Singuläre Randeigenwertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungssystemen.

Betrachtet werden Randeigenwertprobleme, denen ein auf einem beliebigen Intervall I der reellen Achse definiertes System der Form

$$C_1(x)y'(x) + D_1(x)y(x) = \lambda\{C_2(x)y'(x) + D_2(x)y(x)\}$$

zugrunde liegt. Das Eigenwertproblem ergibt sich, indem an den Endpunkten von I gegebenenfalls Randbedingungen zu erfüllen und ist der Form

$$Fy = \lambda Gy \; ; \; y \in R,$$

wo R ein geeignet definierter Vektorraum mit positiv semidefinitem hermiteschem Skalarprodukt ist. Die Spektraltheorie dieser Probleme läßt sich zurückführen auf die Spektraltheorie eines selbstadjungierten Operators in einem Hilbertraum und durch Anwendung des Spektralsatzes ergibt sich u.a. ein (punktweiser) Entwicklungssatz der Form

$$y(x) = \int_{\mathbb{R}} Y_\lambda(x)\, d\Big(y, \int_0^\lambda Y_\sigma\, d\Psi(\sigma)\Big),$$

wo $Y_\lambda(x)$ eine Fundamentalmatrix des Differentialgleichungssystems ist. Ferner können allgemeine Integraltransformationen mit zugehörigen Umkehrformeln angegeben werden, deren Kerne Lösungen des Differentialgleichungssystems sind.

5.1.76 A. Schneider

Wuppertal.

9. 1. 76

Zur Theorie der Siegelschen Modulfunktionen

Eine Modulform n-ten Grades vom Gewicht $r \in \{0,1,2,\ldots\}$ ist eine in der Siegelschen Halbebene S_n holomorphe Funktion f, welche dem Transformationsverhalten

$$f\left((AZ+B)(CZ+D)^{-1}\right) = \det(CZ+D)^r \, f(Z)$$

für alle ganzen symplektischen Matrizen $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n, \mathbb{Z}) = \Gamma_n$

genügt. Diese Formen bilden einen Vektorraum $[\Gamma_n, r]$. Die graduierte Algebra

$$A(\Gamma_n) = \bigoplus [\Gamma_n, r]$$

ist endlich erzeugt. Man hat einen Operator (Ring-homomorphismus)

$$\Phi : A(\Gamma_n) \to A(\Gamma_{n-1})$$

$$(f|\Phi)(Z) = \lim_{t \to \infty} f\begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & it \end{pmatrix}$$

und kann daher zum projektiven Limes

$$A = \varprojlim A(\Gamma_n)$$

übergehen

Vermutung: A ist ein Polynomring, erzeugt von den Thetafunktionen zu unzerlegbaren quadratischen Formen

$S = S^{(m)} > 0$, S gerade, $\det S = 1$.

Einige Folgerungen aus dieser Vermutung können bewiesen werden.

Eberhard Freitag (Mainz)

McKay Numbers and heights of characters.

This talk was concerned with discussing 2 recent conjectures in representation theory of finite groups by McKay and Alperin. The main topic was to discuss how to prove these conjectures for finite symmetric and general linear groups. Also it was discussed how to compute block theoretic invariants in symmetric group by means of a new construction, the so called p-core tower of a finite partition. It is obtained by repeatedly taking p-cores of p-quotiens (See Robinson: Representation Theory of Symmetric Groups). From the p-core tower of a partition of n one can read of various information about the corresponding character of $Sym(n)$ and the p-block containing it. This is used to prove McKay's and Alperin's conjectures for Sym(n). A somewhat similar argument can be used to prove McKay's conjecture in $GL(n,q)$. The content of this talk is to appear (under the above title) in Math. Scand.

Jörn B. Olsson (Dortmund).

16.1.76 Der Logarithmus als additive Funktion.

Erdös bewies 1946 die folgenden zwei Sätze: 1. Ist f eine additive zahlentheoretische Funktion (d.h. $f(mn) = f(m) + f(n)$ wenn $(m,n) = 1$ ist) und strebt $f(n+1) - f(n)$ gegen 0, so ist $f(n) = \text{const} \cdot \log n$. 2. Dasselbe wenn $f(n+1) \geq f(n)$ vorausgesetzt wird. Ähnliche Aussagen mit abgeschwächten Voraussetzungen blieben längere Zeit Vermutungen. 1968 konnte der Referent zeigen: Ist f vollständig additiv und $f(n+1) - f(n) \geq -K$, so ist $f = c \log$. Für im obigen Sinn eingeschränkt additives f gilt entsprechend $f(n) = c \log n + O(1)$. – Kátai bewies (um 1969): Ist f additiv, $\sum_{n \leq x} |f(n+1) - f(n)| = o(x)$ so ist $f = c \cdot \log$. Hierzu gilt die Verschärfung: Ist f additiv und gibt es ein $\gamma > 1$ sowie eine Folge $x_i \to \infty$ so daß gilt $\sum_{x_i \leq n \leq \gamma x_i} |f(n+1) - f(n)| = o(x_i)$, so ist $f = c \cdot \log$. Hier bleibt das Problem, die Intervalle $[x_i, \gamma x_i]$ möglichst weit zu verkürzen. – Als jüngste Ergebnisse sind zu vermerken aus der Dissertation von R. Sück (Ulm, z. Z. im Entstehen): Ist f vollst. additiv und $f(n+1) - f(n) = O((\log\log n)^{1-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, so ist $f = c \cdot \log$. Tatsächlich kommt man sogar mit $f(n+1) - f(n) = o(\log\log n)$ aus, aber alles dies scheint von bestmöglichen Resultaten weit entfernt zu sein. Nicht einmal die extreme Vermutung „f vollst. additiv, $f(n+1) - f(n) = O(\log n) \Longrightarrow f = c \cdot \log$" kann bisher widerlegt werden. – Wenigstens für eingeschränkt additive Funktionen gibt es ein Resultat in dieser Richtung (Erdös u. Ref.): Ist $g \nearrow \infty$, $f(p^\nu) = g(p^\nu) \log p^\nu$, f im übrigen durch Additivität erklärt (also nicht $f = O(\log)$), so gilt $f(n+1) - f(n) = o(\log n)$ genau dann, wenn $g(e^x) - g(x) \to 0$ für $x \to \infty$. (Man bemerke, daß der k-fach iterierte Logarithmus diese Bedingung vom g schon nicht mehr erfüllt.)

