$\mathcal{O}^{?}(\mathrm{End}\,A) \supset \mathcal{O}_F$, wobei $\mathcal{O}_F$ die Hauptordnung von F ist.

E. Maus

9.12.74: Miscellaneous Problems of Rank Order Theory.

For statistical inference pertaining to general linear models, several rank order tests & estimates are presented. A review of Hájek's (1968 Ann. Math. Stat) paper along with various applications in the theory of ~~general~~ general linear hypothesis is presented. The problem of rate of convergence of the cdf of the simple linear rank statistics to the standard normal distribution function is discussed. Also the ~~[illegible]~~ results concerning a.s. convergence and the laws of iterated logarithm are presented.

M. L. Puri

16.12.74: Martin compactification of a Borel, finely open set.

Under the Kunita-Watanabe hypotheses, we study the exit space of the local process of the given Hunt process on a Borel, finely open set. The problem is the study the final behaviour of the process at the leaving time from the given finely open set of the given process. As applications we prove an integral representation theorem for ~~f~~ non-negative finely hyperharmonic functions and a characterization theorem for finely open domains.

Nguyen Xuan Loc.

6.1.75: Stabilität linearer stochastischer Differentialgleichungen

Die Stabilität der Ruhelage $x_t \equiv 0$ einer linearen Differentialgleichung $\dot{x}_t = A(t,\omega)x_t$, $x_0 = c$, $x \in \mathbb{R}^n$, wobei die Matrix A von Zeit und Zufall abhängt, wird untersucht. Asymptotische Stabilität (im Sinne von Ljapunov) tritt hier mit Wahrscheinlichkeit 1 genau dann auf, wenn $\text{f.s.-}\lim_{t\to\infty} x_t(c,\omega) = 0 \quad \forall c \in \mathbb{R}^n$. Der Prozeß $A(t,\omega)$ sei streng stationär, ergodisch und habe stetige Realisierungen.

Es wird $v(x) = x'Px$, $P>0$, $V_t = v(x_t(c,\omega))$ betrachtet.

Es gilt

$$V_t = v(c)\, e^{tR_t}, \quad R_t = \frac{1}{t}\int_0^t Q_s\, ds,$$

$$Q_t = \frac{x_t'\,(A_t'P + PA_t)\,x_t}{x_t' P x_t}$$

Existiert $\lim_{t\to\infty} R_t = R$, so läßt sich folgendes Kriterium formulieren:

$R<0$: Stabilität

$R>0$: Instabilität

($R=0$: keine Aussage)

Es werden verschiedene hinreichende Kriterien (von Infante, Kozin u.a.) und Beispiele angegeben. Anhand der zufälligen Mathieu-Gleichung

$$\ddot{y} + (c + A\cos(\alpha t + \varphi))y = 0, \quad \alpha, \varphi \text{ zufällig},$$

wird die Kompliziertheit der Situation verdeutlicht.

Ludwig Arnold, Bremen

13.1.75. Induzierte Darstellungen in der Theorie endlicher, algebraischer Gruppen.

~~Seien $G' \subset G$ zwei endliche, algebraische k-Gruppen derart, daß G' ein Normalteiler von G ist und M ein endlich-dimensionaler $H(G')$-Modul. Der Grundkörper k sei algebraisch abgeschlossen von positiver Charakteristik. Ist $\mathrm{Stab}_G(M)$ „klein", so kann man unter bestimmten Bedingungen die aufsteigende "Loewyreihe" des $H(G')$-Moduls $H(G)\otimes M$ beschreiben. Ist andererseits $\mathrm{Stab}_G(M)$ „groß", so kann man $H(G')$ den~~

13.1.75 Induzierte Darstellungen in der Theorie der endlichen algebraischen Gruppen.

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Grundkörper der Charakteristik $p>0$ und seien $G' \subset G$ zwei endliche algebraische Gruppen über k. (G' sei normal in G). Sei weiterhin M ein endlich-dimensionaler $H(G')$-Modul. Ist nun $\mathrm{Stab}_G(M)$ „klein“ so kann man unter bestimmten Voraussetzungen die aufsteigende Loewyreihe des ~~[illegible]~~ $H(G')$-Moduls $H(G) \otimes_{H(G')} M$ bestimmen. Ist dagegen $\mathrm{Stab}_G(M)$ „groß“, so kann man den Endomorphismenring des $H(G)$-Moduls $H(G) \otimes_{H(G')} M$ beschreiben. Aus diesen beiden Resultaten erhält man die folgenden Sätze:

1) (Blattner): Seien $G'' \subset G' \subset G$ drei endliche, algebraische Gruppen und sei G'' ein Normalteiler von G. Sei M ein einfacher G'-Modul, der als G''-Modul $\frac{1}{2}$-einfach und isotypisch ist. Gilt außerdem noch $\mathrm{Stab}_G(M_{[G'']}) = G'$, so ist auch $H(G) \otimes_{H(G')} M$ ein einfacher $H(G)$-Modul.

2) (Bleichfeldt): Sei G eine endliche überauflösbare Gruppe und M ein einfacher $H(G)$-Modul mit $\dim_k M > 1$. Dann existiert ein $G' \subsetneqq G$ und ein G'-Modul N mit $H(G) \otimes_{H(G')} N \cong M$.

3) (Morita): Sei G überauflösbar. Dann gilt: $H(G) = \prod M_{n_i}(A_i)$ mit $A_i / \mathrm{Rad}\, A_i = k^{n_i}$.

4) Ist G infinitesimal, so ist G genau dann überauflösbar, wenn $H(G) \cong \prod M_{n_i}(A_i)$ mit $A_i / \mathrm{Rad}\, A_i \cong k^{n_i}$ gilt.

5) (Huppert-Barnes): Eine (auflösbare) p-Liealgebra ist überauflösbar genau dann wenn alle maximalen Unter-p-Liealgebren die Codimension 1 haben.

6) (Huppert-Barnes): Eine auflösbare p-Liealgebra ist überauflösbar genau dann, wenn alle maximalen Ketten von Unter-p-Liealgebren dieselbe Länge haben.

7) (Green): Seien $G' \subset G$ zwei endliche, algebraische k-Gruppen derart, daß G' ein Normalteiler von G mit unipotenter Faktorgruppe ist. Für einen unzerlegbaren, endlich-dimensionalen $H(G')$-Modul M müssen dann alle Summanden einer R-K-S-Zerlegung von $H(G) \otimes_{H(G')} M$ isomorph sein, wenn $\mathrm{Stab}_G(M) = G$ gilt.

8) (Lie-Kolchin): Ist G eine ~~[illegible]~~ zusammenhängende algebraische k-Gruppe mit auflösbarer p-Liealgebra. Dann hat jede irreduzible, endlich-dimensionale Darstellung eine p-Potenz als Dimension.

9) Ist G eine zusammenhängende, nilpotente Gruppe, so entsprechen die Charaktere des maximalen, multiplikativen Normalteilers von G umkehrbar eindeutig den endlich-dimensionalen, irreduziblen Darstellungen von G.

10) Ist G eine ~~nilpot~~ algebraische infinitesimale Gruppe, so gilt:

$$G \text{ nilpotent} \Longleftrightarrow H(G) = \prod \mathbb{M}_{n_i}(A_i) \text{ mit } A_i/\mathrm{Rad}\,A_i = k \quad \forall i.$$

Detlef Voigt

20. 1. 75

Symmetrische Räume und nichtassoziativen Algebren.
Als Beispiel für die Anwendbarkeit von Teilen der Theorie nichtassoziativer Algebren auf differentialgeometrische Probleme werden die Idempotente in formal-reellen Jordan-Algebren betrachtet. Durch ihr Studium erhält man ein besonders klares Bild von den Riemannschen (komp.) symmetrischen Räumen vom Rang 1 und den Graßmannmannigfaltigkeiten. Durch Verallgemeinerung des Rayleigh-Quotienten lassen sich auch sehr spezielle Eigenwertprobleme bei reellen, symmetrischen Matrizen auf formal-reelle Jordan-Algebren übertragen.

U. Hirzebruch (GH Siegen)

27. 1. 75 Verallgemeinerungen des Hasse-Prinzips für quadratische Formen

Es sei K ein formal-reeller Körper, g eine (reguläre) quadratische Form über K. Wir untersuchen Klassen von Körpern, in denen die Eigenschaften gelten:

H_n: jede quadratische Form g über K mit dim g = n, die bei jeder Anordnung von K indefinit ist (total indef.), ist isotrop in K.

Das kleinste n, sodaß ein Körper K die Eigenschaft H_n hat, ist für formal-reelle Körper ein Ersatz für die u-Invariante im Falle nicht formal-reeller Körper ($u(K)$ = ~~kleinste~~ größte Dimension einer anisotropen Form)

Es gilt (Elman-Lam-P.)

$$H_2 \Rightarrow H_3 \Leftarrow H_4 \Rightarrow H_5 \Leftrightarrow H_6 \Rightarrow H_7 \Leftrightarrow H_8 \Rightarrow \dots H_n \Rightarrow H_{n+1}$$

Algebraische Zahlkörper gehören zu H_5 (folgt aus dem <u>Hasse</u>-Prinzip), algebraische Funktionenkörper vom Transzendenzgrad 1 über $\mathbb{R}$ gehören zu H_4.

Zum Beweis der obigen Implikationskette wird das schwächere (Hasse-) Prinzip WH ~~...~~ eingeführt:

WH: jede total indefinite quadratische Form g über K ist schwach isotrop, d.h. es gibt $n \geq 1$, wobei $g \perp \ldots \perp g$ (n-mal) isotrop ist.

Es gilt: $H_n \Rightarrow WH$ für $n \geq 4$.

Die Körper $\mathbb{Q}(t)$, $\mathbb{R}(t_1, t_2)$ erfüllen z.B. nicht WH.

Dies liegt an der zu schwachen Voraussetzung "total indef."

Es gilt jedoch:

Ist g in allen Komplettierungen von K bzgl beliebiger Anordnungen (schwach) isotrop, so ist g in K schwach isotrop.

Ein Beispiel von Ellison-Cassels-Pfister zeigt, daß der Zusatz "schwach" nicht gestrichen werden kann, auch nicht bei Betrachtung aller Stellen von K. (Die Anordnungen entsprechen den "reellen" Stellen von K)

A. Prestel

27.1.75

Amalgamated sums and nerves of coverings

Let G a group, $(G_i)_{i\in I} = \mathbb{F}$ a family of subgroups, $\bar{G}$ the inductive limit of the system given by the injections $G_i \cap G_j \to G_i$, π the projection of $\bar{G}$ onto G, one has an exact sequence:

$$(*) \quad 1 \to \pi_1(E(G,\mathbb{F}), 1) \to \bar{G} \xrightarrow{\pi} G \to \pi_0(E(G,\mathbb{F})) \to 1$$

where $E(G,\mathbb{F})$ is the simplicial complex whose vertices are the elements of G and simplices the finite sets $(g_0, \ldots, g_n)$ such that $g_k g_l^{-1}$ belongs to some G_i, and where $\pi_0(E(G,\mathbb{F}))$ denotes the set of connected components of $E(G,\mathbb{F})$.

If G operates on a simplicial complex T with a subcomplex T' as simplicial fundamental domain, then T may be put in $(*)$ in place of $E(G,\mathbb{F})$ if the following condition is fulfilled: $\pi_0(T') = \pi_0(T' \cap gT') = \pi_1(T') = 0$ $(g \in G)$. The reason is that $E(G,\mathbb{F})$ is the nerve of the family $(g \cdot T'_i)_{g\in G}$. An example of such T is the nerve of the family of cosets $(g \cdot G_i)$ of G.

Such a situation can be found in the theory of linear and affine buildings of Tits and Volodin-Wagoner. For instance if $\mathbb{F}$ is the family of maximal unipotent radicals of parabolic subgroups of $Sl_n(A)$ (A a commutative ring with unit) containing the standard torus, one gets

$$1 \to \pi_1(T_n) \to St_n(A) \to GL_n(A) \to \pi_0(T_n) \to 1$$

and then $\quad 1 \to K_2(A) \to St(A) \to GL(A) \to K_1(A) \to 1$

where T_n is the Wagoner's building and $K_2(A) = \lim_{n\to\infty} \pi_1(T_n)$.

