mannigfaltigkeiten mit zusätzlichen Strukturen, wie etwa differenzierbare, semilineare, orientierbare Strukturen spielen die stabilen Gruppen $O, U, SO, SU, F, Top, PL$, ihre Faktorräume und ihre klassifizierenden Räume eine große Rolle. Wir geben dafür Beispiele. Daher interessiert man sich für die Geometrie dieser Räume und für ihre algebraischen Invarianten. Wir skizzieren den Beweis der Vermutung, daß sie unendliche Schleifenräume sind. Dabei heißt $X$ unendlicher Schleifenraum, falls es Räume $X_0, X_1, X_2, \dots$ gibt, so daß $X = X_0$ und $X_i$ vom Homotopietyp des Schleifenraums $\Omega X_{i+1}$ von $X_{i+1}$ ist. Die Vermutung folgt aus einem Klassifikationssatz für die algebraische Struktur unendlicher Schleifenräume.

Eine Struktur ist eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit Objekten $0, 1, 2, \dots$, topologisierten Morphismenräumen $\mathcal{C}(m,n)$, so daß die Komposition stetig ist, einem assoziativen Funktor $\oplus: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, stetig auf den Morphismenräumen, so daß $m \oplus n = m+n$. Weiter ist die symmetrische Gruppe $S_m$ Untergruppe der Halbgruppe $\mathcal{C}(m,m)$ und es gilt: $\pi \oplus \rho$ ist die übliche Summenpermutation für $\pi \in S_m$, $\rho \in S_n$ und für Morphismen $f_i \in \mathcal{C}(r_i, m_i)$ gilt $\rho(m_1, \dots, m_n) \circ (f_1 \oplus \dots \oplus f_n) = (f_{\rho^{-1}1} \oplus \dots \oplus f_{\rho^{-1}n}) \circ \rho(r_1, \dots, r_n)$, wobei $\rho(m_1, \dots, m_n)$ die Permutation $\rho$, angewandt auf die Blöcke ~~von~~ $m_1, \dots, m_n$ von

Elementen in $\mathrm{Im}_i$ ist.

Der Klassifikationssatz ist nun: Für einen CW-Komplex $X$ sind äquivalent

(a) $X$ hat eine $\mathcal{C}$-Struktur (d.h. $\exists$ ein stetiger Funktor $F: \mathcal{C} \to Top$ mit $F(n) = X^n$, $F(f \oplus g) = Ff \times Fg$, $F(\pi) =$ Permutation $\pi$ der Faktoren von $X^n$ für $\pi \in S_n$), sodaß

(i) $\mathcal{C}(n,1)$ ist zusammenziehbar $\forall n$

(ii) $\exists f \in \mathcal{C}(2,1)$, sodaß $F(f): X \times X \to X$ auf der Menge $\pi_0 X$ der Wegekomponenten eine Gruppenstruktur induziert

(b) $X$ ist unendlicher Schleifenraum.

Rainer Vogt (Saarbrücken)

Über einfache periodische Kettenbrüche und das Legendresche Symbol

4.2.1974

Sei $\alpha > 1$ eine reell-quadratische Irrationalität und

$$\alpha = [a_1^*, \dots, a_j^*, a_1, \dots, a_\ell]$$

die Entwicklung von $\alpha$ in einen einfachen periodischen Kettenbruch, bei dem die Länge $j$ der Vorperiode und die Periodenlänge $\ell$ minimal gewählt sei. Dann ordne man $\alpha$ die alternierende Summe ~~*~~

$$\Sigma_\alpha = \sum_{\nu=1}^{\ell} (-1)^\nu a_\nu$$

zu.

Hierfür gilt der von P. und S. Chowla vermutete Satz:

Seien $p$ und $q$ Primzahlen mit $p \equiv 3 \bmod 4$ und $q \equiv 5 \bmod 8$. Dann gilt

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\Sigma_{\sqrt{pq}}}.$$

Nach Hurwitz (1895) ist die Klassenzahl $h_{-pq}$ von $\mathbb{Q}(\sqrt{-pq})$ genau dann durch vier teilbar, wenn $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$ ist. Man hat daher

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{1}{4} h_{-pq}}.$$

Diese Gleichung legt nahe, den Dirichletschen Körper vierten Grades zu betrachten:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathbb{Q}(\sqrt{-pq}, \sqrt{-4}) \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash, "\chi"] \arrow[dr, dash] & \\ \mathbb{Q}(\sqrt{-pq}) \arrow[dr, dash] & \mathbb{Q}(\sqrt{4pq}) \arrow[d, dash] & \mathbb{Q}(\sqrt{-4}) \arrow[dl, dash] \\ & \mathbb{Q} & \end{tikzcd}$$

Der Zerlegung $4pq = (-4)(-pq)$ in zwei Diskriminanten imaginär-quadratischer Zahlkörper ist in eindeutiger Weise ein Geschlechtercharakter $\chi$ des reell-quadratischen Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\sqrt{4pq})$ zugeordnet. Die mit diesem Charakter gebildete L-Funktion läßt sich in das Produkt aus den zu $\mathbb{Q}(\sqrt{-4})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{-pq})$ gehörigen L-Funktionen zerlegen

$$L(s,\chi) = L_{-pq}(s)\, L_{-4}(s).$$

An der Stelle 1 ergibt das die Klassenzahlformel

$$h_{-pq} = \frac{8\sqrt{4pq}}{(2\pi)^2}\, L(1,\chi)$$

Dabei läßt sich $L(s,\chi)$ als Summe von Ringklassen-L-Funktionen

$$L(s,\chi) = \frac{1}{2} \sum_{\mathfrak{k}} \chi(\mathfrak{k})\, L(s,\mathfrak{k})$$

schreiben. Diese sind auch an der Stelle 1 analytisch, und zwar ist

$$L(1,\mathfrak{k}) = \frac{(2\pi)^2}{24\sqrt{4pq}}\, \Psi(\mathfrak{k}) \quad \text{mit} \quad \Psi(\mathfrak{k}) \in \mathbb{Z}.$$

Diese ~~Ring~~ Klasseninvarianten $\Psi(\mathfrak{k})$ lassen sich als alternierende Summen von der Form ★ darstellen. Kongruenzbetrachtungen führen dann zum Beweis des obigen Satzes.