Eduard Wirsing

22.1.76 D.W. Müller: Die Struktur statistischer Entscheidungsmodelle bei großen Stichproben

Es wird das asymptotische Verhalten von Experimenten $\mathcal{E}_n^n = (P_{\theta,n}^n : \theta \in \mathbb{R}^k)$ untersucht, wenn der Grenzübergang allgemeiner als im klassischen Fall (Reskalierung der Parameter mit $1/\sqrt{n}$) vorgenommen wird. Dabei entsteht die Notwendigkeit, abgehend von den klassischen Differenzierbarkeitsforderungen an die Dichten, Bedingungen zu stellen, die eine statistische Interpretation zulassen. Es wird dabei ausgegangen von der Bedingung I von Le Cam:

$\inf_n \Delta(\mathcal{E}_n^n, \mathcal{E}_{perf}) > 0$, wobei $\mathcal{E}_n = (P_n, Q_n)$ ein binäres und $\mathcal{E}_{perf}$ das binäre perfekte Experiment darstellt.

Es ist bekannt, daß diese Bedingung – sinngemäß auf die binären Teile höherdim. Experimente angewandt – um Lebesgue-fast jeden Parameter herum asymptotische Normalität zur Folge hat. Die Ausnahmemenge ist jedoch nicht trivial. Um auch diese Fälle studieren zu können, wird die Forderung II gestellt, daß seltene Ereignisse geringe Information enthalten, d.h. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$

$\sup_n \Delta(\mathcal{E}_n^n, ({}^A\mathcal{E}_n)^n) < \varepsilon$ sobald $P(A) > 1-\delta$. Hierbei bedeutet ${}^A P$ die bedingte Wahrscheinlichkeit ggü. A, entsprechend ${}^A\mathcal{E}$ usf.

Wichtiges technisches Resultat: (unter I) diese Bed. ist äquivalent mit: $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ $\limsup_{n\to\infty} n \int_B (\sqrt{dP} - \sqrt{dQ_n})^2 < \varepsilon$ sobald $P(B) < \delta$. Unter dieser Bedingung gelten Approximationssätze für (nicht notwendig binäre) Experimente: approximierende Größen sind dabei Gauß-Experimente; dies gilt im allgemeinen unter der Zusatzbedingung, daß benachbarte Parameter schwer zu trennen sind.

19. 1. 76. The Factors of Type III. M. Takesaki.

The talk was to give some background for the following result of Connes – Takesaki, together with preliminary introduction to the subject:

Theorem. To each factor $\mathcal{M}$ of type III, there corresponds a unique covariant system $\{\mathcal{N}, \mathbb{R}, \theta\}$ of a von Neumann algebra $\mathcal{N}$ of type II_∞ and a one parameter automorphism group $\{\theta_t : t \in \mathbb{R}\}$ which transforms some semi-finite normal trace τ in such a way that $\tau \circ \theta_t = e^{-t}\tau$, $t \in \mathbb{R}$, and acts on the center $C_{\mathcal{N}}$ of $\mathcal{N}$ ergodically but not isomorphic to $L^\infty(\mathbb{R})$ with translation, such that

$$\mathcal{M} \cong W^*(\mathcal{N}, \mathbb{R}, \theta),$$

where $W^*(\mathcal{N}, \mathbb{R}, \theta)$ denotes the crossed product of $\mathcal{N}$ by $\{\theta_t : t \in \mathbb{R}\}$.

26. Jan. 76 Über die Norm von Faltungsoperatoren in diskreten Gruppen.

Sei G eine diskrete Gruppe und f eine Funktion auf G mit endlichem Träger K. Die Funktion f operiert vermöge Faltung als stetiger Operator auf $\mathcal{L}^2(G)$. Die Operatornorm $|||f|||$ kann abgeschätzt werden durch

$$|||f||| \leq \sqrt{2(1+k-w)}\,\|f\|_2 \qquad ①$$

wobei $k = \#(K)$ und $w = \inf\{\#(KU)/\#(U) \mid G \supset U \text{ endlich}\}$

Ist speziell $f = \chi_K$ dann gilt sogar

$$|||f|||^2 \leq k + 2\sqrt{w(k-1)(k-w)} + (k-2)(k-w) \qquad ②$$

Die Abschätzung ② ist scharf für die beiden Extremfälle $w = 1$ und $w = k-1$.

Der Beweis verwendet die folgende Verallgemeinerung des Heiratssatzes. Sei H eine endliche Menge, $D \neq \emptyset$ und seien $p, q \in \mathbb{N}$. Jedem $h \in H$ sei eine Teilmenge $\varphi(h) \subset D$ zugeordnet, so daß $\#(\varphi(H')) \geq \frac{p}{q}\#(H')$ für alle $H' \subset H$. Dann gibt es zu jeder disjunkten Familie $(H_j)_{j=1\ldots\ell}$ von H mit $\#(H_j) = q$ eine disjunkte Familie $(D_j)_{j=1\ldots\ell}$ von D mit $\#(D_j) = p$ und $D_j \subset \varphi(H_j)$.

Sei E eine unendliche Teilmenge der diskreten Gruppe G, und sei $\varphi_E(n) = \inf \{ \omega(K) \mid K \subset E$ und $\#(K) = n \}$

① Existiert ein $M > 0$ mit $\varphi_E(n) \leq M$ und gilt $\mathcal{L}^p(E) * \mathcal{L}^2(G) \subset \mathcal{L}^2(G)$ dann folgt $p = 1$

② Existiert ein $M > 0$ mit $\varphi_E(n) \geq n - M$ dann gilt
$\mathcal{L}^p(E) * \mathcal{L}^2(G) \subset \mathcal{L}^2(G)$ für alle $1 \leq p \leq 2$

Als Folgerung wird gezeigt, daß in diskreten Gruppen, die unendliche unitäre Untergruppen oder endliche Untergruppen von beliebig hoher Ordnung besitzen das Kunze-Stein Phänomen nicht auftritt

Volker Terp (Heidelberg)

2.2.76 Die globale Dimension von Ore Erweiterungen.

Sei R ein Ring D eine Ableitung von R und $S = R[t]$ die Ore Erweiterung, d.h. die Elemente von S sind Polynome und $rt = tr + D(r)$.

Satz (Rinehart, Stafford, Rosenberg) Sei R links und rechts noethersch dann ist $\text{gl.dim}\, S = \text{gl.dim}\, R + 1 < \infty$ $\Longleftrightarrow$ $\exists$ M mit $\text{hd}_S M = d = \text{gl.dim}\, R < \infty$ und endlich erzeugt als R-Modul.

A. Rosenberg (Ithaca, z. Zt. München)

4.2.76 Kanonische Gibbsmaße, de Finetti's Theorem und gemischte Poisson-Punktprozeß

Sei $S = \mathbb{Z}^d$ bzw. $\mathbb{R}^d$, $\Omega = \{0,1\}^S$ bzw. $M(S)$ der Raum aller Teilchenkonfigurationen auf S. Ein W-maß μ auf Ω heißt Gibbs'sch, wenn für jedes beschränkte $\Lambda \subset S$ die bedingte W. für Konfigurationen in Λ, gegeben die Konf. ω in Λ^c, als Dichte die groß-kanon. Gibbs-verteilung besitzt. μ heißt kanon. Gibbsmaß, wenn entsprechendes für die kanon. Gibbsverteilungen gilt. Es werden Vor. genannt, unter denen kanon. Gibbsmaße Mischungen von Gibbsmaßen sind. Im diskreten Fall verallgemeinert dies de Finetti's Theorem, im kontinuierlichen eine analoge Charakterisierung der gemischten Poisson-Prozesse.