Other examples of amalgamations can be found in arithmetic groups: $Sl_3(\mathbb{Z})$ is the amalgamated sum of a finite number of finite subgroups.

Soulé

30-1-75 Der Poissonkern und die Gruppentheorie.

Satz (mit N. Lohoué). Sei G eine halbeinfache zusammenhängende mit endlichem Zentrum Lie-gruppe; K eine maximal kompakte Untergruppe; $\Delta = G/K$; Γ der Furstenbergrand von Δ, und $P(\dot{g}, \gamma)$ der Poisson-Furstenberg Kern, der eine Funktion über $\Delta \times \Gamma$ definiert ist. Dann faltet die Funktion $\sqrt{P}$ den Raum $L^2(\Gamma)$ ~~...~~ nach dem Raum $L^q(\Delta)$, für jede $q > 2$.

Korollar. Für jede $1 \leq p < 2$, ~~...~~ für jede rechts K invariante $h \in L^p(G)$, man hat $h * L^2(G) \subset L^2(G)$. Das ist ein Schritt in der Richtung einer Kunze-Stein Vermutung.

Wir erklären die Ideen im eigentlichen Fall, wo G ist die Gruppe der $g = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, $|a|^2 - |b|^2 = 1$; K die Untergruppe der $k_\theta = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$;

$\Delta = G/K \simeq$ die Scheibe $|z| < 1$ in $\mathbb{C}$, und $\Gamma \cong \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

$$P(gK, \theta) = P_r(\theta - \varphi) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - \varphi)}, \text{ wo } g.z = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}$$

und $g.0 = \frac{b}{\bar{a}} = re^{i\varphi}$. Nach Furstenberg (1963) hat der Poisson-Kern eine gruppentheoretische Interpretation: $\left|\frac{d(g^{-1}.\theta)}{d\theta}\right| = P_r(\theta)$. Und, wenn wir setzen $\quad [\pi(g)f](e^{i\theta}) = |\bar{b}e^{i\theta} - a|^{-1} f\left(\frac{\bar{a}e^{i\theta} - b}{\bar{b}e^{i\theta} - a}\right)$, so ist π eine unitäre irreduzible Darstellung von G in $L^2(\Gamma, \frac{d\theta}{2\pi})$. Der Koeffizient von π

$$F(g) = F(gK) = (\pi(g)1 \mid \bar{f}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{P_r(\theta - \varphi)}\, f(\theta)\, d\theta$$

ist so mit Hilfe des Poissonkernes ausdrückbar.

In diesem Fall drückt unser Satz aus, daß die Quadratwurzel des Poissonkernes $L^2(\Gamma, \frac{d\theta}{2\pi})$ nach $L^q(\Delta, d\sigma)$ für jede $q > 2$ abbildet, wo $d\sigma$ das Lobatschewskymaß über die Scheibe Δ ist.

Der Beweis besteht wesentlich darin, eine Estimation von $\sqrt{P_r}$ in L^γ-norm als $r \to 1$ zu rechnen, und dann "in the right place" den Interpolationssatz von Marcinkiewicz anzuwenden.

Pierre EYMARD (Nancy) Pierre Eymard

3-2-75 Relating representations for 3- and 4- manifolds

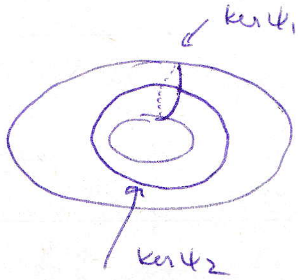
Two kinds of closed, compact 3-manifolds receive special attention in the study of manifolds: homology 3-spheres and homotopy 3-spheres. They arise naturally as obstructions to simplifying maps between high dimensional manifolds. One makes the homology 3-spheres into a group as follows: $M \approx \bar{M}$ if and only if $M \# -\bar{M}$ bounds a compact acyclic 4-manifold. Everything is intended to be pwl here. The equivalence classes form an abelian group Θ_3. Similarly one forms an abelian group θ_3 of homotopy 3-spheres by changing the definition of equivalence to: $M \approx \bar{M}$ if and only if $M \# -\bar{M}$ bounds a compact, contractible 4-manifold. The Rohlin theorem provides indexed induced homomorphisms $\sigma: \Theta_3 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ and $\sigma: \theta_3 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. It is known that the first of these is surjective with the dodecahedral sphere representing the non-trivial element. The question is: Is $\sigma: \theta_3 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ surjective? We describe machinery for reducing this question to a purely algebraic one concerning abelianizations of splitting homomorphisms.

By a splitting homomorphism of order n we mean a homomorphism

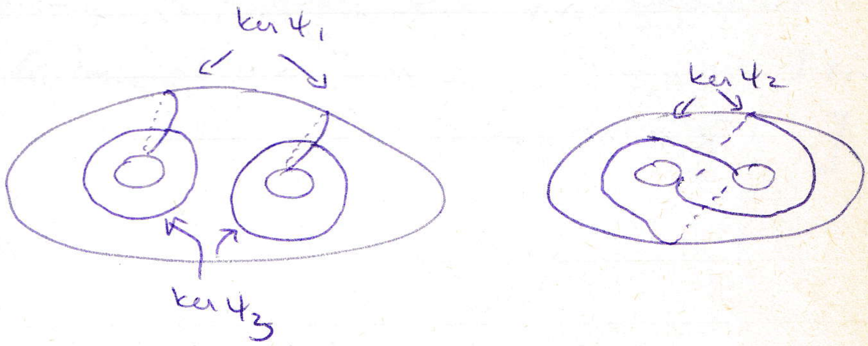
$$\psi_1 \times \cdots \times \psi_n : \pi_1(S, s) \to F_1 \times \cdots \times F_n$$

where S is an oriented surface, each F_i is a free group of rank equal to the genus of S, and each ψ_i is surjective. Equivalence of splitting homomorphisms is defined in terms of ~~surfa~~ commutative diagrams where any surface group isomorphism must be induced by an orientation preserving homeomorphism. Sums are defined by factoring through free products, and thus we obtain semigroups SH^n consisting of equivalence classes of splitting homomorphisms. It is easily seen that a splitting homomorphism is completely determined by the kernels of the factor homomorphisms. Two special ones are described below.

$$\psi_\xi^2 = \psi_1^2 \times \psi_2^2$$



$$\psi_\xi^3 = \psi_1^3 \times \psi_2^3 \times \psi_3^3$$



Factoring out by $[\psi_\xi^2]$ and $[\psi_\xi^3]$ converts SH^2 and SH^3 to stable semigroups SSH^2 and SSH^3. Let $(S)SH^3_*$ denote the (stable) subsemigroup consisting of equivalence classes $[\psi_1 \times \psi_2 \times \psi_3]$ where each of $\psi_1 \times \psi_2$, $\psi_2 \times \psi_3$, and $\psi_1 \times \psi_3$ is surjective.

We build similar classes for abelian splitting homomorphisms where an abelian splitting homomorphism has the form

$$\psi_1 \times \cdots \times \psi_n : H_1(S) \to F_1 \times \cdots \times F_n .$$

each F_i is a free abelian group of rank equal to the genus of S, each ψ_i is surjective, and each $\ker\psi_i$ is self orthogonal with respect to the skew symmetric form of homology intersection numbers. We get semigroups SH^n_{ab} as before, and by abelianizing the stability elements ψ_ξ^2 and ψ_ξ^3 we get stable semigroups SSH^2_{ab} and SSH^3_{ab}. Let $(S)SH^3_{ab*}$ denote the (stable) sub-semigroup consisting of classes of the form $[\psi_1 \times \psi_2 \times \psi_3]$ where each of $\psi_1 \times \psi_2$, $\psi_2 \times \psi_3$, and $\psi_1 \times \psi_3$ is surjective. We have the abelianizing homomorphism $A: (S)SH^3 \to (S)SH^3_{ab}$.

<u>Theorem 1.</u> $A: (S)SH^3 \to (S)SH^3_{ab}$ is surjective.

<u>Theorem 2.</u> $A | SSH^3_*$ takes SSH^3_* into SSH^3_{ab*}, and $SSH^3_{ab*} \setminus A(SSH^3_*)$ has at most one element.

<u>Theorem 3.</u> $A | SSH^3_* : SSH^3_* \to SSH^3_{ab*}$ is surjective if and only if the index induced homomorphism $r: \Theta_3 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ is surjective.

Robert Craggs (Urbana and Reykjavik)

Robert Craggs

4.2.75 Wahrscheinlichkeitstheoretische Charakterisierungen einiger Klassen lokalkompakter Gruppen.

G bezeichne stets eine lokalkompakte topologische Hausdorff-Gruppe, $W(G)$ bezeichne die Menge der (Radon-Maß) Wahrscheinlichkeitsmaße auf G. Die Faltung zweier Maße μ, ν wird als Multiplikation geschrieben.
Es sei $U(G)$ die Teilmenge der unendlich oft teilbaren Wahrscheinlichkeitsmaße auf G, $\Gamma(G)$ die Menge der stetig einbettbaren Maße und $P(G)$ die Menge der Poissonmaße auf G.

Es wurden folgende Probleme untersucht:

Wie läßt sich die Klasse aller lokalkompakten Gruppen beschreiben, für die

1) Die Wurzeln aller $\mu \in \mathfrak{U}(G)$ eindeutig bestimmt sind,
2) $\mathfrak{U}(G) = \mathfrak{P}(G)$ ist,
3) $\gamma(G) = \mathfrak{P}(G)$ ist
4) Jede stetige Faltungshalbgruppe fast analytisch ist [d.h. für alle $f \in \mathcal{D}(G)$, den Testfunktionen im Bruhat'schen Sinne, die Abbildung $t \to \mu_t(f)$ analytisch ist.]

Es gelten

Satz 1 G sei eine lokalkompakte Abelsche Gruppe, dann sind äquivalent:

(i) Jedes $\mu \in \mathfrak{U}(G)$ besitzt eindeutige Wurzeln
(ii) G ist aperiodisch, d.h. besitzt nur die triviale Untergruppe

Satz 2 G sei Abelsch, lokalkompakt. Dann sind äquivalent

(i) G ist diskret und $T(G) = \{e\}$ [$T(G) = \{x \in G : \forall n \in \mathbb{N}\ \exists$ ein $x_n \in G$ mit $x_n^n = x\}$]
(ii) $\mathfrak{U}(G) = \mathfrak{P}(G)$

Satz 3 Es sind äquivalent

(i) G ist diskret
(ii) $\gamma(G) = \mathfrak{P}(G)$

Satz 4 Es sind äquivalent:

(i) Jede stetige Faltungshalbgruppe (μ_t) ist fast analytisch
(ii) G ist total unzusammenhängend.