H. Lang (Köln)

Homotopietheorie von Abbildungen in Produkte von Eilenberg-MacLane-Räumen. 5. 2. 1974

Sei $R$ ein Ring, $R = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $p$ prim, $p>3$ oder $R \subset \mathbb{Q}$. Sei $L = L_0 \oplus L_1 \oplus \dots$ ein graduierter Modul. Sei $K(L) = \prod K(L_i, i)$ und nehmen wir an, es sei $K(L)$ mit der Struktur eines H-Raumes, der homotopieassoziativ ist, versehen. Dann induziert das Samelson-Produkt auf $L = \pi_* K(L)$ die Struktur einer graduierten Lie-Algebra. Wir behandeln folgende Fragen:

(i) Welche graduierte Lie-Algebren können als Samelson-Lie-Algebren realisiert werden?

(ii) Ist $X$ ein Raum, wovon hängt dann die Gruppenstruktur auf $[X, K(L)]$ ab? Man berechne sie aus der Struktur der Samelson-Lie-Algebra.

Wir zeigen z.B. daß sich eine graduierte Lie-Algebra $L$, die als Modul frei und von endlichem Typ ist und deren universelle einhüllende Algebra als Coalgebra frei ist, als Funktionen-Lie-Algebra realisieren. Ist L eine solche Lie-Algebra, so kann man unter -restriktiven- Voraussetzungen die Gruppe $[X, K(L)]$ durch "ihre Lie-Algebra" beschreiben.

Hans Scheerer (Heidelberg)

Wellenfronten und singuläre Träger von Faltungen
8.2.74

Sei $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ eine Distribution mit kompakten Träger. Die Wellenfront von T $WF(T)$ ist definiert als die Teilmenge von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, auf der ~~alle Pseudodiffer...~~ die Hauptsymbole aller Pseudodifferentialoperatoren A der Ordnung 0 verschwinden müssen für die $AT \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist. Sind $T, S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ so gilt

$$WF(T*S) = \{(x+y, \xi),\ (x,\xi) \in WF(T),\ (y,\xi) \in WF(S)\}$$

Die Projektion der Wellenfront auf den ersten Faktor ist der singuläre Träger von T $ss(T)$. $\mathrm{co}\, ss(T)$ bezeichnet die konvexe Hülle von $ss(T)$. Damit gilt:

Ist $\mathrm{co}\, ss(T*S) = \mathrm{co}\, ss\,T + \mathrm{co}\, ss\,S$ für alle $S \in \mathcal{E}'$ so ist $(x, \xi) \in WF(T)$ für beliebiges $\xi$, falls x Extremalpunkt von $ss(T)$ ist

Günter Hengel (Kaiserslautern)

## Role of Adèles in Harmonic Analysis on Solvmanifolds

Let $N$ be a connected, simply connected nilpotent Lie group, and let $\Gamma \subseteq N$ be a discrete subgroup with $N/\Gamma$ compact. C.C. Moore considered the problem of decomposing $L^2(N/\Gamma)$ into irreducible subspaces for the left action of $N$. He did not completely solved this, but considered and solved the associated problem of decomposing $L^2(N_A/N_Q)$, where $N_A$ is the adele group associated to the rational structure on $N$ defined by $\mathbb{Q}$. In fact, it may be shown that some very elementary facts, combined with standard properties of the adele construction, allow one to derive the decomposition of $L^2(N/\Gamma)$ from that of $L^2(N_A/N_Q)$. Furthermore, consideration of $L^2(N_A/N_Q)$ leads to further insights and a clearer picture of $L^2(N/\Gamma)$.

Roger Howe (Bonn)

## Eindeutige Zerlegung von Gittern über Ordnungen

Sei $R$ eine Ordnung (über einem Dedekind Ring $\mathfrak{o}$) in einer halbeinfachen Algebra. Das Problem ist diejenigen Ordnungen anzugeben, für welche alle Gitter sich eindeutig als direkte Summe von unzerlegbaren darstellen lassen (Krull-Schmidt). Zunächst wird gezeigt dass man sich auf den Fall beschränken kann, daß $\mathfrak{o}$ semi-lokal ist. Die notwendige und zureichende Bedingung lautet dann

1) Es gibt eine zweiseitige Zerlegung $R = R^0 \oplus R^1 \oplus \cdots \oplus R^t$ wo $R^0$ Maximalordnung und jedes $R^i_q$, $i>0$, genau für $q = p_i$ von einer Maximalordnung verschieden ist ($p_1, \dots, p_t$ die Primideale von $\mathfrak{o}$)

2). Jeder einfache $k \otimes R^i$-Modul bleibt – für $i>0$ – einfach wenn man zur $p_i$-adischen Komplettierung übergeht.