(H.-O. Georgii, Heidelberg)

5.3.76 Invariants and Canonical Forms for Meromorphic Differential Equations.

If $x' = A(z)x$ is a system of n linear differential equations and $A(z) = \sum_0^\infty A_\nu z^{r-1-\nu}$, where the power series converges for $|z| > R$, we consider a linear transformation $x = T(z)y$ into a new differential system $y' = B(z)y$, $B = T^{-1}AT - T^{-1}T'$, and ask what quantities stay invariant when $T(z)$ consists of functions which are at least meromorphic at ∞. One asks for complete and independent systems of invariants for such a problem and canonical forms to which a given system is equivalent. This problem was first considered by G.D. Birkhoff who proved in 1913 that for the representatives $B(z)$ one may take $n \times n$ matrices with only 2 singular points, at ∞ and 0, and 0 is a regular singular point of the solutions. Birkhoff actually claimed that at 0 $B(z)$ has only a simple pole, but this is not correct, generally.

When $n=2$ and $r=1$, Jurkat, Lutz, and Peyerimhoff have given a complete theory of invariants (Journal Math. Anal. & Appl. 1976 and Houston J. Math. 1976). The theory can even be made "effective" in the sense that one can, for a given differential system, construct invariants and name a canonical form to which the given system is equivalent, and then construct a transformation from the given system to the canonical form. For n and/or r larger, some recent results will also be discussed and an application is made to second order linear differential equations.

W. G. Lutz

Ulm and Milwaukee

Die Automorphismengruppe kompakter Riemannscher Flächen.

30. Jede kompakte Riemannsche Fläche ist homöomorph zu einer Kugel mit einer gewissen Anzahl von Henkeln. Diese für eine gegebene Riemannsche Fläche eindeutig bestimmte Zahl heißt das Geschlecht der Fläche. So hat z.B. die Zahlenkugel $\mathbb{P}_1$ das Geschlecht Null, ein Torus das Geschlecht Eins, u.

Es gibt einen grundlegenden Unterschied zwischen den Riemannschen Flächen vom Geschlecht $g = 0$ oder 1 und den " " " $g \geq 2$: während die Automorphismengruppe von $\mathbb{P}_1$ oder eines Torus unendlich ist, ist die " einer kompakten Riemannschen Fläche endlich.

§1. X bezeichne eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g \geq 2$. Sei $\{U_i \xrightarrow{z_i} V_i\}_{i \in I}$, $\cup U_i = X$, $V_i \subset \mathbb{C}$, ein holomorpher Atlas der auf X betrachteten Struktur. $z_{ij} := z_j \circ z_i^{-1} : z_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow z_j(U_i \cap U_j)$ bezeichne die Koordinatentransformation. Ein holomorphes Differential k-ter Ordnung auf X ist eine Familie $\omega = \{\omega_i\}_{i \in I}$ von holomorphen Funktionen $\omega_i : U_i \longrightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\omega_i(x) = \left(z'_{ji}(z_i(x))\right)^k \cdot \omega_j(x) \quad \forall x \in U_i \cap U_j.$$

$\Omega^k(X)$ bezeichne den $\mathbb{C}$-Vektorraum aller hol k-Diff. Nach Riemann-Roch gilt:

$$\dim_{\mathbb{C}} \Omega^k(X) = \begin{cases} g & \text{für } k = 1 \\ (2k-1)(g-1) & \text{für } k \geq 2. \end{cases}$$

$\nu_x(\omega)$ bezeichne die Nullstellenordnung von ω in x. Ist $x \in X$, so kann man eine Basis von $\Omega^k(X)$ finden, derart, daß die NSOrdnungen in x eine echt-steigende Folge bilden. Diese Folge von Zahlen hängt nur von x ab, und deshalb wird mit $\{\rho_i^k(x),\ 1 \leq i \leq d(k)\}$ bezeichnet.

Sei $\mathrm{gew}_k(x) := \sum_{i=1}^{d(k)} \left(\rho_i^k(x) + 1 - i\right)$ (≥ 0). Es gilt:

$$\sum_{x \in X} \mathrm{gew}_k(x) = \mathrm{Gew}_k = \begin{cases} (g-1)g(g+1) & \text{für } k = 1 \\ (2k-1)^2 g (g-1)^2 & \text{für } k \geq 2. \end{cases}$$

Es gibt also endlich viele Punkte x aus X mit $\mathrm{gew}_k(x) > 0$.

Solche Punkte heißen k-Weierstraß-Punkte.
Für $k=1$ gilt: $0 \leq \mathrm{gew}_1(x) \leq \frac{g(g-1)}{2}$ und deshalb gibt es mindestens $2g+2$ aber höchstens $(g-1)g(g+1)$ verschiedene Weierstraß Punkte.

Für $k \geq 2$ konnte ich zeigen: $0 \leq \mathrm{gew}_k(x) \leq \left(\frac{g+1}{2}\right)^2$ — und daraus ebenfalls eine Abschätzung der Anzahl N_k der verschiedenen k-W.P.

Insbesondere: $\lim_{k\to\infty} N_k = \infty$.

<u>Bemerkung 1)</u>. Im Allgemeinen $(k\text{-WP}) \not\subset (k+1\text{-WP})$. (Beispiele dafür in meiner Habilitationsschrift)

2). $\bigcup_{k\geq 1} (k\text{-WP})$ dicht in X! (Mumford).

<u>§2.</u> Jeder Automorphismus h von X induziert eine Permutation der Menge der k-W.P. Der Gruppenhomomorphismus $\mathrm{Aut}(X) \longrightarrow \mathrm{Perm}(1\text{-WP})$ ist i.a. injektiv oder (im hyperelliptischen Fall) der Kern besitzt 2 Elemente. Also: $\mathrm{Aut}(X)$ ist endlich (Hurwitz)
Die beste Abschätzung: $\mathrm{card}(\mathrm{Aut}(X)) \leq 84(g-1)$.
Insbesondere: jeder Automorphismus hat eine endl. Ordnung

<u>§3.</u> Sei $h \in \mathrm{Aut}\, X$ von Primordnung N (dies ist keine besondere Einschränkung). Sei $\tilde{X} = X/_h$ die Quotientenfläche; $\tilde{g}$ bezeichne das Geschlecht von $\tilde{X}$ und t die Anzahl der Fixpunkte (t endlich, da X kompakt; ~~es~~ gilt sogar $t \leq 2(g+1)$).