W. Hazod, Tübingen

5.2.1975 Rangabschätzung der Siegelschen Modulformen vom Gewicht.

Eine solche Modulform, vom Grad n, wird in der Weise

$$f(Z) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(\mathfrak{Z}, \mathfrak{z})\, e^{2\pi i m z}, \quad Z = \left[\begin{array}{c|c} \mathfrak{Z} & \mathfrak{z} \\ \hline \mathfrak{z}^t & z \end{array}\right]$$

in eine Fouriersche Reihe entwickelt. Die Koeffizienten genügen den Funktionalgleichungen

(1) $$\varphi_m(\mathfrak{Z}, \mathfrak{z} + \mathfrak{f} + \mathfrak{Z}\mathfrak{g})\, e^{2\pi i m(\mathfrak{g}^t \mathfrak{z} + \mathfrak{Z}[\mathfrak{g}])} = \varphi_m(\mathfrak{Z}, \mathfrak{z})$$

mit $\mathfrak{g}, \mathfrak{f} \in \mathbb{Z}^{n-1}$;

(2) $$\varphi_m(\mathfrak{G}(\mathfrak{Z}), \mathfrak{F}(\mathfrak{Z})^{-t}\mathfrak{z})\, e^{-2\pi i m \mathfrak{z}^t \mathfrak{F}^{-t} \mathfrak{C} \mathfrak{z}} \det \mathfrak{F}(\mathfrak{Z})^{-k} = \varphi_m(\mathfrak{Z}, \mathfrak{z})$$

wobei

$$\mathfrak{G}(\mathfrak{Z}) = (\mathfrak{A}\mathfrak{Z} + \mathfrak{B})(\mathfrak{C}\mathfrak{Z} + \mathfrak{D})^{-1}, \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{pmatrix} \in Sp(n-1, \mathbb{Z})$$

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{Z}) = \mathfrak{C}\mathfrak{Z} + \mathfrak{D},$$

$$\mathfrak{F}^{-t} = ({}^t\mathfrak{F})^{-1}.$$

Aus (1) folgt

$$\varphi_m(\mathfrak{Z}, \mathfrak{z}) = \sum_{\mathfrak{f} \bmod 2m} c_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{Z})\, \vartheta_m(\mathfrak{Z}, \mathfrak{z}, \mathfrak{f})$$

$$\vartheta_m(\mathfrak{Z}, \mathfrak{z}, \mathfrak{f}) = \sum_{\mathfrak{g} \in \mathbb{Z}^{n-1}} e^{2\pi i m \mathfrak{Z}[\mathfrak{g} + \frac{1}{2m}\mathfrak{f}] + 4\pi i m (\mathfrak{g} + \frac{1}{2m}\mathfrak{f})^t \mathfrak{z}}$$

und aus (2), dass die Koeffizienten $c_g(\mathfrak{Z})$ vektorielle Modulformen zu einer gewissen Darstellung von $Sp(n-1, \mathbb{Z}/4m\mathbb{Z})$ mit einem gewissen Multiplikator, vom Gewicht $h-\frac{1}{2}$ sind. Diese $c_g(\mathfrak{Z})$ bilden einen Modul M_μ bzgl. des Ringes R_{n-1} der Modulformen $(n-1)$-ten Grades vom Rang $\leqq$ ~~$2m$~~ $(2m)^{n-1}$.

Es wird gezeigt durch ein bekanntes Maximumprinzip: wenn $\varphi_0 = \cdots = \varphi_{m-1} = 0$, so ist $f(Z) = 0$. Das gilt für $m > \frac{\mu_n^2}{2\sqrt{3}\pi} h$, $\mu_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}$. Der Rang ~~des Moduls R_n~~ der Schar der Modulformen n-ten Grades vom Gewicht lässt sich so rekursiv abschätzen:

$$L(h, n) \leqq (1+\varepsilon)\, L(h, n-1) \sum_{\mu=0}^{m} (2\mu)^{n-1},$$

mit $m = \frac{\mu_n^2}{2\sqrt{3}\pi} h$.

M. Eichler, Basel.

14-4-1975

1 Sei E eine elliptische Kurve über $\mathbb{Q}$, u eine Uniformisierende in ~~im~~ der Ursprung und $\omega = \sum \beta(n) u^{n-1}$ als eine normierte Differentialform 1ter Art auf E. (d.h.: $\beta(n) \in \mathbb{Z}$ und $\beta(1)=1$). In Actes Congr. intern. Nice 1970 tome 2 behauptet Cartier die Atkin-Swinnerton Dyer'sche Vermutungen bewiesen zu haben: S 291 sqq, Formel (9): Es gilt

(1) $\quad \beta(np) - \beta(n)\beta(p) + p\beta(n/p) \equiv 0 \mod p^{\alpha}$

falls $n \equiv 0 \mod p^{\alpha-1}$.

Behauptung: Sei $L(E,s) = \prod_p (1 - a_p p^{-s} + b_p p^{1-2s})^{-1}$ die L-Reihe von E, dann gilt:

(2) $\quad \beta(np) - \beta(n) a_p + p b_p \beta(n/p) \equiv 0 \mod p^{\alpha}$

falls $n \equiv 0 \mod p^{\alpha-1}$

Die Kurve $y^2 = x^3+1$ gibt ein Beispiel, dass (1) i.A. nicht richtig ist.

2 Es sei
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_p & \to & \mathbb{Q}_p \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi \in A & \to & K \end{array}$$
mit $[K:\mathbb{Q}_p] = n$, π eine Uniformisierende $\# A/\pi A = q = p^f$ und $(p) = (\pi^e)$. Man definiert nach Witt für $x = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ die n^{te} Nebenkomponente $\tau_n(x)$ durch $\tau_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \pi^i x_i^{q^{n-i}}$, $(n \geq 0)$. Für $\circ \in \{+,-,\cdot\}$ setzt man

$\tau_n(x \circ y) = \tau_n(x) \circ \tau_n(y)$. Es gilt: $(x \circ y)_n \in A[x_i, y_i]_{i \geq 0}$ d.h. man hat einen kovarianten Ringfunktor W_π; Ringe/A $\to$ Ringe/A. Es gilt weiter: $W_\pi(\mathbb{F}_{q^a}) \simeq$ Ring der ganzen Zahlen in der unverzweigten Erweiterung von K vom Grade a; insbesondere: $W_\pi(\mathbb{F}_q) \simeq A$, d.h. man hat beliebig verzweigtes A mittels Nebenkomponenten erklärt. Für $\pi = p = q$ erhält man ~~die~~ üblichen Wittschen Funktor W.

Die Beweise von 1 und 2 finden ihre Grund im folgenden Klassifikationssatz:

Satz: Es sei G eine formales Gruppengesetz über einen beliebigen Ring k; $\dim G = 1$. Dann gibt es genau ein Paar (f,σ) mit $f: \mathbb{N} \to k$ und $\sigma: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to k$ s.d.

(3) $$f(am) = \sum_{d|m} d\,\sigma(a,d)^{m/d} f(m/d) \quad \text{für } a,m \in \mathbb{N}.$$

Umgekehrt definiert ein solches Paar (f,σ) genau ein formales Gruppengesetz.

Aus diesem Satz gewinnt mann noch folgendes

Korollar: Es sei τ die Funktion von Ramanujan. Es gilt:

$$\tau(am) = \sum_{d|m} d\,\lambda(a,d)\,\tau(m/d) \quad \text{und}$$

$$\tau(am) = \sum_{d|m} d\,\sigma(a,d)^{m/d}\,\tau(m/d) \quad \text{für } a,m \text{ und}$$

ganzzahligen $\lambda(a,d)$, $\sigma(a,d)$.

Bert Ditters, Nijmegen

17. IV 75 Stabilität bei Optimierungsaufgaben

Das „uniform boundedness Principle" von Banach, läßt sich folgendermaßen verallgemeinern: Eine punktweise beschränkte Familie F von konvexen Funktionalen $f: X \to \mathbb{R}$ (X - Banachraum) ist gleichgradig stetig. Daraus werden Stabilitätsaussagen für konvexe Optimierungsaufgaben hergeleitet. Insbesondere wird der Satz von Kripke, über Konvergenz von Lösungen von Approximationsaufgaben in normierten Räumen, auf konvexe Optimierungsaufgaben ~~verallgemeinert~~.

Als Anwendung werden Algorithmen zur Berechnung der besten Čebyšew Approximation, L_1-Approximation, Čebyšews Zentrums ~~und~~ semi-infiniten Optimierung angegeben.

Ferner wird eine „nicht-lineare" Variante der ~~Tych~~ Regularisierungsmethode von Tychonoff angegeben. ~~mit~~

Peter Kosmol

21.4.75

Probleme im Zusammenhang mit stationären Transport-Gleichungen.

Für Gleichungen vom Typ

$$\langle w, \nabla_x f\rangle + a(x,w,E)\, f(x,w,E) - \int_{G_1} b(x,w',w,E',E)\, f(x,w',E')\, dw'\, dE'$$

$$= \lambda \int_{G_2} c(x',x,w',w,E',E)\, f(x',w',E')\, dx'\, dw'\, dE'$$

(+ Randbedingungen) werden Bedingungen an die Funktionen a, b, c angegeben, unter denen – bei Behandlung in geeigneten Teilräumen des L_p, $1 \le p \le \infty$, – genau eine nicht-negative Eigenlösung $f = f_0$ zu einem positiven, einfachen, extremalen Eigenwert $\lambda = \lambda_0$ existiert.

Die Bedingungen sind gleichzeitig hinreichend dafür, daß ein angegebenes Verfahren der sukzessiven Approximation konvergiert und f_0, λ_0 liefert. Möglichkeiten der numerischen Realisierung des Iterationsverfahrens werden dargestellt.

F. Eberstadt, Düsseldorf

28.4.75.

Eindeutigkeits- und Stetigkeitsfragen bei der nichtlinearen Tschebyscheff-Approximation

Die in der Tschebyscheff-Approximation bewährten hinreichenden Alternationskriterien werden erweitert auf starke Eindeutigkeitsaussagen für beste Tschebyscheff-Approximationen. Dadurch ist es möglich, die in der bisherigen Theorie nicht behandelten Fälle der allgemeinen bzw. positiven Exponentialsummen sowie der Splines mit freien bzw. festen Knoten zu erfassen. Über die Kriterien für starke Eindeutigkeit ergeben sich Kriterien für lipschitzstetige Abhängigkeit von Tschebyscheff-Approximationen von der approximierten Funktion (über den Satz von Freud) sowie Aussagen über die lokale Konvergenz lokaler Approximationsverfahren in Tangentialkegeln.

R. Schaback, Bonn (Universität und Sonderforschungsbereich 72)

5.5.75 Nicht-Normalitäten bei stationären Prozessen und ihre Interpretation

---

Am Beispiel elektroenzephalographischer Daten werden spektrale Methoden der Zeitreihenanalyse besprochen. Ausgehend vom stationären Modell werden die nicht-parametrischen Grössen "Spektrum", "Kreuzspektrum", und "Kovarianzfunktion" eingeführt. Für eine vollständige Beschreibung der Zeitreihen=struktur durch diese Funktionen benötigen wir die Annahme eines Gauss'schen Prozesses.
Schiefe und Kurtosis als Testgrössen der eindim. Verteilungen werden auf Zeitreihen verallgemeinert. Einen vollständigeren und besser interpretierbaren Test stellen Poly-spektra, spektrale Zerlegungen höherer Kumulanten dar (Bispektrum: Zerlegung der Schiefe). Polyspektren insbesondere Kreuz-Polyspektren lassen sich auf interessante Weise mit Volterra-Entwicklungen verbinden, insbesondere der Schätzung ihrer Kerne

Th. Gasser, Zürich (Universität & ETH)

12.5.75. Aufsteigende Ketten von Varietäten von Gruppen.

Zu jeder Varietät V von Gruppen gibt es die aufsteigende Kette $\mathrm{var}\,F_i(V) \subseteq \mathrm{var}\,F_{i+1}(V)$, $i=1,2,\dots$, wobei $\mathrm{var}\,F_i(V)$ die Varietät, die von der freie V-Gruppe vom Rang i erzeugt ist, darstellt. In diesem Vortrag sind die aufsteigende Ketten für (a) die Varietät der Gruppen G mit $G/Z(G)$ metabelsch ~~beschrieben~~, und (2) die Varietät der Gruppen G, die auch nilpotent der Klasse $c \geq 5$ beschrieben. Im Gegenteil zu den Ketten für die Nilpotente Varietäten und für die metabelsche Varietäte steigt die Ketten für diese Varetäten nicht monoton auf. Zu jeder Varietät $\mathfrak{V}$ gibt es auch eine absteigende Kette: $\mathfrak{V}^{(1)} \geq \mathfrak{V}^{(2)} \geq \dots \geq \mathfrak{V}$, wobei $\mathfrak{V}^{(n)}$ ist die Varietät der Gruppen, deren von n Elementen erzeugten Untergruppen in $\mathfrak{V}$ liegen. In dem Vortrag wurden auch Beispiele von nicht-monoton absteigenden Ketten gegeben.