H. Jacobinski

(28.2.74)

# Lokalisierung stetiger Moduln.

Nach einer Arbeit mit B. RATTRAY kann Lokalisierung in jeder vollständigen Kategorie $\mathcal{A}$ getrieben werden. Es soll ein Objekt $I$ aus $\mathcal{A}$ gegeben sein, dann hat man den von $I$ abhängigen Funktor $T = I^{\mathrm{Hom}(-,I)} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ mit einer natürlichen Transformation $\eta : 1 \to T$. Man setzt $\kappa : Q \to T$ für den Egalisator von $\eta T, T\eta : T \rightrightarrows T^2$, dann weiß man daß die folgenden Aussagen über $I$ gleichwertig sind:

(1) $\eta Q$ ist Isomorphismus;

(2) jeder Morphismus $g : Q(A) \to I$ kann auf $T(A)$ erweitert werden (man sagt $I$ ist $\kappa$-injektiv);

(3) die Limesabschließung von $I$ in $\mathcal{A}$ besteht aus all den Objekten $A$ für die $\eta(A)$ Isomorphismus ist.

Viele bekannten Konstruktionen der Mathematik sind Spezialfälle des mit einem $\kappa$-injektiven Objekt $I$ verbundenen Lokalisierungsfunktoren $Q$, so die Stone-Čechsche Kompaktifizierung und die Konstruktion einer Garbe aus einer Prägarbe. Wenn $\mathcal{A} = \mathrm{Mod}\, R$ und $I$ injektiv ist, erhält man die übliche Lokalisierung von Bourbaki-Gabriel, die gewöhnlich durch einen idempotenten Filter von Rechtsidealen beschrieben wird. Dagegen kann ein Ringepimorphismus $R \to S$ vorliegen und man wählt $I$ als injektiven Kogenerator von $\mathrm{Mod}\, S$, dann ist $Q \cong (-) \otimes_R S$.

Jetzt sei $\mathcal{A} = \mathrm{Cont}\, R$, die Kategorie der stetigen $R$-Moduln. Ihre Objekte sind Objekte aus $\mathrm{Mod}\, R$ die auch topologische Gruppen sind und auf die jedes Element von $R$ stetig wirkt. Ihre Morphismen sind stetige $R$-Homomorphismen. $I$ soll jetzt ein quasi-injektiver $R$-Modul sein mit der diskreten Topologie, dann ist $I$ $\kappa$-injektiv und $Q(A) = \mathrm{Hom}_E(\mathrm{Cont}_R(A, I), I)$, wobei $E = \mathrm{End}_R(I)$. Wenn $I$ vollständig reduzibel ist und

A die I-adische Topologie hat ( Kerne von Morphismen $A \to I^n$ werden als offene Umgebungen von Null erklärt ), dann ist $Q(A)$ schon die Vervollständigung von A. Im Falle $A = R$ ist das der Jakobson'sche Dichtigkeitssatz.

J. Lambek ( Montreal - Paris )

Bemerkungen zur Verwendung randomisierter Entscheidungsverfahren 29.4.74

Anhand des Problems der optimalen Wahl von Austausch-Sortieralgorithmen wird gezeigt, daß die entscheidungstheoretisch naheliegende Verwendung des Minimax-Prinzips häufig auf randomisierte Entscheidungsverfahren führt, die wegen des hohen Randomisierungsaufwandes für die Praxis indiskutabel sind. Der Versuch, diese Kosten durch die Wahl einer geeigneten Utility-Funktion darzustellen, scheitert daran, daß der Übergang zu randomisierten Verfahren zwar Mischungsmengen liefert, die resultierende Präferenzstruktur jedoch nicht die für die Existenz einer bzgl. Mischungen linearen Utility-Funktion notwendigen Eigenschaften behält. Bei der Definition von allgemeineren gemischten Erweiterungen führen Meßbarkeitsbedingungen sogar dazu, daß nur noch die triviale Präferenz ( alles indifferent ) darstellbar ist.

Norbert Schmitz ( Münster )

Unabhängigkeitszahlen von Produktgraphen 6.5.74

Zur Bestimmung der Null-Fehler-Kapazität eines Informationskanals erweist sich die Graphentheorie als wichtiges Hilfsmittel. Shannon formulierte 1956 das Problem und zeigte, daß seine Lösung sich ergibt aus der Bestimmung der Unabhängigkeitszahlen (UZ) starker Graphenprodukte. Zugleich gab er mit seinem 5-buchstabigem Kanal $C_5$ das erste Beispiel dafür, daß die UZ nicht multiplikativ ist. Mittlerweile hat man erkannt, daß ein enger Zusammenhang besteht zwischen der Nicht-Multiplikativität der UZ und Zyklen ungerader Länge. Für die UZ von Produkten solcher Zyklen werden obere und untere Schranken angegeben, die in manchen Fällen zu expliziten Formeln führen. Insbesondere ergeben sich für die UZ der dritten bzw. vierten Potenz von $C_5$ die Werte 10 bzw. 25. Olaf Krafft (Hamburg)

20/5/74.

<u>Rings with polynomial identities</u>

Striking changes in technique have resulted in this field from the discovery of central polynomials by E. Formanek. It has led to Amitsur's proof of the M. Artin - Procesi theorem that a PI ring, whose homomorphic images have the same PI degree, is an Azumaya algebra of rank $n^2$. The theorem has applications (Small) to prove that a PI ring with max on ideals has the descending chain condition on prime ideals and (Herstein - Small) that in a PI ring with max-r then $J_1 = \bigcap_1^\infty J^n$ is 0 whenever a simple factor ring has the same PI degree as the given ring and in general, defining $J_{i+1} = \bigcap_{n=1}^\infty J_i^n$ then $J_t = 0$ for some integer $t$. It is known that $J_1$ may be a nil (non-zero) ideal and the present conjecture is that this holds in general. It is known (Jategaonkar) that $J_1 = 0$ when the ring has PI and <u>max-l</u> as well as max-r.