Die Formel von Riemann-Hurwitz lautet:

$$2(g-1) = 2N(\tilde{g}-1) + t(N-1).$$

$\omega \in \Omega^k(X)$ ist h-invariant, falls $\omega \circ h = \omega$.

$n_0 :=$ die Dimension des Untervektorraums von $\Omega^k(X)$ aller holomorphen, h-invarianten k-Diff.

<u>Ergebnis:</u> Sei $k = Nd + \bar{k}$, $0 \le \bar{k} \le N-1$. Dann gilt:

1). $n_0 \lneq \dim_{\mathbb{C}} \Omega^k(X) =: d(k)$

2). $n_0 = \begin{cases} (2k-1)(\tilde{g}-1) + t(k-d-1) & \text{für } \bar{k} \neq 0 \\ (2k-1)(\tilde{g}-1) + t(k-d) & \text{für } \bar{k} = 0 \end{cases}$.

3). Es gibt eine Zahl $1 \le l \le N-1$, so daß ein $\omega \in \Omega^k(X)$ existiert mit $\omega \circ h = e^{2\pi i l/N}\omega$. Für ein solches l, sei $n_l = \dim_{\mathbb{C}} \{\omega \in \Omega^k(X);\ \omega \circ h = e^{2\pi i l/N}\omega\}$. Man kann n_l "schön" abschätzen; für $k=2$ gilt:

Ist $n_l \neq 0$, so gilt: $\tilde{g} - 1 + \frac{N-1}{N} t \geq n_k \geq \tilde{g} - 1 + \frac{t}{N}$.

Insbesondere: ist $t \neq 0$, so $t \geq 2$, d.h.

<u>Ergebnis:</u> Besitzt ein Automorphismus einen Fixpunkt, so besitzt er mindestens 2 Fixpunkte.

<u>§4.</u> Sei $h \in \mathrm{Aut}(X)$ von Primordnung N und $p \in X$ ein Fixpunkt von h. Sei $\omega_1, \dots, \omega_{d(k)}$ eine Basis von $\Omega^k(X)$ mit $\nu_p(\omega_1) < \dots < \omega_p(\omega_{d(k)})$. Dann gilt:

$\omega_i \circ h = \sum_{j=1}^{d(k)} c_{ij}\omega_j$; es ist leicht zu sehen, daß $c_{ij} = 0$ für $i \neq j$ und $c_{ii} = \eta^{\rho_i^{(k)}(p)+k}$

wobei $\eta \in \mathbb{C}$, $\eta^N = 1$ die Eigenschaft hat, daß "lokal" h sich durch $z \longmapsto \eta z$ darstellen läßt.

Also: die Komposition mit h induziert eine lineare Transf. von $\Omega^k(X)$, die bzgl. der bet. Basis durch die Matrix
$$\begin{pmatrix} \eta^{k+\varrho_1^k(p)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \eta^{k+\varrho_{d(k)}^k(p)} \end{pmatrix}$$
darstellbar ist. Die Anzahl der Einsen auf der Diagonale ist gerade n_0! Daraus folgt die

Möglichkeit verschiedene Aussagen (z.B.) über die Anzahl der Fixpunkte eines Automorphismus. Für $k=1$ – s. Lewittes – Autom. of compact Riemann surfaces, Amer. J. of Math 1963. Für $k\geq 2$ – in meiner Habilschrift (erscheint demnächst).

§5. Familien von Riemannschen Flächen – Teichmüller Raum –. Sei T_g — der Teichmüller Raum kompakter Riemannscher Flächen vom Geschlecht $g\geq 2$ und $V_g \longrightarrow T_g$ die universelle Familie.

Sei $V_{g,t}$ die Faser dieser Familie über $t\in T_g$; sei

$(k\text{-}WP)_t \subset V_{g,t}$ die Menge der k-W.P. der Fläche $V_{g,t}$.

Sei $\underline{(k,g\text{-}WP)} := \bigcup_{t\in T_g} (k\text{-}WP)_t \subset V_g$.

<u>Ergebnis</u>: $(k,g\text{-}WP)$ ist analytisch.

(s. Weierstraß Punkte und ...., Math Annalen 1974/75)

A. Duma
Regensburg

17.5.1976. Kugeldistributionen auf pseudo-Riemannsche symmetrische Räumen.

Sei $X = G/H$ ein homogener symmetrischer Raum im folgenden Sinne: G ist eine Liesche Gruppe, H eine abgeschlossene Untergruppe, S ein involutiver Automorphismus in G mit $(G^S)_0 \subset H \subset G^S$, wobei $G^S = \{g \in G \mid S(g) = g\}$ und $(G^S)_0$ die Zusammenhangskomponente von G^S bedeutet. Beispiele:

1) $G = SO(1+n)$ (Rotationsgruppe in $\mathbb{R}^{n+1}$) mit $S(g) = sgs^{-1}$, $s = \mathrm{diag}(-1,1,\dots,1)$;
2) $G = SO_0(1,n)$ (Lorentzgruppe in $\mathbb{R}^{n+1}$) mit $S(g) = sgs^{-1}$, $s = \mathrm{diag}(-1,1,\dots,1)$;
3) $G = SO_0(1,n)$, mit $S(g) = sgs^{-1}$, $s = \mathrm{diag}(-1,1,-1,\dots,-1)$

In den Fällen 1), 2), ist $G^S = (G^S)_0 = SO(n)$, während im Falle 3), $(G_S)^0 = SO_0(1,n-1)$ ist. So ist $G/H = S^n$ (die Einheitskugel), das obige Blatt des Hyperboloids $-x_0^2+x_1^2+\dots+x_n^2 = -1$, bezw. das 1-blättrige Hyperboloid $-x_0^2+x_1^2+\dots+x_n^2 = 1$.

In den beiden Riemannschen Fällen 1), 2) (wo H kompakt ist), gilt die E. Cartan–Gelfandsche Theorie der Kugelfunktionen und deren entsprechende Kugeldarstellungen von G in Bezug auf H. Ziel dieses Vortrags ist eine Definition ~~und~~ um Angabe einiger Sätze ~~und~~ sowie Vermutungen, die diese Konstruktion bestätigen sollen.

Nach Lichnerowicz (Battelle Rencontre 1967, S. 73–83), ist die Algebra $\mathcal{D}(G/H)$ (der G-invarianten Diff. operatoren in G/H) auch im Fall pseudo-Riemannscher symm. Räumen kommutativ. Die Kugelfunktionen (oder Kugeldistributionen) sollen als verallgemeinerte zweiseitig H-invariante Eigendistributionen in G für alle $D \in \mathcal{D}(G/H)$ aufgefaßt werden. Unter Benutzung der Ergebnisse von Poulsen–Cartier (Sem. Bourbaki 1974 Nov.), kann man dann zu einer irreduziblen Kugeldarstellung (d.h. eine unitäre Darstellung mit einem H-invarianten verallgemeinerten Vektor) eine positiv-definite Kugeldistribution zuordnen.