Frank Levin, Bochum.

5·26·75 **Banach algebras for the classical orthogonal polynomials and their applications**

Let $R_n(x) = R_n^{(\alpha,\beta)}(x) = P_n^{(\alpha,\beta)}(x) / P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, where $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ are the Jacobi polynomials. The $R_n(x)$ ~~which~~ satisfy the orthogonality relation

$$\int_{-1}^{1} R_n^{(\alpha,\beta)}(x)\, R_m^{(\alpha,\beta)}(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx = \frac{\delta_{nm}}{h_n}$$

$(h_n = h_n^{(\alpha,\beta)})$ for $\alpha, \beta > -1$. Two Banach algebras (which are dual to each other) are constructed by using recent recent results on when there are product formulas of the forms

$$R_n(x)\, R_n(y) = \int_{-1}^{1} R_n(z)\, d\mu_{x,y}(z), \qquad d\mu_{x,y}(z) \geq 0$$

$$R_n(x)\, R_m(x) = \sum_{k=|n-m|}^{n+m} g(k,m,n)\, R_k(x), \quad g(k,m,n) \geq 0$$

and a number of applications (to summability thy, multipliers, fractional integration, maximum principles, Wiener-Levy type thm., Strong - Szegö limit thm, etc.) are pointed out

George Gasper
Northwestern Univ. & RWTH Aachen

2.6.1975 Das universelle Monoid einer topologischen Kategorie

Das universelle Monoid einer topologischen Kategorie C ist ein topologisches Monoid UC (Kategorie mit genau einem Objekt) zusammen mit einem Funktor $C \to UC$, der unter allen solchen Funktoren universell ist. Diese Konstruktion wurde im diskreten Fall von P.J. Higgins, im topologischen von Ronald Brown und J.P.L. Hardy untersucht.

Satz: UC hat denselben Homotopietyp wie $\Omega(BC/ObC)$. Dabei bezeichnet Ω den Schleifenraum, B den klassifizierenden Raum i.S.v. G. Segal und $/$ das Identifizieren eines Teilraums zu einem Punkt. Vorausgesetzt wird:

a) $C \times UC \to C \times UC$, $(x,y) \mapsto (x,xy)$ ist eine Homotopieäquivalenz

b) $ObC \to C$ und $C \times_{ObC} C \subset C \times C$ sind abgeschlossene Cofaserungen.

Als Folgerungen erhält man:

1. $M_1 * M_2 \simeq \Omega(BM_1 \vee BM_2)$, wenn M_1, M_2 top. Monoide sind mit Inversen bis auf Homotopie
2. $\Omega\Sigma X$ ist zum freien Monoid über dem punktierten topologischen Raum X homotopieäquivalent (James), wenn X wohlpunktiert, wegweise zusammenhängend und numerierbar-lokal zusammenziehbar ist. (Σ = Einhängung)
3. $\Omega\Sigma X$ ist zur freien Gruppe i.S. von Graev homotopieäquivalent, wenn X lokal gleichmäßig zusammenhängend ist (Milnor's F-Konstruktion)

D. Puppe

Heidelberg

5/6/75.

System Dynamics as an application of mathemathical thinking.

There are two sides to mathematics: one is the purely technical capacity, the other the possibility to see structures in complexity, to conceptualize, and to model. The traditional technical mathematical calculations have meaning only in the context of a theory or model.

Everbody thinks in models – mathematicians do physicists do, policy makers do, but also the man in the street when he decides one way or the other. In System dynamics we are primarily interested in policy-models.

These policy models are – from a mathematical point of view – quite complicated; not linear, unstable, dynamic. This is one reason why policy models of a realistic kind are usually not analysed. Another reason is that, in general there is much uncertainty about structures and parameters. However usually the models are quite insensitive to parameter changes and in addition policy makers are often only interested in alternatives. Hence often we can restrict our analysis to a research of the different behaviour modes – similar classes of behaviour as exponential growth or decay, oscillation, damped oscillation etc.

From the theory of cybernetics of general non linear feedback systems we know that the behaviour modes are determined principle through so called positive feedback – or self-reinforcing – processes like ~~positive~~ exponential growth or decay and through so called negative feedback ~~processes~~ – or stabilizing – processes. In addition we know from mathematics that the delays in the system are very important. In system dynamics we use this knowledge about general systems to select information and to structure data.

In system dynamics we thus make models of policy systems, complex social systems. These models — in fact nothing but sets of ordinary differential equations — are simulated on a computer. By comparing the results of the simulation with what we expect we learn about ~~the~~ real system and when our perception ~~becomes~~ better we can make better models. In this way a modelling process is initiated by which our insight in the operation of the real system improves.

The colloquium is concluded with two examples. One relates to the beginning study of industrial relations. Much attention is given to the problem definition. A good problem definition contains the main hypothesis of the model. The second example shows a model in a much further state; it concerns malnutrition in a socio-economic setting in an African region.

W. Wils

CESMUBAC, Brussel

9.6.75 Automorphismen von Quadriken.

Sei K ein Körper, $\sigma: K \to K$ eine Involution ($\sigma = \mathrm{Id.}$ erlaubt), V ein K-Vektorraum, P der projektive Raum zu V, C der Kegel der Nullstellen einer spurwertigen hermitischen Form in V bzgl σ oder, allgemeiner, einer pseudo-quadratischen Form im Sinne der Springer Lecture Notes n° 386 (hiernach zitiert [LN]), Q das "Bild" von C in P, $\mathcal{L}$ die Menge der maximalen linearen Unterräume von Q, $\mathcal{K}$ (bzw. $\mathcal{F}$) die Menge der "Kreisen" (bzw. "Fäden") d.h. der Durchschnitte von Q mit nicht-tangenten Ebenen (bzw. Geraden) von P, und r die gemeinsame projektive Dimension der Elemente von $\mathcal{L}$ (Witt-Index -1). Man setze der Einfachheit halber voraus, daß $0 \leq r < \infty$ und daß Q nicht entartet ist (d.h. $\bigcap_{X \in \mathcal{L}} X \neq \emptyset$). Wie üblich bezeichne $P\Gamma U(Q)$ die Gruppe der semi-linearen Transformationen von P, die Q invariant lassen, und $PSU(Q)$ die von den passend definierten "Transvektionen" erzeugte Untergruppe. Abgesehen von wenigen, meistens offensichtlichen Ausnahmefällen gelten die Relationen

(1) Für $r \geq 1$, $\mathrm{Aut}(Q, \mathcal{L}) = P\Gamma U(Q)$

(2) Für $\dim V \geq 3$, $\mathrm{Aut}(Q, \mathcal{K}) = P\Gamma U(Q)$

(3) Für $\sigma \neq \mathrm{Id.}$, $\mathrm{Aut}(Q, \mathcal{F}) = P\Gamma U(Q)$.

Für $r \geq 2$ ist (1) praktisch äquivalent mit einem bekannten Satz von W.L. Chow und J. Dieudonné; (1) und (2) stehen im Wesentlichen in [LN]; außer Spezialfälle (K endlich: O'Nan) ist (3) unveröffentlicht. Wenn man die Relation

(4) $\mathrm{Aut}(PSU) = P\Gamma U$

zur Verfügung hat (etwa, wenn $[K : \text{Zentrum}] < \infty$ und $\dim V < \infty$: siehe z.B. Borel-Tits, Annals, 1974) werden (1), (2), (3) einheitlich sehr leicht bewiesen, indem man die Transvektionen ausgehend von $\mathcal{L}$, $\mathcal{K}$ oder $\mathcal{F}$ geometrisch charakterisiert. Ein mehr elementarer, die Relation (4) nicht benutzender Beweis beruht ~~darauf~~ auf die viel leichter zu beweisende Relation

$$\mathrm{Aut}(PSU, \{\text{Transvektionen}\}) = P\Gamma U.$$

J. Tits (Paris)

16.6.75 Factors of Manifolds

There is a broad question in the topology of manifolds which has motivated much study in the last twenty years, namely: What is the class of spaces $\{Y\}$ with the property that Y is not a topological manifold, but the product $Y \times R^1$ of Y with the real line is? (More generally, one could replace R^1 with R^n, or even the Hilbert cube $[0,1]^\infty$ or Hilbert space l_2. Interestingly, the question is completely resolved for the l_2 case; for it is known that $Y \times l_2$ is an l_2-manifold $\Leftrightarrow$ Y is a metric absolute neighborhood retract.) The question above is a purely topological one, because for example it does not really make sense in the differentiable category unless Y is already a differentiable manifold, and in the piecewise linear category, there is a simple stability theorem which says that if Y is a polyhedron such that $Y \times R^1$ is a manifold in the piecewise linear sense, then in fact Y must be a piecewise linear manifold.

The first example of a nonmanifold space Y whose product with R^1 is a manifold, was given by R. H. Bing [Annals of Math, 65 (1957), p484; see end of article]. He let Y be the quotient S^3/X of S^3 with subset X identified to a point, where X is the Whitehead continuum in S^3, which is defined as the intersection of a nested sequence of embedded $S^1 \times D^2$'s. At present, the widest class of spaces $\{Y\}$ whose product with R^1 is known to be a topological manifold, is given by the following list.

THEOREM Suppose M^n is a topological manifold and X is a compact cell-like subset of int M. (Cell-like $\equiv$ X is Čech homotopically trivial; for example, contractible). Then $M/X \times R^1$ is a topological manifold in the following cases:

(i) $n \leq 2$ (classical)

(ii) $n = 3$ and X has a neighborhood in M^3 homeomorphic to R^3 (Edwards-Miller & Eaton-Pixley)

(iii) $n = 4$ and X is a contractible polyhedron of dimension ≤ 2, locally piecewise linearly embedded in int M (Edwards)

(iv) $n \geq 5$ (Edwards)

A consequence of (iii) & (iv) is that if H^m is a piecewise linear manifold having the homology groups of the m-sphere, then the double suspension $\Sigma^2 H^m$ of H^m is topologically homeomorphic to the $(m+2)$-sphere S^{m+2}, provided $m \neq 3$, or $m = 3$ and H^3 is known to bound a contractible PL manifold with dimension 2 spine. Thus, taking such an H^m which is not 1-connected, this gives an example of a compact polyhedron, namely $\Sigma^2 H^m$, which is a topological manifold but is not a piecewise linear manifold.

Robert D. Edwards

23. 6. 1975 Über die endliche Präsentierbarkeit gewisser arithmetischer Gruppen im Funktionenkörperfall.

Sei $k = \mathbb{F}_q$ Körper aus q Elementen, Y/k glatte vollständige algebraische Kurve. $K = k(Y)$ Funktionenkörper hierzu, $S = \{s_1, \dots, s_t\}$ eine endliche Menge von Stellen aus Y, M ein projektiver O_S-Modul vom Rang 2, wobei $O_S = \bigcap_{s \notin S} O_{Y,s}$. Untersucht wurde die Frage der endlichen Präsentierbarkeit der Gruppe $\Gamma = \mathrm{Aut}_{O_S}(M)$ via Operation auf dem Produkt der Bruhat-Tits-Gebäude $X = \prod_{i=1}^{t} X_{s_i}$ zu den verschiedenen Stellen s_i. Mittels der Theorie der Vektorbündel ~~über~~ vom Rang 2 über algebraischen Kurven konnte in X ein geeigneter Teilbereich $X(N) \subset X$, $N \in \mathbb{N}$ eine geeignete natürliche Zahl, mit folgenden Eigenschaften bestimmt werden:

(1) $X(N)/\Gamma$ stets kompakt

(2) $t = |S| \geq 2 \Rightarrow X(N)$ zusammenhängend

(3) $t = |S| \geq 3 \Rightarrow X(N)$ einfach zusammenhängend.

Hieraus ergibt sich leicht

Satz 1: Ist $t \geq 3 \Rightarrow \Gamma$ endlich präsentierbar.

Schwierigkeiten macht der Beweis von (3), die anderen Punkte sind einfach.