A. W. Goldie (Leeds - Giessen).

Dual Topology of a Nilpotent Lie Group

With Kirillov's classification of the dual of a simply connected nilpotent Lie group by the orbits of the group action on the dual of the Lie algebra, we have the conjecture that the hull-kernel topology of the dual corresponds to the quotient (of the Euclidean) topology of the orbit space. The conjecture is true for simply connected nilpotent Lie groups, and can be extended (as a conjecture) to exponential solvable groups. For the oscillator group (non-exponential, solvable, type I) ~~not so~~ the continuity of $\mathfrak{g}^*/\mathrm{Ad}\,G \to \hat{G}$, proved by Yukovszky for exponential groups, ~~is true~~ is not even true.

Ian D Brown (Rennes)

Über arithmetisch ganze Differentiale 28.5.74

Der Begriff des arithmetisch ganzen Differentials ist von Kähler geprägt. Er ist eine Verfeinerung des klassischen Begriffs des abelschen Differentials 1. Gattung und Verallgemeinerung des Begriffs der ganzen Elemente eines Zahlkörpers gebildet.

Es werden neben der Definition dieses Begriffs einige eigene Ergebnisse mitgeteilt und ein Kriterium für die Minimalität eines Modells eines ein-dimensionalen Funktionenkörpers (über $\mathbb{Z}$) angegeben.

R. Berndt (Hamburg)

K-Theory and linear algebra 30-5-74

In this talk we considered the following problem. Given a finite cyclic group $\pi$ of prime order $p$ find the stable isomorphism classes of finitely generated projective $\mathbb{Z}\pi$-modules where $\mathbb{Z}\pi$ is the integral group ring of $\pi$. We showed how the $K_1-K_0$ Mayer-Vietoris sequence of a surjective fibred square provided us with an easy means of answering the problem.

Anthony Bak (Bonn)

Topologische Eigenschaften von reellen projektiven Transformationen 4 - 6 - 1974

Bis auf topologische Equivalenz gibt es auf die reelle projektive Gerade P nur die folgende Automorphismen
$f: x \to x;\ x+1;\ 2x;\ -2x \in \mathbb{R} \cup \infty = P$ und

$f_\alpha : \varphi \longrightarrow \varphi + \alpha \in \mathbb{R} \bmod \pi\mathbb{Z} = P$.

Allgemeiner gilt (*) daß zwei Automorphismen von $\mathbb{R}P(n) = (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) / (\mathbb{R} - \{0\})$ gegeben von $(n+1) \times (n+1)$-Matrizen $\sigma'$ und $\sigma''$, dann und nur dann homeomorph sind, wenn $k;\ \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_k > 0;\ \mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_k > 0$, und Matrizen mit absolut Wert der Eigenwerten gleich Eins, $\sigma_1, \ldots \sigma_k$, existieren, so daß $\sigma'$ und $\sigma''$ linear konjugiert sind zu

$\sigma_\lambda = \lambda_1 \sigma_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_k \sigma_k$ und $\sigma_\mu = \mu_1 \sigma_1 \oplus \cdots \oplus \mu_k \sigma_k$.

(*) Haben $\sigma'$ und $\sigma''$ periodische Punkte mit Perioden ungleich Primzahlpotenz, so ist die Notwendigkeit der Bedingung noch nicht bewiesen worden können.

An Beispiele wird erläutert daß alle "andere Eigenschaften" von projektive Automorphismen topologisch definiert sind. "Popularität" spielt dabei eine Rolle.

Dies ist ein Beispiel daß das Mathematische Leben froh auf tausendfache Art zum Himmel geht. Die Freude daran auf hohem und auf niedrigem Niveau ist ein wesentliches Element der menschlichen Kultur. Man soll dies gut pflegen so lange die endgültige Vernichtung von der Seite 13 noch nicht statt findet

Nicolaas H. Kuiper Bures sur Yvette
Frankreich

## Cohomology of topological groups and applications.

(10.6.74)

Let $U$ be a unitary representation of a LC group $G$ in a Hilbert space $H$.

Basic facts and definitions concerning the 1-cohomology, specially definition of the extended space $\tilde{H}$ as $\bar{B}^1$ with a natural representation of $G$.

Old results on the nullity of $H^1$, and more recent ones for the case where $G$ is an exponential Lie group (J. Pichaud) or a general Lie group, but $U$ has a non trivial infinitesimal character (Pinczon and Simon).

Recent results on the nullity of $H^n$, $n > 1$, when $G = \mathbb{R}$, or when $G =$ Poincaré group and $n = 2$ (G. Rideau).

Detailed description of $Z^2$ when $G = \mathbb{Z}^k$

A. Guichardet. Paris

## Arithmetische Ringe stetiger Funktionen. 18.6.74

Ein topologischer Ring $R$ sei arithmetisch genannt, wenn der Verband $V(R)$ seiner abgeschlossenen Ideale distributiv ist; dabei ist die Verbindung von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b} \in V(R)$ die abgeschlossene Hülle $\Gamma(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$. $V(R)$ ist eine Halbgruppe unter $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b} = \Gamma(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})$. Die Struktur der verbandsgeordneten Halbgruppe $V(R)$ nennt man die Arithmetik von $R$.

Der Ring $\mathbb{P} = \mathbb{C}[[\omega]]$ der formalen Potenzreihen in $\omega$ ist lokal konvex unter den Halbnormen $p_n : \sum_{i \geq 0} c_i \omega^i \longrightarrow \sum_{0 \leq j \leq n} |c_j|$. Auch der Ring $R = \mathcal{C}_{\mathbb{P}}(X)$ der auf einem kompakten Hausdorff-Raum $X$ stetigen Funktionen mit Werten in $\mathbb{P}$ ist lokal konvex unter den Halbnormen $q_n f = \sup\{p_n(f(x));\ x \in X\}$.