Vermutet wird, daß, umgekehrt, eine positiv-definite zyklischen Kugel~~darstellung~~distribution eine irreduzible Kugeldarstellung bestimmt.

Die reguläre Darstellung von G in $L^2(G/H)$ soll in einer direkten "Summe" von Kugeldarstellungen zerfallen, wie es z.B. im Fall 3) tatsächlich gilt.

Reiji TAKAHASHI (Nancy)
高橋礼司

18.5.76

Kugeldistributionen auf Hyperboloiden

Für die homogene Räume $O(p,q)/O(p,q-1)$ hat Molčanov die Kugelfunktionen definiert. Wenn $q=1$ sind sie tatsächlich Funktionen, sonst sind sie verallgemeinerte Funktionen. Sie sind Lösungen einer Legendre differentialgleichung, besitzen eine Integraldarstellung.

Zu einer positiv definiert Kugeldistributionen entspricht eine Kugeldarstellung. Diese Kugeldarstellungen ermöglichen eine Fourier Analysis des homogenen Raums, das heißt einen Satz von Bochner, eine Formel von Plancherel und einen Satz von Paley-Wiener.

Jacques Faraut (Strasbourg)

25-5-76 Finite Groups with a strongly 3-embedded subgroup.

Let p be a prime, G a finite group. A subgroup H of G is strongly p-embedded in G if $H \neq G$, the order of H is divisible by p, but the order of $H \cap H^g$ is not divisible by p for any $g \in G-H$. In one of the major papers of finite group theory H. Bender determined the groups with a strongly 2-embedded subgroup. At this point in time it would appear necessary to determine the simple groups with a strongly 3-embedded subgroup H such that

H has a nontrivial normal 2-subgroup, in order to complete certain parts of the program to classify the finite simple groups.

Work has begun on this problem and that work was discussed. The methods are basically those of the N-group paper.

Michael Aschbacher (Pasadena)

31/May 76 Kompakte Kählersche Mannifaltigkeiten mit genugend vielen 1-Formen.

Sei M eine kompakte komplexe Mannifaltigkeit mit komplexer Dimension n. Ein komplexes Vectorbündel V über M heißt sewach "ample" wenn der Raum holomorpher Schnitte $\Gamma(V)$ die Faser V_x erzeugt für jeden Punkt $x \in M$. Falls $V = T(M)$ das holomorphe Tangentbündel, das bedeutet, daß M komplex homogen ist. Wir interessieren uns hier nur für den dualen Fall, wo $V = T^*(M)$, d.h., die holomorphe 1-formen den Kotangentraum in jedem Punkt erzeugen. Solche M nennen wir schwach "ample".

<u>Beispiel</u>: jede kompakte komplexe Untermannifaltigkeit eines komplexen Torus ist eine schwach "ample" Kählersche Mannifaltigkeit. Die Umkehrung gilt auch.

Für solche Mannifaltigkeiten hat Bochner (Ann of Math 1950) bewiesen, daß $(-1)^n \chi(M) \geq 0$ ist. Er versuchte auch den Fall $\chi(M) = 0$ zu verstehen ohne Erfolg. Matsushima und Stoll (Rice Math. Studies 1973) haben weiter bewiesen, daß $(-1)^n$ Chern Zahl ≥ 0 für alle Chern Zahlen, und auch daß M projektiv algebraisch ist falls $\chi(M) \neq 0$. Matsushima und Howard versuchten den Fall $\chi(M) = 0$ besser zu verstehen, mit Erfolg, wenn $n = 2$

Wir haben das folgende Resultat:
Sei M eine schwach ample Kählersche Mannifaltigkeit mit $\chi(M) = 0$. Dann M ist ein prinzipal komplexes Torusbündel über einer schwach amplen M_1 mit $\chi(M_1) \neq 0$.

Als Anwendung dehnen wir die "Bloch'sche Vermutung" auf alle nicht singularen geschlossene Untervarietäten M (außerdem Torus) einer Abelschen varietät A aus, d.h.

$$\phi : \mathbb{C} \xrightarrow{\text{holomorphe}} M \hookrightarrow A$$

Dann existiert eine "proper" Untervarietät Y von M mit $\phi(\mathbb{C}) \subset Y$. Diese Vermutung ist von Griffiths und Ochiai bewiesen falls $\chi(M) \neq 0$ (Williamstown Conference Proc. 1975)

Brian Smyth (Notre Dame/Bonn)

Zur Komplexität von Polynomberechnungen

V. Strassen hat 1972 eine allgemeine untere Schranke für die Länge von Polynomberechnungen bewiesen, die sich auf den Grad von Varietäten stützt. Sein Beweis benutzt Methoden der algebraischen Geometrie, insbesondere den Satz von Bezout. Gestützt auf einen einfachen Satz über algebraisch abhängige Polynome (Vgl. etwa Perron, Algebra I, § 28) wird in diesem Vortrag nach einer Einführung in die Problemstellung ein elementarer Beweis skizziert.
Es lassen sich auf diese Weise Komplexitätsaussagen wie z. B. folgende herleiten:
Die Berechungslänge $L(\sigma_1, \dots \sigma_n)$ für die sym. Grundfktn in $x_1, \dots x_n$ läßt sich nach unten durch $\lg_2(n!) \sim n \cdot \lg_2 n$ abschätzen.

8. Juni 1976 Arnold Schönhage

14 June 76

Pappus configurations and their groups

A Pappus configuration 9_3 (the 'Brianchon-Pascal configuration' of Hilbert & Cohn-Vossen) consists of 9 points $0, 1, 2, \ldots, 8$ and 9 lines 018, 027, ..., with the rule that $\lambda\mu\nu$ is a triad of collinear points when

$$\lambda + \mu + \nu \equiv 0 \pmod 9 \quad \text{and} \quad \lambda \not\equiv \mu \pmod 3.$$

The automorphism group, of order 108, includes one element that adds 3 (mod 9) and another that multiplies by 2 (mod 9). The cycle of three triangles

$$012, \quad 345, \quad 678,$$

each inscribed in the next, yields five other such 'Graves cycles' on multiplication by 2 (mod 9). (These cycles were rediscovered by G. Hessenberg.)