Ist ferner $t = 2$, so kann man zeigen, wieder unter Ausnutzung der Bereiche $X(N)$, daß dann

Satz 2: Ist $t = 2$, so ist Γ niemals endlich präsentiert.

Ist schließlich $t = 1$, so ist wohlbekannt, daß Γ nicht einmal endlich erzeugt ist.

Ulrich Stuhler, Göttingen

30.VI 1975 Characterizations of classical fields

For any topological field $(K,\mathcal{T})$ denote by $G(K)$ the group of all topological automorphisms of K. The field topology $\mathcal{T}$ is called ~~locally~~ bounded if there exis a bounded neighbourhood A of zero, i.e. if for every neighbourhood $\mathcal{U}$ of zero there is another one, say V, such that $AV \subset \mathcal{U}$. By a classical field we shall mean a finite extension of K_v, where $K=\mathbb{Q}$ or $K=\mathbb{F}_q(X)$ (X - variable) and by K_v we mean the completion of K at v (v - any norm of K). By the Krull topology in the group $G(K)$ of topological field $(K,\mathcal{T})$ we shall mean a topology induced in $G(K)$ by the sets $G(K) \cap G(K/M)$, where $G(K/M)=\{g \in \mathrm{Aut}(K): g|M = \mathbb{1}_M\}$, and $M=K^{G(K)}(X_1, X_2, \ldots, X_N)$, $X_j \in K$ - algebraic or not. A field topology is locally ~~bounded~~ convex if for every neighbourhood $\mathcal{U}$ of zero and for every natural number n, $\underbrace{\mathcal{U}+\ldots+\mathcal{U}}_{n} = n\mathcal{U} = \{nu : u \in \mathcal{U}\}$.

Then the following theorems hold:

THEOREM 1. For a topological field $(K,\mathcal{T})$ the following conditions are equivalent:

(1) K is a classical field,

(2) K is locally bounded and complete in topology $\mathcal{T}$ and for every closed subfield F of K the group $G(F)$ is compact in its Krull topology

(3) K is locally compact.

THEOREM 2. Let $(K,\mathcal{T})$ be a topological ring. Then the following conditions are equivalent:

(1) K is complete and connected integral domain in the topology $\mathcal{T}$ induced by Krull valuation,

(2) K is a locally bounded field extension of $\mathbb{R}$,

(3) K is a locally bounded, complete and connected topological field,

(4) K is locally compact connected topological field,

(5) K is locally convex, complete and connected topological field,

(6) K is complete field with Krull valuation having finitely many valuated extensions,

(7) $K \simeq \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ (topologically).

Witold Więsław (Wrocław)

7. Juli 1975

Über die Einheitengruppe in einem total-reellen nicht zyklischen kubischen Zahlkörper und seinem Normalkörper

Sei allgemein N/P ein reeller Normalkörper über dem rationalen Zahlkörper, G seine Automorphismengruppe, H seine Einheitengruppe, aufgefaßt als G-Operatorgruppe. Nach Minkowski hat man folgenden ersten Einblick in deren Struktur:

H besitzt eine operatorzyklische Untergruppe E von endlichem Index.

Will man die Struktur von H völlig beherrschen, so muß man darüber hinaus noch kennen:

1.) den Index $[H:E]$, und darüber hinaus die Strukturinvarianten von H/E,

2.) das Verhalten dieser Faktorgruppe bei der Einbettung von E in H.

Und all dies erst vollbefriedigend nur, wenn E durch H in kanonischer Weise bestimmt wäre.

Für die reellen quadratischen Zahlkörper ist das trivialerweise der Fall; für die zyklischen kubischen und reell-biquadratischen Zahlkörper habe ich diese Aufgabe in einer größeren Abhandlung (Berliner Akademie 1948) vollständig gelöst. Im Logarithmenraum der Körper gedeutet ist das Einheitengitter im quadratischen Fall linear, im kubischen hexagonal; im biquadratischen Fall ist das Gitter der Relativeinheiten $H_{N/\Omega}$ nach dem quadratischen Teilkörper Ω quadratisch und das volle Gitter H entweder die orthogonale direkte Summe aus $H_{N/\Omega}$ und dem quadratischen Einheitengitter H_Ω, oder entsteht aus diesem räumlichen Gitter durch Hinzunahme der Maschenmittelpunkte.

In einer weiteren Arbeit*) habe ich ganz entsprechende Ergebnisse für die in der Überschrift genannten Normalkörper N/P erzielt. Die Struktur der Relativeinheitengruppe $H_{N/\Omega}$ nach dem quadratischen Teilkörper Ω des Normalkörpers N vom sechsten Grade, beschrieben durch das zugeordnete Gitter im Logarithmenraum, ist entweder direkte Summe von zwei hexagonalen Gittern, oder entsteht daraus durch Hinzunahme einer der beiden Arten von Maschenmittelpunkten. Das volle Gitter H ergibt sich

*) Miscellanea Academica Berolinensia, Akademieverlag, Berlin 1950.
Kurze Voranzeige: Archiv d. Mathematik, Band 1, Heft 1, 1948.

darauf wieder entweder als die orthogonale direkte Summe mit dem quadratischen Einheitengitter H_Ω, oder ist eine Untergruppe vom Index 3 darin.

Aus diesen Ergebnissen folgt schließlich eine bemerkenswerte Tatsache über die Einheitengruppe H_K des zugrundeliegenden reellen nicht-zyklischen kubischen Zahlkörpers K. Es stellt sich zunächst die überraschende Tatsache heraus, daß *jede* Einheit aus K bis aufs Vorzeichen Relativnorm einer Einheit aus N ist. In dem einen der beiden zuvor aufgeführten Fälle erhält man dann ein *kanonisch bestimmtes Grundeinheitenpaar* von K in der Form

$$\varepsilon_1 = N_{N/K}(\varepsilon_{N/\Omega}), \quad \varepsilon_2 = N_{N/K}(\varepsilon'_{N/\Omega}),$$

wo $\varepsilon_{N/\Omega}$ die wesentlich eindeutig bestimmte Relativgrundeinheit von N/Ω und $\varepsilon'_{N/\Omega}$ eine ihrer beiden Konjugierten ist, während in dem anderen Falle diese kanonischen Einheiten nur eine Untergruppe vom Index 3 erzeugen.

Es ist dies der erste mir bekannt gewordene Fall, wo in einem algebraischen Zahlkörper mit mehr als einer Grundeinheit ein Grundeinheitensystem auf algebraischem (Wege) *kanonisch festlegbar* ist (von trivialen Abänderungen wie Vorzeichen, Reziproke, Konjugierten abgesehen). *Artin* hat einmal gesagt: „Was man eindeutig definieren kann, kann man auch berechnen." Es erscheint mir als eine lohnenswerte Aufgabe, *dies für spezielle total-reelle kubische Zahlkörper numerisch durchzuführen.* Als *fruchtbare Forschungsaufgabe* sehe ich die Verallgemeinerung obiger Ergebnisse auf höhere algebraische Zahlkörper an.

Helmut Hasse (* 1898)

11/Juli 1975 Hilbert Modules and Q-holomorphic functions

The motivation for our investigation of Hilbert Modules is a desire to build a function theory for Q-holomorphic functions. The Q-holomorphic functions are solutions of the hypercomplex equation

(1) $$Du = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - Q(z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad Q(z) = \sum_{\ell=1}^{r} e^{\ell} q_{\ell}(z), \quad u = \sum_{\ell=0}^{r} e^{\ell} u_{\ell}(z), \quad e^{r+1} = 0.$$

(Here e is a nilpotent element.) It has been shown by Bojarski and Douglis that (1) is equivalent to a 1st order elliptic system with a single (complex) eigenvalue. Indeed they have shown that every such elliptic system can be written in such a form. Gilbert and Hile developed further the function theory associated with

(2) $$Dw = \sum_{\ell=0}^{r} e^{\ell} \sum_{j=0} \left(A_{\ell j} w_j + B_{\ell j} \bar{w}_j\right) \qquad \text{(Transactions 1974).}$$

One important tool for developing such a function theory is dependent on the existence of a Similarity Principle. Such a principle is known to exist only for a restricted class of equations (2) (Gilbert-Hile) and, in general, does not exist (Habetha). Since the reproducing kernel has been a strong assistance in function theory (Bergman, Nehari, Schiffer) it was thought that such an investigation would be useful here.

A Hilbert Module $\mathcal{H}$ is essentially a linear space with two operations, vector addition and multiplication by a scalar. The scalars are elements from a finite, associative algebra $\mathcal{A}$ [A generalization to where $\mathcal{A}$ is a Banach space with underlying Hilbert space structure is also possible.] In addition an inner product is defined from $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{A}$, $J(f,g) \in \mathcal{A}$, with the "usual" inner product properties. We assume finally that using our norm $\|f\| := |J(f,f)|$, where $|a| := \operatorname{tr}(aa^T)^{1/2}$, [$a^T$:= involute $a \in \mathcal{A}$] $\mathcal{H}$ is also a Hilbert space (i.e. completeness). A Hilbert function module is a family of functions defined in a region $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (or a topolog. sp.) and taking values in $\mathcal{A}$, such that under the given inner product, $J_\Omega(f,g)$, for this family it is also a Hilbert Module. Our first theorem for such a space is a nec. and suff. theorem that a Hilbert Function Module has a reprod. kernel, that is a $K(y,x) \in \mathcal{H}_y(\Omega)$ with the reproducing property, namely

(3) $$f(x) = J_\Omega(f(y), K(y,x)), \quad \text{for all } f \in \mathcal{H}(\Omega).$$

It is essentially the same condition that occurs for Hilbert spaces, i.e. $f(x)$ for each $x \in \Omega$ is a bounded linear functional on $\mathcal{H}(\Omega)$, i.e. $|f(x)| \le M_x \|f\|$, where $|\cdot|$ means here the "normalized" trace operator.

Further results are concerned with construction of $K(y,x)$ as a solution of an extremal problem. One characterization is that if $g_y(x) \in \mathcal{H}(\Omega)$ minimizes $\|\cdot\|$ subject to $g_y(y) = I$ (the identity of $\mathcal{Q}$). Other characterizations are possible but lead one to an investigation of generalized inverses. (These have been done.)

Finaly it may be shown that the "matrix" solutions of (1) form a Hilbert Function Module, and the functions $f(x)$ are a bounded linear functional. This makes use of the Cauchy representation due to Bojarski. Indeed it is not difficult to exhibit this property for all elliptic systems of p.d.e.

Other properties of Hilbert function modules with reproducing kernels are the Fourier expansions (with coefficients in $\mathcal{Q}$), and the representations of linear operators.

Robert P. Gilbert

13. Okt. 75 Variationsprobleme mit vielen Lösungen.

Wir betrachten das klassische Variationsproblem für 2-dim. Minimalflächen in $\mathbb{R}^3$ bei vorgeschriebener Randkurve γ:

d.h. man sucht Flächen (vom Typ der Kreisscheibe), die
(1) von der Kurve γ (monoton) berandet werden
(2) Extremalen des Flächeninhalts in der durch (1) gegebenen Klasse sind.

Das Problem (1), (2) ist stets lösbar (Douglas, Rado 1933) aber es besitzt oft mehrere Lösungen (Beispiele).
Schwierige Frage: wie viele?
Wir zeigen:

A. Ist γ reellanalytisch, $M(\gamma)$ die Lösungsmenge von (1) und (2) zu γ, so hat $M(\gamma)$ nur endlich viele Zusammenhangskomponenten.

B. Ist $x \in M(\gamma)$ eine Fläche mit Verzweigungspunkten, so x ein entarteter kritischer Punkt.

Wir betrachten dann $M(\gamma)$ als Funktion von γ:

C. M = Menge aller Minimalflächen vom Typ der Kreisscheibe ist eine algebraische Varietät in einem Hilbertraum mit nur sehr "primitiven" Singularitäten. Man kann eine Stratifikation angeben für M.

D. "Fast alle" Flächen in M, auch fast alle Flächen in M sind reguläre Punkte für die Projektionsabbildung, die jeder Minimalfläche ihre Randkurve zuordnet.