Der Ring $R$ ist arithmetisch und seine Arithmetik ist ähnlich der klassischen:
$\mathfrak{a} = \bigcap \mathfrak{m}^{\alpha(\mathfrak{m})}$, wobei $\mathfrak{m}$ den zu $X$ homöomorphen Raum $\mathcal{X}$ der maximalen Ideale von $R$ durchläuft. Die Exponenten sind dann eindeutig bestimmt, wenn man sie maximal nimmt, und $\mathfrak{m}^{\infty} = \mathfrak{n}_{\mathfrak{m}} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{m}^{n}$ definiert. Genau diejenigen Funktionen $\alpha$ auf $\mathcal{X}$ treten dabei auf, die oberhalbstetig sind. Die Exponenten des Produktes $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$ sind die Summen der Exponenten von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ aus $V(R)$. Es ist bereits $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in $V(R)$; auch sind bereits die $\mathfrak{m}^{n}$ abgeschlossen.

Das Haupthilfsmittel beim Beweis ist ein Anti-Isomorphismus von $V(R)$ auf den Verband $\mathfrak{W}(X)$ der mit $X$ beginnenden absteigenden Folgen abgeschlossener Untermengen von $X$ und eine Operation auf $\mathfrak{W}(X)$, die die Produktbildung in $V(R)$ reflektiert.

$R / \mathfrak{n}_{\mathfrak{m}}$ ist topologisch und algebraisch isomorph zu $\mathbb{P}$.

Ernst August Behrens (Hamilton, Ont., – Frankfurt a.M.)

Endliche Erweiterungen der Fundamentalgruppen von Flächen 24.6.1974

Es wird der folgende Satz besprochen: Sei $G$ eine Gruppe, $G \triangleright \pi_1(F)$, wobei $F$ eine Fläche endlichen Typs ist, $[G : \pi_1(F)] < \infty$. Ferner gelte: (*) Ist $g \in G$ mit $g^{-1} f g = f$, $\forall f \in \pi_1(F) \Rightarrow g = 1$. (**) Sind $x, y \in G$ mit $\underbrace{x^a = y^b = (xy)^c = 1}_{(a,b,c \geq 1)}$, dann ist die von $x$ und $y$ erzeugte Gruppe zyklisch. Dann folgt, daß $G$ eine Fuchssche Gruppe ist. – Daraus folgt u.a., daß torsionsfrei endliche Erweiterungen der Fundamentalgruppen von Flächen selbst auch Fundamentalgruppen von Flächen sind. Der Beweis des Satzes lehnt sich eng an den Beweis des Satzes von J. Nielsen über zyklische Erweiterungen an, wie er sich in Acta Math. 75 findet.

(H. Zieschang)

Zum Rang- und Isomorphieproblem für freie Produkte mit Amalgam — 1.7.74

Aufbauend auf einen Satz von H. Zieschang über die Nielsensche Kürzungsmethode in freien Produkten wird ein Algorithmus entwickelt, der für ebene diskontinuierliche Gruppen mit kompaktem Fundamentalbereich vom Geschlecht $g \geq 1$ und ohne (orientierungsändernde) Spiegelungen ein beliebiges minimales Erzeugendensystem in endlich vielen Schritten in ein gegebenes minimales Erzeugendensystem überführt. Weiter werden Verallgemeinerungen angesprochen für Gruppen, die sich in analoger Weise als freie Produkte mit Amalgam beschreiben lassen.

(G. Rosenberger, Hamburg).

8. Juli 1974 (70. Geburtstag von H. Cartan):

Aus gegebenem Anlaß wurde anstelle des vorgesehenen Themas "Analytische Funktionenalgebren" über die Jugendarbeiten von H. Cartan (1928–1935) berichtet. Es wurde insbesondere auf die Abbildungstheorie eingegangen und deren Entwicklung bis zur Gegenwart beleuchtet.

(R. Remmert)

14.10.1974 **Kongruenzeigenschaften einer Klasseninvariante reell-quadratischer Zahlkörper**

Für $p \in \mathbb{P} \setminus \{3\}$, $p \equiv 3 \pmod 4$ sei $K := \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ und $\mathcal{G}$ die Gruppe der (gewöhnlichen) Idealklassen von $K$. In jeder Klasse $C \in \mathcal{G}$ gibt es (mindestens) ein reduziertes Ideal $\mathfrak{a}$, d.h. ein Ideal mit der kanonischen Basis $a, -b+\sqrt{p}$ $(a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}_0)$, so daß $\gamma := \frac{-b+\sqrt{p}}{a}$ reduziert ist $(0 < \gamma < 1, \gamma' < -1)$. Ist $[\overline{a_1, \dots, a_{2r}}]$ die primitive Periode der (reinperiodischen, gewöhnlichen) Kettenbruchentwicklung von $\gamma$, so besitzt

$$\Psi(\mathfrak{a}) := \left(\frac{a}{p}\right) \cdot \sum_{k=1}^{2r'} (-1)^k a_k$$

denselben Wert $\Psi(C)$ für alle reduzierten Ideale $\mathfrak{a}$ einer festen Klasse $C$. Für diese Klasseninvariante, die bis auf den Faktor $\left(\frac{a}{p}\right)$ mit einer Modulinvariante von Rademacher (für den Modul $\mathbb{Z}\cdot\gamma + \mathbb{Z}\cdot 1$) übereinstimmt, bewies F. Hirzebruch die Identität

$$\sum_{C \in \mathcal{G}} \Psi(C) = 3h(-p),$$ wobei $h(-p)$ die Klassenzahl von $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ bezeichnet.