The group of order 108, being the symmetry group of the map $\{3, 6\}_6$ of 18 triangles on a torus, has the presentation

$$B^6 = C^6 = (BC)^2 = (B^3C^2)^2 = (B^2C^3)^2 = 1.$$

The 18 Graves triangles yield 18 involutory dualities, generating a group of 108 automorphisms and 108 dualities:

$$B^6 = D^2 = (BD)^4 = (B^3DB^2D)^2 = 1.$$

If triangles 012 and 345 are perspective, then each is perspective with 678 (the remaining member of the Graves cycle), and the corresponding three involutory dualities are polarities with respect to three conics

$$x^2 + 2yz = 0, \quad y^2 + 2zx = 0, \quad z^2 + 2xy = 0$$

which J.A. Todd (Projective and Analytical Geometry) calls an 'apolar system'. If another Graves cycle 015, 348, 672 has the same 'perspective' property, there is a second apolar system of three conics. Then, if the triangle of reference is equilateral with (1,1,1) at its centre, all the six conics are rectangular hyperbolas, and the group of collineations and correlations is the dihedral group $\mathcal{D}_{12}$ of order 24.

HSM Coxeter

21. Juni 1976

Automorphe Formen zu Modulgruppen in Quaternionenschiefkörpern.

Ist Γ eine Modulgruppe in einem Quaternionenschiefkörper über einem total reellen Zahlkörper, so kann die Dim. der Räume der autom. Formen zu Γ über folgende Daten bestimmt werden: Volumen des Fundamentalbereiches von Γ, vollst. System der Γ-inkong. elliptischen Fixpunkte, Drehfaktoren zu den ellipt. Elementen von Γ.
Im Vortrag wurde ein Verfahren gezeigt, ein System von Γ-inkongruenten elliptischen Fixpunkten zu bestimmen, so daß in konkreten Fällen, (Beispiel: reellquadratische Grundkörper), die Dimension und damit das Geschlecht der entsprechenden Mannigfaltigkeiten ausgerechnet werden können.

Volker Schneider (Mannheim)

28. Juni 1976

Geometrische Fixpunktinvarianten von Abbildungsscharen

Ist $g: V \to B\times\mathbb{R}^n$ eine stet. Abbildung der Form $g(b,y) = (b, \gamma(b,y))$, für $(b,y) \in V \overset{\text{offen}}{\subset} B\times\mathbb{R}^n$ ~~mit kom~~ und ist B eine differb. Mannigfaltigkeit, dann ist die Fixpunktmenge $Fix(g) = \{v\in V \mid gv = v\}$ i.a. selbst eine Mannigfaltigkeit: wenn es nicht der Fall ist, läßt es sich durch Approximation von g erreichen. Wir nehmen an, daß $Fix(g)$ eigentlich über B liegt; gleichbedeutend damit ist, daß $Fix(g)$ abgeschlossen ist in $B\times\mathbb{R}^n$ und daß es eine stetige Funktion $\rho: B \to \mathbb{R}^+$ gibt derart, daß $(b,y) \in Fix(g) \Longrightarrow \|y\| < \rho(b)$ („abgeschlossen und beschränkt"). Damit ist $M = Fix(g)$ eine ~~abg~~ Mannigf. gleicher Dimension wie B, die eigentlich über B liegt. Sie definiert ~~damit e~~ daher eine Cobordismusklasse $[M\to B] \in \Omega^0 B$.
Da M durch die Gleichungen $y - \gamma(b,y) = 0$ definiert wird und diese Gleichungen unabhängig in jedem Lösungspunkt angenommen werden können (d.h. 0 als regulärer Wert von $\gamma_*: V \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_*(b,y) = y - \gamma(b,y)$) hat man außerdem in jedem Punkt $x\in M$ eine eindeutig bestimmte Basis ~~der N~~ $\beta(x)$ des Normalenraums von M in $B\times\mathbb{R}^n$; d.h. M ist eine s.g. gerahmte
($D\gamma_*(x)$ bildet $\beta(x)$ in die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ a)

Mannigfaltigkeit über B, also $[M\to B,\beta]\in\Omega^0_{fr}B$ ein Element des gerahmten (framed) Cobordismus, der bekanntlich isomorph ist zur stabilen Kohomotopiegruppe $\Omega^0_{fr}B \cong \pi^0_{st}(B\oplus \mathrm{Punkt})$. –

Oben beschriebene „lokale" Theorie überträgt sich auf die „globale" Situation $g: V\to E$, in welcher $p: E\to B$ ein Bündel (allgemeiner ENR_B) ist, $V\subset E$ offen und $Fix(g)$ eigentlich über einem metrischen Raum B. Die Fixpunktinvariante $I(g)=[M\to B,\beta]\in\Omega^0_{fr}B$ ist eine vollständige Invariante bezügl. einer naheliegenden Homotopierelation $g \sim g'$ zwischen solchen Abbildungen (fasb.) g.

Da (auch im lokalen Fall) $M\to B$ sich, wie eine endlich-blättrige Überlagerung verhält, kann man in jeder Kohomologietheorie eine Transferabb. $t^M: hM\to hB$ definieren. Um dies unabhängig von M zu machen, betrachtet man Umgebungen X von $Fix(g)$, ~~und~~ also $M\overset{i}{\subset}X$ (bei guter Approx. von g), also $hX \xrightarrow{i^*} hM \xrightarrow{t^M} hB$, für alle X. Läßt man X variieren, so erhält man ein direktes System von Abbildungen, dessen limes die gen. $\tau: h(Fix(g))\to hB$ hat. Dies ist eine feinere Fixpunktinv. als I; es ist $I(g)=\tau(1)$. Für die wichtigsten Eigenschaften von τ wird auf einen Artikel in Math. Z. 148 (1976) verwiesen.

Albrecht Dold (Heidelberg)

5. Juli, 1976 — Injektivität, Projektivität, und Auswahlaxiom.

Die üblichen Beweise, dass genügend viele injektive und projektive Abelsche Gruppen (oder R-Moduln) existieren, bestehen aus zwei Teilen:

I1. Jede Abelsche Gruppe ist in eine Teilbare einbettbar.

I2. Teilbar $\Rightarrow$ Injektiv

P1. Jede Abelsche Gruppe ist Quotient einer Freien

P2. Frei $\Rightarrow$ Projektiv.

I1 und P1 sind ohne Auswahlaxiom beweisbar, aber I2 und P2 sind (einzeln) äquivalent zum Auswahlaxiom. Kann die Existenz genügend vieler projektiven und injektiven Abelschen Gruppen auf andere Weise ohne Auswahlaxiom bewiesen werden? Oder sind diese algebraischen Aussagen dem Auswahlaxiom äquivalent?

Es wird, als Beispiel der Fraenkel-Mostowski Methode für Unabhängigkeitsbeweise, ein Modell konstruiert in dem es nicht genügend viele projektive Abelsche Gruppen gibt. Aber in diesem Modell, und in allen gewöhnlichen Fraenkel-Mostowski Modellen und Cohen Modellen, existieren genügend viele injektive Abelsche Gruppen. (Es folgt, dass, aus der Existenz genügend vieler injektiver Gruppen, weder das Auswahlaxiom noch seine bekannten schwachen Formen folgen.) Für einen Beweis, dass die Existenz genügend vieler injektiver Gruppen nicht ohne Auswahlaxiom beweisbar ist, braucht man eine eigentliche Klasse von Urelementen (oder von Erzwingungsbedingungen in der Cohenschen Methode).