E. Aus D. folgt leicht eine Konstruktion für Mengen $M(\gamma)$ mit vielen Punkten, nämlich:
In der Nähe jeder 2^n-fach durchlaufenen Jordankurve gibt es viele Kurven, wo $M(\gamma)$ mindestens $(n+1)$ Punkte hat.

Reinhold Böhme, Erlangen

15 Oct. 1975. Finite p-groups with all pth powers central.

Let $\hat{A}$ be the algebra of formal power series over $\mathbb{F}_p$ in non commuting variables x, y. Let $\hat{L}$ denote the Lie subalgebra of power series in which each homogeneous component belongs to the Lie subalgebra of $\hat{A}$ generated by x, y. Then $\left(\sum_0^{p-1} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_0^{p-1} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_0^{p-1} \frac{v^n}{n!}$, where v is a formal power series of the form $v_0 + \cdot\cdot$, where $v_0 \in \hat{L}$ and $\cdot\cdot$ are terms of degree $\geq p$. Hence $v^{p-1} = v_0^{p-1} + \cdot\cdot$, where $\cdot\cdot$ are terms of degree $\geq 2p-2$. Let J be the ideal of $\hat{A}$ generated by the elements u^{p-1}, $u \in \hat{L}$, and let $\Theta(x,y)$ denote the sum of those terms in v^{p-1} having degree $p-1$ in each of x and y. The object of the talk was to indicate several different problems where the truth or otherwise of the following statement is the decisive factor: $(*)_p$ $\Theta \notin J$. $(*)_p$ is false for $p = 2, 3$, true for $p = 5, 7, 11$. (1) If $(*)_p$ is true, there exists a finite group G of exponent p^2 in which the elements of order p^2 generate a subgroup of index p^2. (2) It is known that the following identities hold in the Lie ring of a finite group of exponent p: (a) $u\dot{v}^{p-1} = 0$ (where $\dot{v}$ denotes the operation of right Lie multiplication by v), (b) $u\,\Theta(\dot{v}, \dot{w}) = 0$. If $(*)_p$ holds, (b) is not a consequence of (a). (3) Let $\mathcal{B}_p$ denote the collection of all finite groups of exponent p^2 in which the pth power of every element is in the centre. It is known that an identity of the following form holds in the Lie p-algebra of a group in $\mathcal{B}_p$: $[u,v]^p = F(u,v)$, where $F(u,v)$ is a commutator of degree $2p$. If $(*)_p$ holds, and if $F(u,v)$ = a nonzero scalar multiple of $[u,v]\,\Theta(\dot{u}, \dot{v})$, then there exists a group in $\mathcal{B}_p$ with derived group of exponent p^2. These requirements are fulfilled when $p = 5$; and, if G is a group of class ≤ 10 in $\mathcal{B}_5$, then the commutator $c = (a,b)$ of elements $a, b \in G$ satisfies $c^5 = ((c,b,c),(c,a,c))^3$.

G. E. Wall (Sydney)

20. 10. 1975 Über Maximum-Minimum Aussagen für hyperbolische Differentialgleichungen

Betrachtet wird für die Differentialgleichung $L[u] := k(y)\,u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$ mit $k(y) \gtreqless 0$ entsprechend $y \gtreqless 0$ das Tricomi Problem, d.h. es ist die Funktion u auf einer Kurve Γ_0, die die Punkte $A(0,0)$ und $B(1,0)$ verbindet, bekannt (die Kurve verläuft in der oberen Halbebene) und auf einer Charakteristik durch A für $y<0$. Mit Hilfe von Maximum-Minimum Aussagen für die Lösung der Differentialgleichung $L[u]=f$ im hyperbolischen Gebiet $(y<0)$ konnten Eindeutigkeitsaussagen für das Tricomi-Problem von Agmon, Protter und Nirenberg bewiesen werden. Die obige Beweismethode legt es „nahe", Eindeutigkeitsaussagen für das Frankl-Morawetz Problem im $\mathbb{R}^3$ mit Hilfe von Maximum-Minimum Aussagen für die Lösung im hyperbolischen Gebiet herzuleiten. – Ziel dieses Vortrages ist es, den Beweis für den folgenden Satz plausibel zu machen und zu skizzieren.

Satz

Vor. $\hat{L}[u] = u_{tt} + k(t)(u_{xx}+u_{yy}) = f(x,y,t)$ in $t_0 \le t < 0$ mit $k(t) < 0$;

$u(x,y,t) \in C^1(x,y,t_0 \le t < 0) \cap C^2(x,y,t_0 < t < 0)$,

$u(x,y,t_0) = u_0(x,y) \in C^2(\cdot)$

$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{(x,y,t_0)} = u_1(x,y) \in C^0(\cdot)$,

$k(t) \in C^1(t_0 \le t < 0) \cap C^2(t_0 < t < 0)$

$k(0) = 0$

$f(x,y,t) \in C^0(x,y,t_0 \le t < 0)$

Beh.: Gilt

$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{(x,y,t_0)} = u_1(x,y) \le 0$, $f(x,y,t) - k(t)(u_{0_{xx}} + u_{0_{yy}}) \le 0$ für $t_0 \le t < 0$

$$\frac{(k')^2}{|k|^3}\left[1 + 4\left(\frac{k}{k'}\right)'\right]\left(\int_{\tau=t}^{T} (-k(\tau))^{\frac{1}{2}}\,d\tau\right)^2 \le 4 \quad \text{für } t_0 \le t < 0$$

so folgt

$u(x,y,t) \le u(x,y,t_0)$ für $t_0 \le t < 0$.

– Ein entsprechender Satz für das charakteristische Anfangswertproblem ist gültig –.

M. Schneider (Berlin)

27 Oct. 1975 Über die Verteilung von Summen von Vektoren

Sei M_i k endliche Teilmengen eines Banach-Raumes $\mathfrak{X}$ ∋ je zwei Vektoren vom selben M_i Abstand ≥ 1 haben. Wir untersuchen die Verteilung von $\oplus M_i = \{\sum x_i : x_i \in M_i\}$ (wir zählen Vervielfachheit) Zum Beispiel wie viele Summen aus $\oplus M_i$ können in einer offenen Kugel S_α vom ~~Durchschnitt~~ Durchmesser α liegen?

Die Frage stammt vom folgenden Problem aus der W. Theorie: Sei $\mathfrak{Y}_1, \dots \mathfrak{Y}_k$ unabhängige (aber nicht notwendig identisch) verteilte Zufallsgrössen mit Werten in $\mathfrak{X}$. Was können wir sagen über die Verteilung von $\sum_1^k \mathfrak{Y}_i$ wenn die $\mathfrak{Y}_i$ eine gemeinsame Konzentrationsschranke haben? Z.B. $\exists\, \delta : \mathbb{R}^+ \to (0,1]$ ∋ $P_r(\mathfrak{Y}_i \in S_\alpha) \leq \delta(\alpha)$ $\forall i = 1, \dots k$.

__Vermutung:__ Sei $P = \bigotimes_{i=1}^{k} [0 < 1 < \cdots |M_i|-1]$ das kartesische Produkt von k total geordneten Mengen mit der Grösse $|M_i|$. Sei W_ℓ die Whitneysche Zahlen von P und $N = \sum_{i=1}^{k}(|M_i|-1)$. Dann ist $\left|\bigoplus_1^k M_i \cap S_1\right| \leq W_{\left[\frac{N}{2}\right]}$ für alle Kugeln S_1 vom Durchmesser 1.

__Satz__ Die Vermutung gilt für $|M_i| \leq 3$ und $\mathfrak{X}$ = Hilbertraum oder $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^2$ mit der Supnorm (d.h. $\|(x,y)\| = \max\{|x|,|y|\}$)

Verwandte Kombinatorische Eigenschaften und Probleme wurde diskutiert.

Lee Jones (Göttingen)

Geschlechter von Gittern über Ordnungen.

Man betrachtet eine Ordnung R über einem Dedekind-Ring $\mathfrak{o}$ in einer halbeinfachen Algebra A. Ein R-Gitter M ist ein endlich erzeugter R-Modul, der als $\mathfrak{o}$-Modul torsionsfrei ist. Die ganzzahligen Darstellungen von R (in $\mathfrak{o}$) werden durch solche Gitter vermittelt. Ein Geschlecht $\Gamma(M)$ besteht aus allen Gittern X für die $X_p \cong M_p$ an allen p ist.

Es handelt sich zunächst darum die Isomorphietypen in einem Geschlecht zu bestimmen. Es wird gezeigt dass diese gewissen Idealklassen in der Maximalordnung des Zentrums der Algebra A ein-eindeutig entsprechen, sofern das Gitter die Eichlersche Bedingung erfüllt: (Im Endomorphismenring von $k \otimes M$ ist keine der einfachen Algebren ein total-definiter Quaternionenschiefkörper).

Als Anwendung hiervon kann man folgendes Problem lösen: Seien M und N zwei R-Gitter so dass für jedes p eine ex. Sequenz $0 \to Y_p^{(p)} \to M_p \to N_p \to 0$ existiert. Wann existiert dann $0 \to Y \to M \to N \to 0$? Zunächst ist eine zureichende Bedingung dass für jedes primitive zentrale Idempotent e_i mit $e_i N \neq 0$ auch $e_i\left(kM/kN\right) \neq 0$ sein soll. Gibt es e_i die diese Bedingung nicht erfüllen so sei e ihre Summe. Durch Betrachtung der Projektionen eM und eN lässt sich dann eine notwendige und zureichende Bedingung herleiten. Nimmt man insbesondere für M einen freien Modul, so ergibt sich hieraus der genaue Zusammenhang zwischen der minimalen Anzahl der Erzeugenden des Gitters N und der Gitter N_p.

A. Jacobinski   Göteborg

(3.11.75)

10. Nov. 75 Lineare Bäcklund-Transformationen bei partiellen Differentialgleichungen.

Mit Hilfe von Bäcklund-Transformationen und nichtlinearen Differenzengleichungen 1. Ordnung lassen sich allgemeine Darstellungssätze für die Lösungen gewisser hyperbolischer und elliptischer Differentialgleichungen herleiten. Die gewonnenen Resultate gestatten Anwendungen in der Funktionentheorie und bei der Bestimmung von Fundamentallösungen im Großen für verallgemeinerte Tricomi-Gleichungen. Darüber hinaus gelingt es, Lösungen verallgemeinerter Stokes-Beltrami-Systeme zu ermitteln, die im Zusammenhang mit der axial-symmetrischen Potentialtheorie von Interesse sind.

K. W. Bauer (Graz)

Kombinatorische Untersuchungen in endlichen Strukturen 12. Nov 75

In Verallgemeinerung des Satzes von van der Waerden werden Matrizen A mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ partitionsregulär genannt, falls zu jeder Zerlegung von $\mathbb{N}$ in endlich viele Klassen das Gleichungssystem $A\underline{x}=\underline{0}$ in einer Klasse eine Lösung hat.
Die partitionsregulären Matrizen werden nach Rado durch eine einfache algebraische Eigenschaft charakterisiert.
Daraus ergibt sich eine interessante Frage von Rado über universelle Mengen, das sind solche, die zu jedem partitionsregulären A eine Lösung des Systems $A\underline{x}=\underline{0}$ enthalten

Satz: Sei X universell, $X = X_1 \cup X_2$; dann ist X_1 oder X_2 universell

Der Beweis wird angedeutet und Verallgemeinerungen auf Abelsche Gruppen angegeben

Walter Deuber (Hannover)

Pascal-Theorie

P. th. ist die Theorie des rekursiven Aufbaus von Morphismen. Man betrachtet einfache Zerlegungen der Objekte einer Kategorie und zerteilt die Morphismenmenge in verschiedene Klassen je nach ihrer Lage in bezug auf diese Zerlegung. Bei guter Wahl der Zerlegung kann man Wohlfundiertheitsaussagen, sowie Ramsey-Sätze für Kategorien beweisen. Eine fruchtbare Methode besteht in der Beschaffung von Strukturen mit Hilfe von schon als wohl (resp. ramsey) erkannten Kategorien.