Für $h(4p) := \operatorname{card} \mathcal{G} = 1$ folgt speziell:

(*) $\Psi(C) = 3h(-p)$.

Hirzebruch vermutet, daß unter den obigen Voraussetzungen über $p$ auch die Umkehrung richtig ist: Aus (*) folgt $h(4p) = 1$, wenn $C = C_0$ die Einsklasse von $\mathcal{G}$ ist.

Unter Verwendung der Modulinvariante von Rademacher erhalten wir folgendes Teilergebnis: $h(4p) \cdot \Psi(C_0) \equiv 3h(-p) \pmod{16}$.

Ist $\varepsilon = u + v\sqrt{p}$ die Grundeinheit von $K$, so gilt außerdem $\Psi(C) \equiv v\left(p - 4 + 2\left(\frac{u}{v}\right)\right) \pmod 8$ für alle $C \in \mathcal{G}$, wobei $\left(\frac{u}{v}\right)$ das Jacobi-Symbol ist. Ähnliche Kongruenzen modulo 8 wurden von H. Lang mit Hilfe eines Satzes von C. Meyer für die Invarianten aller Klassen im Hauptgeschlecht beliebiger reell-quadratischer Zahlkörper bewiesen.

H. Müller

21.10.1974 <u>Multiplicative properties of modular subgroups.</u>

Let $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$ be the classical modular group. Let $G$ be a subgroup of $\Gamma$ of finite index. The most important parameters associated with $G$ are $\mu$, the index of $G$; $t$, the number of parabolic classes of $G$; $e_k$, the number of elliptic classes of order $k$ $(k = 2, 3)$; and $g$, the genus of $G$. These are related by the formula $g = 1 + \frac{\mu}{12} - \frac{t}{2} - \frac{e_2}{4} - \frac{e_3}{3}$.

We first prove that if $G, H$ are subgroups of $\Gamma$ of finite index such that $GH = HG = \Gamma$, then $f(G \cap H) = f(G) f(H)$, where $f$ is any of the functions $\mu, e_2, e_3$. Furthermore $t(G \cap H) \geq t(G) t(H)$, with equality when the parabolic levels (in the sense of Fricke and Wohlfahrt) are relatively prime. This is then used to show that if $G$ is a congruence subgroup of level $n$, and $G\Gamma(p^e) = G_p$ the $p$-component of $G$, where $n = \prod p^e$ is the canonical decomposition of $n$ into prime power factors and $\Gamma(p^e)$ is the principal congruence group of level $p^e$, then $G = \bigcap_p G_p$ and $f(G) = \prod_p f(G_p)$, where $f$ is any of the functions $\mu, t, e_2, e_3$.

Finally, applications to the determination of all congruence subgroups of $\Gamma$ with a fixed number of parabolic classes, or to the determination of all free congruence subgroups of $\Gamma$, are discussed.

M. Newman (Wash. D.C., U.S.A.)

4. Nov. 1974 **Korovkinsche Sätze für Folgen von Kontraktionen und positiven Kontraktionen in Lebesgueräumen**

Ausgehend von Resultaten von Korovkin, Dzjadyk, Šaškin und Wulbert wird das folgende Problem diskutiert: Sei $E$ ein Banachraum, $\mathcal{L}_1(E)$ die Klasse der linearen Kontraktionen von $E$ in sich. Ist $T = \{T_n;\ n=1,2,\dots\}$ eine Folge in $\mathcal{L}_1(E)$, dann bezeichnen wir mit $C_T$ die Menge $\{f \in E : T_n f \to f \text{ in } E\}$, die sogenannte Konvergenzmenge von $T$. Weiter definieren wir für ein $S \subset E$, $\gamma_1(S) = \bigcap \{C_T : S \subset C_T \text{ u. } T \text{ in } \mathcal{L}_1(E)\}$, den Schatten von $S$. Für einen Banachverband $E$ definieren wir entsprechend den positiven Schatten $\gamma_1^+(S)$ einer Menge $S$ durch $\gamma_1^+(S) = \bigcap \{C_T : S \subset C_T \text{ u. } T \text{ in } \mathcal{L}_1^+(E)\}$, wobei $\mathcal{L}_1^+(E)$ die Klasse der positiven linearen Kontraktionen auf $E$ in sich ist. Ist $S$ so, dass $\gamma_1(S)$ bzw. $\gamma_1^+(S)$ gleich $E$ gilt, dann nennt man $S$ eine Korovkinsche Menge bzgl. $\mathcal{L}_1(E)$ bzw. $\mathcal{L}_1^+(E)$. Für die Lebesgueräume wurden die Schatten für beliebige Mengen $S$ charakterisiert. So wurden u. a. die folgenden Sätze bewiesen. Thm 1. Für eine Menge $S$ in $L^p[0,1]$, $1 \le p < \infty$, ist $\gamma_1^+(S)$ gleich dem abgeschlossenen Vektorunterverband, der von $S$ erzeugt wird. Thm 2. Für eine Menge $S$ in $L^p[0,1]$, $1 \le p < \infty$, ist $\gamma_1(S)$ gleich dem Wertebereich einer "minimalen" Projektion in $\mathcal{L}_1(L^p)$, d.h., es existiert ein $P_0 \in \mathcal{L}_1(L^p)$, $P_0^2 = P_0$ mit $\gamma_1(S) = \mathcal{R}(P_0)$ und für jedes $P \in \mathcal{L}_1(L^p)$, $P^2 = P$ und $S \subset \mathcal{R}(P)$ gilt $\mathcal{R}(P_0) \subset \mathcal{R}(P)$. Dieses Resultat geht für $1 < p < \infty$ auf S. Bernau zurück.