Ich vermute, dass die Existenz genügend vieler projektiver Abelscher Gruppen (oder sogar die stärkere Aussage, dass es genügend viele projektive Mengen gibt) nicht das Auswahlaxiom impliziert, obwohl es (für die stärkere Aussage) keine Gegenbeispiele unter den gewöhnlichen Fraenkel-Mostowski und Cohen Modellen gibt.

Andreas Blass (Ann Arbor, z. Zt. Berlin).

8. Juli 1976

Rationale Tschebyscheff-Approximation über unbeschränkten Intervallen

Meinardus, Reddy, Taylor und Varga gaben 1972 ein hinreichender Kriterium für die geometrische Konvergenz der Minimalabweichungen bei der rationalen Approximation ganzer Funktion über $[0, \infty]$ an, das eine ziemliche Kluft zu den notwendigen Bedingungen erkennen läßt. Ausgehend von Alternanten-Charakterisierungen der Minimallösungen werden Beziehungen zwischen der Approximation auf $[0, \infty]$ zu derjenigen auf $[0, r]$ geknüpft, die einmal zu einem Weierstraßschen

Approximationssatz führen, zum andern Sätze vom Jackson- bzw. Bernstein-Typ für differenzierbare Funktionen liefern. Das oben zitierte hinreichende Kriterium für geometrische Konvergenz läßt sich wesentlich abschwächen, so daß noch unter anderem die geometrische Konvergenz bei $e^x + a\cos x$ $(a \in \mathbb{R})$ direkt ergibt, was bisher nur unter trickreicher Anwendung eines iterativen Störungssatzes zu beweisen war.

Hans-Peter Blatt (Mannheim)

12. Juli 1976

Über einige Resultate der asymptotischen Theorie der Statistik.

Es sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Meßraum und $\{P_\vartheta\}_{\vartheta\in\Theta}$, $\Theta \subseteq \mathbb{R}$, eine Familie von W-Maßen auf $\mathcal{A}$. Unter einer Schätzfunktion S_n zum Stichprobenumfang $n\in\mathbb{N}$ versteht man eine $\mathcal{A}^n$-meßbare Abbildung $S_n : \Omega^n \to \Theta$.

Unter einer Bayesschen Schätzfunktion B_n versteht man eine Schätzfunktion, die

$$\int\int W(\sqrt{n}(S_n-\vartheta))\, dP_\vartheta^n\, p(\vartheta)\, d\vartheta$$

minimiert, wobei W eine Verlustfunktion und p eine Gewichtsfunktion bezeichnet.

Es wird über asymptotische Ergebnisse berichtet, die das Verhalten von Bayes-Schätzfolgen betreffen. Das Hauptergebnis lautet:

Satz: Wenn $\{P_\vartheta\}_{\vartheta\in\Theta}$ gewisse Regularitätsvoraussetzungen erfüllt, gibt es zu jeder Verlustfunktion W eine Gewichtsfunktion p_W, sodaß (B_n)

$$P^n_\vartheta\{B_n \ge \vartheta\} \ge \frac{1}{2} - o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \forall \vartheta\in\Theta$$

$$P^n_\vartheta\{B_n \le \vartheta\} \ge \frac{1}{2} - o\left(\frac{1}{n}\right)$$

erfüllt. In diesem Fall ist (β_n) außerdem asymptotisch optimal von der Ordnung $o\left(\frac{1}{n}\right)$.
Bemerkung: Ist p_L nicht integrierbar, so ist die Definition einer Bayes-Schätzfolge zu modifizieren.

Helmut Strasser (Gießen).

15. Juli 1976

Approximationen stochastischer Programme

In einem Optimierungsproblem

$$\min f(x) \text{ bzgl. } G(x) = (\leq)\, 0,\ x \in D\ (\subset \mathbb{R}^n, \text{ konvex}) \qquad (1)$$

mit $f(x) \in \mathbb{R}$, $G(x) \in \mathbb{R}^{m}$ hängen f, G i.a. nicht nur von der Entscheidungsvariablen x ab, sondern $f = f(x,\omega)$, $G = G(x,\omega)$ sind Funktionen von x und einem Parameter ω wie z.B. Einheitskosten, Nachfrage, technologische Koeffizienten u.s.w. Da ω i.a. nicht genau bekannt ist, nehmen wir an, dass $\tilde{\omega} = \omega$, also ω die Realisation einer Zufallsvariablen $\tilde{\omega}$ mit Werten in einem messbaren Raum ist; $f(x,\omega)$, $G(x,\omega)$ seien dann für ~~jedes~~ feste x messbar in ω. Damit verliert aber die ursprüngliche Problemstellung (1) weitgehend ihren Sinn und man hat sich daher nach Neuformulierungen umgesehen. Drei Hauptrichtungen haben sich dabei herausgebildet: (I) Verteilungsproblem: Finde die Verteilung von

$$\gamma(\omega) = \inf\{f(x,\omega) : G(x,\omega) = 0,\ x \in D\}$$

(II) Chance-constrained programming:

$$\min E_{\tilde{\omega}} f(x,\tilde{\omega}) \text{ bzgl. } x \in D,\ P_{\tilde{\omega}}(G(x,\tilde{\omega}) \leq 0) \geq \alpha \qquad (0<\alpha<1, \text{ vorgegeben})$$

Hauptgegenstand des Vortrags ist die approximative Lösung (III) 2-stufiger stochastischer Programme

$$\min E_{\tilde{\omega}}\left(f(x,\tilde{\omega}) + q'y(\tilde{\omega})\right) \text{ bzgl. } -G(x,\omega) + My(\omega) = 0,\ y(\omega) \geq 0 \text{ f.s.},\ x \in D \qquad (2)$$

Dabei ist $y = y(\omega,x)$ die Entscheidung der "2. Stufe", d.h. nach Wahl von x und Eintreten von $\tilde{\omega} = \omega$, um die Verletzung der Restriktion $G(x,\omega) = 0$ in der Form $-G(x,\omega) + My(\omega) = 0$ zu kompensieren.

Sei $\operatorname{Rg} M = m-1$, $M\binom{1}{1} = 0$, $q \geq 0$: Dann ist (2) äquivalent mit

$$\inf_{x \in D} R(x), \qquad (3)$$

wobei $R(x) = E_\omega p(S(x,\omega))$, $S(x,\omega) = (f(x,\omega), G(x,\omega))$, $p(z_1, z_2, \dots, z_m) = z_1 + \inf\{q'y : My = (z_2, \dots, z_m), y \geq 0\}$. Approximative Verfahren, die minimierende Folgen $\{x_n\}$, d.h. $x_n \in D$, $R(x_n) \to \inf\{R(x) : x \in D\}$ von (3) liefern, lassen sich konstruieren durch

(A1) Linearisierung von $S(x,\omega)$ bzgl. x } $\Rightarrow$ LP!