Eine derzeit noch offene Frage ist die Handhabung von Diagonalen im Produkt zweier Kategorien. Wüsste man, dass zwei Ramsey-Kategorien auf diese Weise wieder eine solche liefern, so hätte man eine große Anzahl neuer Ramsey-Sätze. (Dtto. für wohl.)

Es sei betont, dass der Aspekt der Anzahlbestimmung nur ein ganz nebensächlicher ist.

(12. 11. 75) Klaus Leeb (Erlangen)

Über einige charakteristische Untergruppen endlicher Gruppen.

Gewisse charakteristische Untergruppen $\begin{matrix} E(G) & F^*(G) \\ O_{p^*}(G) & O_{p^*p}(G) \end{matrix}$ spielen in beliebigen endlichen Gruppen eine ähnliche Rolle wie $\begin{matrix} 1 & F(G) \\ O_p(G) & O_{p',p}(G) \end{matrix}$ in auflösbaren Gruppen.

Die verallgemeinerte Fittinguntergruppe $F^*(G)$ ist <u>der</u> kleinste Normalteiler $\supseteq F(G)$, der seinen Zentralisator enthält.

Es ist $F^*(G) = F(G)\,E(G)$ (ein zentrales Produkt), und $E(G)/Z(E(G))$ ein direktes Produkt nichtabelscher einfacher Gruppen.

Für eine p-Untergruppe P setzen wir $C^*_G(P)/C_G(P) = O_p(N_G(P)/C_G(P))$ und definieren dadurch $C^*_G(P)$..

$O_{p^*p}(G)$ ist <u>der</u> kleinste Normalteiler von G mit $C^*_G(P) \le O_{p^*p}(G)$ für eine Sylow p-Untergruppe P von $O_{p^*p}(G)$.

Eine Gruppe H heißt p-constrained, wenn $C_{\bar H}(O_p(\bar H)) \le O_p(\bar H)$ mit $\bar H := H/O_{p'}(H)$ gilt.

Unsere beliebige endliche Gruppe G besitzt genau einen kleinsten Normalteiler G_0, ~~derart~~ daß $N_G(P_0)$ p-constrained ist für $P_0 \in Syl_p(G_0)$.

Weiter ist $O_{p^*p}(G) = G_0\, O_{p',p}(N_G(P_0))$

und $O_{p^*}(G) = G_0\, O_{p'}(N_G(P_0))$.

Die für Anwendungen nützlichste Eigenschaft von $O_{p^*}(G)$ ist:

$$O_{p^*}(N_G(P)) \le O_{p^*}(G) \quad \text{für jede } p\text{-Untergruppe } P \text{ von } G.$$

17. 11. 75

Helmut Bender

Eine Zerlegungsmethode für Graphen

Eine Zerlegungsform für Graphen (Aufspalten längs vollständiger Graphen) wird untersucht, die bezügl. der chromatischen Zahl, der (Kontraktions-) Homomorphie und anderen graphentheoretischen Operationen gute Verträglichkeitseigenschaften aufweist. Im Anschluß an K. Wagners Äquivalenzsatz und Hadwigers Vermutung wird diese Zerlegungsform benutzt, um gewisse Maßfunktionen für die „Kompliziertheit" von Graphen einzuführen; in den Kreis dieser sog. Feinheitsmaße ordnen sich der Homomorphiegrad (im Sinne K. Wagners), die chromatische Zahl und die Zusammenhangszahl (bei gewissen Modifikationen) ein. Über die elementaren Bausteine der Graphen mit Werten ≤ 5 werden eine Reihe von Aussagen gemacht, u.a. ergibt sich eine vollständige Charakterisierung aller Graphen, die sich nicht auf einen 4-fach zusammenhängenden Graphen kontrahieren lassen. – Die Gesamtheit der Feinheitsmaße bildet (bezügl. der durch $f_1 \le f_2 :\iff f_1(G) \le f_2(G)$ für alle G definierten Teilordnung) einen vollständigen Verband mit unendlich vielen Elementen. – Die betrachtete Zerlegungsform ist besonders auch im Falle unendlicher Graphen von Interesse.

18.11.65 R. Halin

Verbindungen zwischen Allgemeiner Algebra und Geometrie

Allgemeine Algebra, die Theorie der Mengen mit Operationen, versteht sich als übergreifende Theorie aller algebraischen Strukturtheorien und verfolgt in diesem Sinne die Aufgabe, das Gemeinsame dieser Strukturtheorien (Begriffe, Konstruktionen, Sätze, Schlußweisen) herauszuarbeiten. In dem Vortrag wird für den Bereich der Grundlagen der Geometrie die These verdeutlicht, daß die Allgemeine Algebra von ihrem allgemeinen Ansatz her fähig ist, die Anwendung algebraischer Methoden in nichtalgebraischen Gebieten verständlich zu machen.

Im einzelnen wird ausgeführt:

1) Algebraische Beschreibung von Geometrien
über die Zuordnung: geometrischer Begriff – algebraischer Begriff
(Beispiele: Teilraum zugeordnet Kongruenzklasse, Kongruenzrelation, Unteralgebra bzw. Lösungsmenge einer Gleichungsmenge)

2) Algebraische Ableitung geometrischer Aussagen
durch Nachweis auf speziellen Geometrien und Übertragung durch Homomorphismen
(modelltheoretische Analyse geometrischer Aussagen)

3) Algebraische Konstruktion von Geometrien
durch Bildung direkter Produkte, homomorpher Bilder der „koordinatisierenden" Algebren (Studium von Varietäten „koordinatisierender" Algebren)

4) Geometrische als algebraische Operationen,
wobei auf die Bedeutung einer geeigneten Struktursprache eingegangen wird.

24.11.75 Rudolf Wille

Zeit- und Bandkomplexität von Mehrband-Turing-Maschinen.

Es wird gezeigt, daß jede deterministische Mehrband-Turingmaschine mit Zeitkomplexität $t(n)$ von einer deterministischen Turingmaschine mit Bandkomplexität $t(n)/\log t(n)$ simuliert werden kann. Durch Standard-Diagonalisierung folgt, daß es 0-1-wertige Funktionen gibt, die auf Band $t(n)$ aber nicht in Zeit $t(n)$ berechnet werden können, sofern die Funktion $t(n)$ bandkonstruierbar ist. Insbesondere können die kontextsensitiven Sprachen nicht in Zeit proportional zur Länge des Inputs analysiert werden.

25. 11. 75 W. J. Paul

Criteria for Convergence of Fourier series.

We give a unified method for determining which smoothness spaces are embedded in $C_u = \{f : \text{Fourier series of } f \text{ converges uniformly on } [-\pi,\pi]\}$. and in $A = \{f : \text{Fourier series of } f \text{ converges absolutely}\}$. We measure smoothness by sets of functions $L^p_\omega = \{f : \|f(x+t)-f(x)\|_{L^p} = O(\omega(t)),\ t>0\}$ and $l^p_\omega = \{f : \|f(x+t)-f(x)\|_{L^p} = o(\omega(t)),\ t \downarrow 0\}$.

Th 1. $l^p_\omega \subset C_u$ if and only if $\begin{cases} \omega(\frac{1}{n})\log n = O(1) & p=\infty \\ \omega(\frac{1}{n})\, n^{1/p} = O(1) & 1 \le p < \infty \end{cases}$

th. 2. $l^p_\omega \subseteq A$ only if $\begin{cases} \omega(\frac{1}{n})\, n^{1/2} = O(1) & 2 \le p \le \infty \\ \omega(\frac{1}{n})\, n^{1/p} = O(1) & 1 \le p \le 2. \end{cases}$

The proof of theorems 1 and 2 rest on reducing the problem to the estimation of certain functional on the l^p_ω spaces. The technique is patterned after the usual proof of the existence of $f \in C_{2\pi}$ whose Fourier series diverges. The functionals that need to be estimated are of the form $\ell_T(f) = \int f(t)\,T(t)\,dt$ with T a trigonometric polynomial (e.g. $T = D_n$ the Dirichlet kernel in theorem 1).
These functionals are estimated from below by the following inequality

Theorem 3. There is a constant $C_1 > 0$ such that $C_1\,\omega(\frac{1}{n})\,\|T\|_q \le \|\ell_T\|$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ for all T of degree $\le n$.

This theorem is related to the classical inequality of Bernstein (the case $p=1, q=\infty, \omega(t)=t$)

1. 12. 75 R. DeVore

Dynamische Optimierung und statistische Entscheidungstheorie

Es wird ein Entscheidungsmodell vorgestellt, das sowohl das Entscheidungsmodell der dynamischen Optimierung als auch das Modell der statistischen Entscheidungstheorie (von A. Wald, Le Cam) als Spezialfall enthält. Dieses Modell definiert eine Familie von stochastischen Prozessen mit Trajektorien $(s_1, a_1, .., s_n, a_n, ...) \in H_\infty$ bei denen s_n als Zustand eines Systems z. Z. t und a_n als eine z. Z. t ergriffene Aktion interpretiert werden können. Das Modell kann aufgefaßt werden als ein statistisches Spiel, in dem üblicherweise ein Spieler als der Statistiker und der zweite Spieler als die Natur bezeichnet werden. Eine Strategie $\pi \in \Delta$ des Statistikers – in der dynamischen Optimierung wird sie als Politik bezeichnet – gibt an, in welcher Weise die Aktionen a_n in Abhängigkeit von der Vorgeschichte $(s_1, a_1, .., s_n)$ ergriffen werden. Eine Strategie q^ϑ, $\vartheta \in \Theta$, der Natur – bzw. ein Bewegungsgesetz, in der Terminologie der dynamischen Optimierung – legt die Verteilung der Zustände s_n fest, eventuell wieder in Abhängigkeit von der Vorgeschichte $(s_1, a_1, .., a_{n-1})$. Eine Politik π und ein Bewegungsgesetz q^ϑ bestimmen eindeutig die stochastische Entwicklung des Prozesses, also ein Wahrscheinlichkeitsmaß P_π^ϑ auf H_∞, und darüber hinaus über die vorgegebene Verlust- bzw. Kostenfunktion $L: \Theta \times H_\infty \to [0, \infty]$ die Risikofunktion $R: \Theta \times \Delta \to [0, \infty]$ gemäß $R(\vartheta, \pi) = \int L(\vartheta, h)\, P_\pi^\vartheta(dh)$. Zugrunde gelegt wird ein Optimalitätskriterium, das zu einer vagen Vorbewertung Λ (einer Familie von a-priori-Verteilungen) definiert ist und als Spezialfälle das Minimaxkriterium, das Bayes-Kriterium sowie die Kriterien von O. Krafft, Hurwicz, Hodges und Lehmann, Menges enthält. Dieses Kriterium schreibt vor, π so zu wählen, daß die Zielfunktion $\pi \to \sup_{\mu \in \Lambda} \int R(\vartheta, \pi)\, \mu(d\vartheta)$ minimiert wird. Es werden hinreichende Bedingungen für die Existenz einer Topologie auf Δ angegeben, so daß Δ (quasi-) kompakt und die Abbildungen $\pi \to R(\vartheta, \pi)$ für jedes $\vartheta \in \Theta$ (~~a-priori-Verteilungen~~ μ) nach unten halbstetig sind. Dadurch ist die Existenz einer optimalen Politik gesichert.