H. Berens (Erlangen)

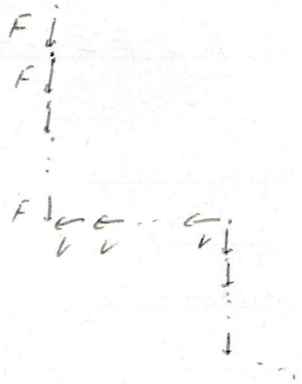
11.11.74 Kommutative algebraische $p$-Gruppen

Die Untersuchung der kommutativen endlichen algebraischen Gruppen über einem Körper der Char $p>0$ ($k$ alg. abgeschlossen) führt mit Hilfe der Theorie der Dieudonné-Moduln auf die Untersuchung von Moduln endlicher Länge über dem nicht-kommutativen Ring $D_k = W(k)[F,V]/_{FV=VF=p}$ wobei

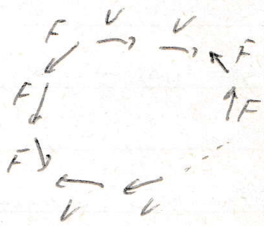
$W(k)$ der Ring der Witt'schen Vektoren ist und folgende Vertauschungsregeln zwischen den Elementen $x=(x_0,x_1,\dots)\in W(k)$ und den Variablen $F$, $V$ bestehen: $F\cdot x = x^{(p)}F$, $xV = Vx^{(p)}$ mit $x^{(p)}=(x_0^p,x_1^p,\dots)$. Die Klassifikation dieser Moduln ist ein hoffnungsloses Unterfangen (die Spezialisten zählen diesen Fall zu den „wilden Gattungen"). Im Zusammenhang mit den abelschen Varietäten treten aber auch solche Gruppen auf, die von $p$ annulliert werden, und diese entsprechen den Moduln endl. Länge über dem Ring $D_k/pD_k = k[F,V]/(FV=VF=0)$

Mit ähnlichen Methoden wie Gelfand und Ponomarev (1968, Untersuchungen über die Lorentzgruppe) gelingt es hier, die unzerlegbaren Moduln zu klassifizieren:

Typ I



Typ II



Die Punkte entspr. je einem Exemplar von $k$ und die Pfeile verdeutlichen, wie $F$ bzw $V$ wirken. Man kann auch entscheiden, welche Typen von p-Gruppen als Gruppen von p-Teilungspunkten bei abelschen Varietäten auftreten können: direkte Summen von Moduln vom Typ II mit der Eigenschaft, dass gleich viele F- und V-Pfeile auftreten. Dass diese auch wirklich alle vorkommen, ergibt sich aus neueren Resultaten von Oort und Manin-Tate.

H. Kraft (Bonn)

18 Nov. 74 Fundamental groups of non-compact 3-manifolds

A basic question in the theory of 3-manifolds is "what sort of groups can be fundamental groups of 3-manifolds?". In the lecture, I was concentrating on the cohomology of $G$ and in particular on the cohomological dimension (c.d.) of $G$.

Start by considering an orientable, irreducible 3-manifold $M$. The Sphere Theorem of Papakyriakopoulos and Whitehead implies that $\pi_2(M)=0$. If $G = \pi_1(M)$ is infinite, then $H_n(\tilde{M})=0$, $n \geq 1$, where $\tilde{M}$ is the universal covering space of $M$ and so $M$ is aspherical and the cohomology of $G$ is the same as that of $M$. Hence such a $G$ has c.d. $\leq 3$.

Now ~~we~~ consider any $G$ which is $\pi_1$(some $M^3$) and is finitely generated (f.g.). Such a $G$ is the fundamental group of a compact 3-manifold $M$ (Scott–Shalen). Now a theorem of Kneser tells us

Thm (Kneser) If $M^3$ is compact, then $M \cong M_1 \# M_2 \# \dots \# M_r$ where each $M_i$ is irreducible or is $S^1 \times S^2$ or $S^1 \tilde{\times} S^2$.

Hence $G = \pi_1(M) = \pi_1(M_1) * \dots * \pi_1(M_r)$ and each $\pi_1(M_i)$ is finite or $\mathbb{Z}$ (if $M_i \cong S^1 \times S^2$ or $S^1 \tilde{\times} S^2$) or $\pi_1(M_i)$ is infinite and $M_i$ is irreducible. Using the Projective Plane Theorem of Epstein one deduces

Corollary 1 If $G$ is $\pi_1$(some $M^3$), $G$ is f.g. and not a free product, is infinite and has no 2-torsion, then c.d. $G \leq 3$.

Corollary 2 If $G$ is $\pi_1$(some $M^3$), $G$ is f.g., infinite and torsion-free, then c.d. $G \leq 3$.

Unfortunately, Kneser's result is false in the case of non-compact manifolds. Despite this one can prove

<u>Thm</u> If $G=\pi_1(M^3)$, $G$ is not a free product and has no 2-torsion, then there exists a 3-manifold $N$ with $\pi_1(N)\cong G$, and $\pi_2(N)=0$.

<u>Corollary</u>: Such a $G$ has c.d. $\leq 2$, if we assume $G$ is <u>not f.g.</u>

Two applications of this result were given. One is a new (but harder!) proof of a known result, the other is a new result.

<u>Thm</u> (Evans–Moser) If $G=\pi_1(M^3)$, $G$ is abelian and not f.g., then $G\subset \mathbb{Q}$, the additive group of the rationals.

<u>Thm</u> If $G=\pi_1(M^3)$, $G\cong A\times B$ non-trivially and $G$ is not f.g., then one factor $\cong \mathbb{Z}$ and the other $\cong F_\infty$, the free group of countable rank.