10.12.75 Manfred Schäl

Formale Gruppen und ~~[illegible]~~ Anwendungen

Michiel Hazewinkel, Rotterdam

1. Definition. Sei A ein Ring, kommutativ, $1 \in A$. Ein (kommutative) eindimensionale formale Gruppe über A ist eine Potenzreihe $F(X,Y) \in A[[X,Y]]$ derart dass
$$F(0,X) = X,\quad F(X,0) = X,\quad F(F(X,Y),Z) = F(X,F(Y,Z)),\quad F(X,Y) = F(Y,X)$$

2. Beispiele

A. $\hat{\mathcal{G}}_a(X,Y) = X+Y$, $\hat{\mathcal{G}}_m(X,Y) = X+Y+XY$

(B. Es sei $\mathcal{G}$ eine Liesche Gruppe analytisch. In eine Umgebung von e kann mann die Multiplikation in lokalen Koordinaten mittels eine Potenzreihe in $2n$ variabelen darstellen ($n = \dim \mathcal{G}$) $(x.y)_i = f_i(x;y)$, $x = (x_1,\dots,x_n)$, $y = (y_1,\dots,y_n)$. Die Potenzreihen f_i bilden ein nicht ~~k~~ notwendig kommutative ~~formelle~~ formale Gruppe der Dimension n. Etwas ähnliches macht man mit algebraische Gruppen (Komplettierung entlang des 1-elements)).

3. Beispiele aus der Algebraische Topologie (cf. [1])

Ein (generalisierte) cohomologie theorie h ist complex orientiert falls es für jedes linien bundel ξ ein Klasse (Eulerklasse ~~oder~~ oder erste ~~Chern~~ Chern'sche Klasse) gibt die funktoriell ist, $e(\xi) \in h^2(B)$ und derart dass $h(\mathbb{CP}^n) = h(pt)[x]/(x^{n+1})$ mit $x = e(\eta)$, η das kanonische Linienbündel über $\mathbb{CP}^\infty$. Dann ist
$$h(\mathbb{CP}^\infty) = h(pt)[[x]],\quad h(\mathbb{CP}^\infty \times \mathbb{CP}^\infty) = h(pt)[[y,z]]$$
mit $x = e(\eta)$, $y = e(\eta \otimes 1)$, $z = e(1 \otimes \eta)$. Aber $\mathbb{CP}^\infty$ ist ein H-raum, und die Multiplikation ~~auf~~ induziert ein homomorphismus $\alpha: h(pt)[[x]] \to h(pt)[[y,z]]$. Das bild ~~fn~~ von x ist dann ein formale Potenzreihe in y,z ~~und~~ $\alpha(x) = \sum a_{ij} y^i z^j$ und diese Potenzreihe ist ein formelle Gruppe über $h(pt)$.

Beispiele von complex orientierten Kohomologietheorien sind, H (= gewöhnliche Kohomologie), K (= komplexe K-theorie), MU (= komplexe Kobordismus), BP (= Brown Peterson cohomologie)

4. Logarithmus Satz. (Lazard)

Sei $A \hookrightarrow A \otimes \mathbb{Q}$ injektiv. $F(X,Y)$ ein eindimensionale formale Gruppe über A. Dann gibt es genau ein Potenzreihe $f(X) = X + a_2X^2 + \dots$, $a_i \in A \otimes \mathbb{Q}$ so dass $F(X,Y) = f^{-1}(f(X) + f(Y))$.

~~8. Formel für ein universeller formale Gruppe.~~

5. Funktionalgleichung lemma. (cf. [4])

Es sei $\mathbb{Z}_{(p)}[V;W]$ kurz für $\mathbb{Z}_{(p)}[V_1,V_2,\dots;W_1,W_2,\dots]$ und $f(X) \in \mathbb{Q}[V,W][[X]]$ derart dass

$$(5.1) \qquad f(X) = g_p(X) + \sum \frac{V_i}{p} f^{(p^i)}(X^{p^i})$$

für gewisses $g(X) \in \mathbb{Z}_{(p)}[V,W][[X]]$, wo $f^{(p^i)}(X)$ aus $f(X)$ bekommen wird durch die endomorphismus $V_j \mapsto V_j^{p^i}$, $W_j \mapsto W_j^{p^i}$ auf die Koeffizienten von f an zu wenden.

Sei $F(X,Y) = f^{-1}(f(X)+f(Y))$ dann ist $F(X,Y) \in \mathbb{Z}_{(p)}[V,W][[X,Y]]$.

6. Konstruktion einer universelle formale Gruppe. (cf. [4])

Man konstruiert nun eine potenzreihe $f_U(X) \in \mathbb{Q}[U_2,U_3,\dots][[X]]$ so dass erstens (5.1) richtig ist für alle p (mit $V_i = U_{p^i}$) und zweitens $f_U(X) \equiv \nu(n)^{-1} U_n X^n$ mod $(X^{n+1}, U_2,\dots,U_{n-1})$ wo $\nu(p^r) = p$ und $\nu(m) = 1$ falls m nicht ein Primzahlpotenz ist. Dann ist $F_U(X,Y) = f_U^{-1}(f_U(X)+f_U(Y))$ eine formale Gruppe over $\mathbb{Z}[U]$ die universell ist. Das heisst jede ~~...~~ ein dimensionale formale Gruppe über ein Ring A kriegt man eindeutig durch Spezialisierung der U_i.

Man hat auch ein sogenannte universelle p-typische formale Gruppe $F_V(X,Y)$ mit logarithmus $f_V(X) = X + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{V_i}{p} f^{(p^i)}(X^{p^i})$.

7. Beispiele von logarithmen (cf. [1])

$\log \hat{G}_a(X) = X$, $\log \hat{G}_m(X) = \log(1+X)$ (bekannte Potenzreihe Formel)

Es sei μ_h die formale Gruppe der Kohomologie theorie h. Dann ist

$$\cancel{\log \mu_H(X)} \; \mu_H(X,Y) = X + Y \qquad \mu_K(X,Y) = X + Y - XY$$

$$\log \mu_{BP}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[\mathbb{CP}^{p^i-1}]}{p^i} X^{p^i} \qquad \log \mu_{MU}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[\mathbb{CP}^{i-1}]}{i} X^i$$

(Die beide letzten Formeln sind von Mischenko bewiesen)

8. Satz (Quillen) (cf. [1])

μ_{BP} ist eine p-typischer universelle formale Gruppe

μ_{MU} ist eine universelle formale Gruppe

9. Generatoren für BP und MU

Wenn man 8, 7, 6 kombiniert bekommt man Formeln für die polynom generatoren von $BP_*(pt)$ und $MU_*(pt)$ ~~in die komplexe projektiven Räume~~. Cf. [2]

[illegible]

10. Weitere Anwendungen.

Mittels die Funktionalgleichung konstruiert man auch ein universelle Isomorphismus von formale Gruppe. Diese kann man dann ausnützen zur Berechnung der Kohomologie operationen von e.g. BP. Cf. [3].

Literatur.

1. J.F. Adams — Stable homotopy and generalized homology. Univ. of Chicago Press, 1974
2. M. Hazewinkel — A universal formal group and complex cobordism. Bull. AMS ~~...~~. 81, 6 (1975).
3. M. Hazewinkel — A universal isomorphism for p-typical formal groups and operations in Brown-Peterson cohomology
4. M. Hazewinkel — Constructing formal groups I, II, III, IV, V, VI. Preprints Erasmus Univ. Rotterdam (To appear in J. Pure & Applied Algebra)

(9. 12. 75)

Beste quadratische unverfälschte Schätzungen in Varianz-Kovarianz-Komponentenmodellen.

Wir betrachten das lineare Modell $Ey = X\beta$, $\mathrm{Cov}\, y = C\Sigma C' + V\sigma$, wobei β, Σ, σ unbekannte Parameter sind und X, C, V geeignete bekannte Matrizen geeigneter Ordnung sind. Solche Modelle treten häufig in der Biologie und Landwirtschaft, aber auch in der Ökonometrie auf. Das Problem in solchen Modellen ist die Schätzung der unbekannten Parameter(-Matrizen) β, Σ, σ. Es hat sich als zweckmäßig erwiesen, β durch lineare Funktionen von y und (Σ, σ) durch quadratische Funktionen von y zu schätzen. Auf diese Weise kommt man auf das abgeleitete Modell $Eyy' = X\Lambda X' + \mathrm{Cov}\, y$, wobei $\Lambda = \beta\beta'$ und $\mathrm{Cov}\, yy' = 2[Eyy' \otimes Eyy' - X\Lambda X' \otimes X\Lambda X']$, welches unter der Annahme der Quasi-Normalität gültig ist. Die Frage, wann es gleichmäßig beste lineare unverfälschte Schätzungen von $X\beta$ gibt, führt auf Symmetrie-Bedingungen für gewisse Matrizen. Die Frage nach der Existenz gleichmäßig bester quadratischer unverfälschter Schätzungen von $(\Lambda, \Sigma, \sigma)$ führt auf modifizierte quadratische Unterraum-Bedingungen, wie sie zuerst von Justus Seely (AMS 1970) formuliert worden sind. Der Vortrag wird durch ein empirisches Beispiel eingeleitet.

10.12.1975 Hilmar Drygas,
Frankfurt am Main.

1

162a

A SURVEY OF RECENT RESULTS OF APPROXIMATION-THEORETICAL NATURE IN p-ADIC ANALYSIS

R. BOJANIC

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, OHIO STATE UNIVERSITY COLUMBUS, OHIO 43210

Let $|\ |_p$ be the p-adic valuation on the field of p-adic numbers $\mathbb{Q}_p$, normalized so that $|p|_p = p^{-1}$, and let I be the ring of p-adic integers. A theorem of Mahler states that every continuous function $f: I \to \mathbb{Q}_p$ has the representation

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)\binom{x}{n} \text{ for every } x \in I,$$

(1)

where

$$a_n(f) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} f(k).$$

(2)

and

$$\lim_{n\to\infty} |a_n(f)|_p = 0.$$

(3)

The importance of Mahler's result lies probably in the fact that the n-th partial sum of the series (1) gives a polynomial of best approximation to f on I. More precisely, if f is a continuous p-adic valued function on I, and

$$e_n(f) = \inf_{P \in \mathbb{P}_n} \max_{x \in I} |f(x) - P(x)|_p,$$

then

$$e_n(f) = \max_{x \in I} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k(f)\binom{x}{k} \right|_p = \max_{k \geq n+1} |a_k(f)|_p.$$

1626

From Mahler's theorem follows, in particular, that (3) is a necessary condition for the continuity of f on I, but that condition is clearly not sufficient since the coefficients $a_n(f)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ are determined only by the values of f on the set $J = \{0, 1, 2, \ldots\}$. In a paper on approximation of continuous functions in p-adic analysis, Ahlswede and Bojanic proved that (3) is a necessary and sufficient condition for f to be uniformly continuous on J, which means that

$$\max_{k \in J} |f(k + p^t) - f(k)|_p \to 0 \quad (t \to \infty).$$

Using similar arguments, it is possible to obtain a complete characterization of continuous functions on I by means of the formulas

$$\Delta_h^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k)$$

and

$$f(x + nh) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta_h^k f(x).$$

This characterization is given by the following theorem:

A function $f: I \to Q_p$ is a continuous function if and only if

$$\max_{h, x \in I} |\Delta_h^n f(x)|_p \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Free actions of finite groups on homotopy spheres

Around 1950 Cartan-Eilenberg asked: Which finite groups π act freely on a closed manifold having the homotopy type of a sphere S^n for some n? Here follows the history and status of the problem:

(1) (1950) Cartan Eilenberg - If π act freely on Σ^n (homotopy n sphere) then π has periodic cohomology and $n = kp-1$ for some positive integer k where p is the period of π.

(2) (1957) Milnor - If π acts freely on Σ^n every element of order 2 lies in the center of π

(3) (1960) Swan - If π ~~act freely~~ has periodic cohomology, it acts freely on a <u>simplicial complex K</u> having the homotopy type of S^n for some n.

(4) (1970) Petrie - If π is a metacyclic group $Z_{p,q}$ i.e. fit in an exact sequence $1 \to Z_p \to Z_{p,q} \to Z_q \to 1$ with p odd, q an odd prime and $(p,q) = 1$, then π acts freely and smoothly on the standard sphere S^{2q-1} of dim $2q-1$.

(5) (1975) Madsen-Thomas-Wall If π has periodic cohomology and every element of order 2 lies in the center of π, then π acts freely and smoothly on Σ^n for some n.

Dec 15, 1975 Ted Petrie Rutgers & Aarhus