This last result generalises the result of Epstein and Stallings that if $G$ is f.g. and infinite and $G=A\times B$, then one factor $\cong \mathbb{Z}$ and the other is a surface group.

Peter Scott (Liverpool)

25.11.74 Hasse-Witt-Matrix projektiver Schemata und Zetafunktion.

Es wurde zuerst die klassische Einführung der Hasse-Witt-Matrix besprochen und folgender Satz erläutert: Die H-W-Matrix der allgemeinen Kurve vom Geschlecht $g$ ist invertierbar.
Es sei $X$ ein festes projektives $k$-Schema von endlichem Typ, $k$ algebraisch abgeschlossener Körper und $H$ eine „variable" Hyperfläche vom Grad $d$. Wir wollen voraussetzen, daß sich die Kohomologien (mit Werten in den Strukturgarben) von $X$ und $X\cdot H$ nur in der höchsten Dimension unterscheiden und gilt, daß $H^n(X)\subset H^n(X\cdot H)$ enthalten ist. Eine Matrix die Frobenius auf $V = H^n(X\cdot H)/H^n(X)$ darstellt, heißt Hasse-Witt-Matrix von $X\cdot H$.
Es stellt sich die Frage, wann die H-W-Matrix von $X\cdot H$ invertierbar ist. Es sei $V=V_n\oplus V_s$ die Fittingzerlegung bzgl. Frobenius und $e(X,H)=\dim V_n$ der „Defekt" von $X\cdot H$.
<u>Vermutung</u>: Sei $H$ allgemein, Grad $H=d$, $s=$ Dimension des singulären Orts von $X$. Dann gilt

$$\frac{e(X,H)}{d^{s+1}} \xrightarrow[d\to\infty]{} 0$$

Satz: Obige Vermutung ist richtig für:

1.) $X^r$ vollständiger allgemeiner Durchschnitt

2.) $X^r$ nichtsinguläre Hyperfläche mit definierendem Polynom $f$, sofern $(\sqrt{0})^{p-1} \subset \mathfrak{a}$ ($p = \operatorname{char} k$), wobei $\mathfrak{a} = (f, \frac{\partial f}{\partial T_i}, i = 0 \cdots n+1)$ ist.

Es wurde der Beweis für 1.) für $X = \mathbb{P}_N$ besprochen.
Den Zusammenhang von Zetafunktion $Z(X \cap H, t)$ und H-W-Matrix von $X \cdot H$ erhält man über die Katz'sche Kongruenzformel (SGA 7). Aus ihr folgt, die Anzahl der Nullstellen von $Z(X \cdot H, t)$, die $p$-adische Einheiten sind ist genau dann maximal, wenn die H-W-Matrix invertierbar ist. Damit liefert obige Vermutung auch eine Vermutung über die Nullstellen der Zetafunktion.

L. Müller

2. XII. 74. Über den Modulkörper einer abelschen Varietät mit Complexer Multiplikation.

Sei $A$ eine abelsche Varietät $/ \mathbb{C}$, der Dimension $g$, mit Polarisation $\mathcal{C}$ und Complexer Multiplikation $\theta : K \hookrightarrow \operatorname{End} A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, ($[K : \mathbb{Q}] = 2g$, $K$ total imaginär quadratisch über einem total reellen Zahlkörper $F$.).

$k_{mod}$ sei der Modulkörper von $(A, \mathcal{C}, \theta)$, d.h. $k_{mod}$ ist charakterisiert durch:

$$\text{für } \sigma \in \operatorname{Aut} \mathbb{C} \text{ ist } (A, \mathcal{C}, \theta) \underset{\mathbb{C}}{\simeq} (A^\sigma, \mathcal{C}^\sigma, \theta^\sigma) \iff \sigma|_{k_{mod}} = id.$$

Vermutung (Shimura): $(A, \mathcal{C}, \theta)$ besitzt ein Modell, welches über $k_{mod}$ definiert ist.

Diese Vermutung wird unter folgenden Voraussetzungen bewiesen: $k_{mod}$ ist nicht "speziell" (im Sinne des Grunwald-Wang'schen Satzes),

$O^{-1}(\mathrm{End}\,A) \supset O_F$, wobei $O_F$ die Hauptordnung von F ist.

E. Maus

9.12.74: Miscellaneous Problems of Rank Order Theory.

For statistical inference pertaining to general linear models, several rank order tests & estimates are presented. A review of Hájek's (1968 Ann. Math Stat) paper along with various applications in the theory of ~~general~~ general linear hypothesis is presented. The problem of rate of convergence of the cdf ~~[illegible]~~ $\wedge$ standard normal distribution function is discussed. Also the ~~[illegible]~~ results concerning a.s. convergence and the laws of iterated logarithm are presented.

* of the simple linear rank statistics to the.

M. L. Puri

16.12.74: Martin compactification of a Borel, finely open set.

Under the Kunita-Watanabe hypotheses, we study the exit space of the local process of the given Hunt process on a Borel, finely open set. The problem is the study the final behaviour of the process at the leaving time from the given finely open set of the given process. As applications we prove an integral representation theorem for ~~f~~ non-negative finely hyperharmonic functions and a characterization theorem for finely open domains.

Nguyen Xuan Loc.

6.1.75: Stabilität linearer stochastischer Differentialgleichungen

Die Stabilität der Ruhelage $x_t \equiv 0$ einer linearen Differentialgleichung $\dot{x}_t = A(t,\omega)x_t$, $x_0 = c$, $x \in \mathbb{R}^n$, wobei die Matrix A von Zeit und Zufall abhängt, wird untersucht. Asymptotische Stabilität (im Sinne von Ljapunov) tritt hier mit Wahrscheinlichkeit 1 genau dann auf,