(A2) Approximation von P_ω durch diskrete W-Masse }

(A3) Lineare- und quadratische Approximation von R

(A4) Anwendung des Satzes

$$\bar{T}x = \bar{T}y, \ \|\Gamma_i' x\| \leq \|\Gamma_i' y\|, \ i = 1, \dots, m \Rightarrow R(x) \leq R(y)$$

bzw. $R(x) < R(y)$, falls zusätzlich $\|\Gamma_{i_0}' x\| < \|\Gamma_{i_0}' y\|$ für ein i_0, im Fall dass $S(x,\omega) = T(\omega)x - v(\omega)$, $T(\omega)$, $v(\omega)$ unabhängig sind, $R_0(z) = E_\omega p(z - v(\omega))$ strikt konvex ist, die Zeilen T_i von $T(\omega)$ unabhängige m-dim. Normalverteilungen $T_i' = \bar{T}_i' + \Gamma_i \xi^{(i)}$ haben, wobei $\xi^{(i)}$ unabhängige $N(0,1)$-verteilte Komponenten hat.

(A5) Kombinationen von (A1 – A4).

Kurt Marti (Zürich, Uni)

19 th. July 1976

Random Fields: An introductory account based on some results of Dobrushin

Let S be a countable set, representing a set of "sites" or "locations", and for each $t \in S$ let X_t be a set describing the possible states of some entity which is located at t. Let $\mathcal{F}_t$ be a σ-field of subsets of X_t. A <u>random field</u> is a probability measure on $(X, \mathcal{F})$, where $X = \prod_{t \in S} X_t$, $\mathcal{F} = \prod_{t \in S} \mathcal{F}_t$. We want to find out about random fields described by certain sets of conditional probabilities.

Let $\mathcal{C}$ denote the non-empty, finite subsets of S; for $A \subset S$ let $X(A) = \prod_{t \in A} X_t$, $\mathcal{F}_0(A) = \prod_{t \in A} \mathcal{F}_t$. For each $\Lambda \in \mathcal{C}$ ~~we~~ and $y \in X(S - \Lambda)$ we are given a probability measure $\sigma_\Lambda(y, \cdot)$ on $(X(\Lambda), \mathcal{F}_0(\Lambda))$; we assume that for each $F \in \mathcal{F}_0(\Lambda)$ $\sigma_\Lambda(\cdot, F) : X(S - \Lambda) \to \mathbb{R}$ is

$\mathcal{F}_0(S-\Lambda)$-measurable. Let $\mathcal{G}$ denote those random fields which have $\{\sigma_\Lambda\}$ as their conditional probabilities; i.e. $\mu \in \mathcal{G}$ if $\mu(F\times G) = \int_G \sigma_\Lambda(y,F)\, dp_{S-\Lambda}(\mu)(y)$ for all $\Lambda \in \mathcal{C}$, $F \in \mathcal{F}_0(\Lambda)$, $G \in \mathcal{F}_0(S-\Lambda)$; where $p_{S-\Lambda}(\mu)$ is the projection of μ onto $X(S-\Lambda)$. The two main problems are (1) Existence – when is $\mathcal{G}$ non-empty?, and (2) Uniqueness – when do we have $|\mathcal{G}| = 1$?

The existence problem is by far the easier, and except in somewhat pathological circumstances we have $\mathcal{G}$ is non-empty provided the $\{\sigma_\Lambda\}$ satisfy an appropriate consistency condition. This condition is: for all $\Lambda \subset \Lambda' \in \mathcal{C}$, $y \in X(S-\Lambda')$, $F \in \mathcal{F}_0(\Lambda'-\Lambda)$, $G \in \mathcal{F}_0(\Lambda)$, we must have

$$\sigma_{\Lambda'}(y, F\times G) = \int_F \sigma_\Lambda(y\times w, G)\, d\, p_{\Lambda'-\Lambda}(\sigma_{\Lambda'}(y,\cdot))(w).$$

This condition has a fairly obvious interpretation in terms of iterating conditional probabilities.

The uniqueness problem is much harder, and not much is known about it yet. The only general result is due to Dobrushin (Theory of Prob. and its Applications, 13, 197-224, 1968) and is as follows: for $s,t \in S$ with $s \neq t$ let

$$\rho_{t,s} = \tfrac{1}{2} \sup\{\|\sigma_{\{t\}}(y,\cdot) - \sigma_{\{t\}}(z,\cdot)\| : y,z \in X(S-\{t\}) \text{ with } y_u = z_u \text{ for all } u \neq s\};$$

(where $\|\nu\|$ denotes the total variation of the signed measure ν). Suppose there exists $\beta < 1$ such that $\sum_{s\in S-\{t\}} \rho_{t,s} \le \beta$ for all $t \in S$. Then $|\mathcal{G}| \le 1$.

Chris Preston (King's College, Cambridge)

5th October 1976.

FINITE GROUPS CONTAINING NO ELEMENTS OF ORDER 6.

A theorem which, in conjunction with profound results of other authors, classifies finite groups having no elements of order 6 has been proved by Dr B. Stellmacher of Universität Bielefeld and independently by joint work of Dr W. B. Stewart of the University of Oxford and the speaker. The methods used in the two proofs are quite different and have been applied by their proposers to the question of a finite group G in which an appropriately maximal 2-local subgroup N has order divisible by 6 but no elements of order 6.

The most difficult case which must be discussed in this latter problem occurs when $N/O_{3'}(N)$ is dihedral of order twice a power of 3 and $Q = O_2(N)$ is not the direct product of two cyclic groups. In this seminar the speaker described how his methods could be used to show that either G has a normal subgroup of index 2 or $C(Z(Q))$ has order divisible by 3. The speaker also described how this latter possibility might be handled using his methods but observed that Dr Stellmacher's approach appeared to be more powerful and simpler.

L. R. Fletcher
UNIVERSITY OF SALFORD
ENGLAND.

18. Oktober 1976

FÄRBUNGEN UNENDLICHER GRAPHEN

Die chromatische Zahl eines endlichen Graphen kann man im Prinzip durch Ausprobieren aller möglichen Färbungen bestimmen. Nach einem Satz von Erdös und de Bruijn ist die chromatische Zahl eines unendlichen Graphen bestimmt durch das Maximum der chromatischen Zahlen aller seiner endlichen Unter-graphen. Dies ist aber kein praktisch verwertbares Kriterium um eine Färbung eines unendlichen Graphen wirklich zu bestimmen. Daher werden nun Kriterien gesucht die es sichern daß eine Färbung für einen vorgegebenen Graphen wirklich angegeben werden kann. Wir diskutieren die Situation bei abzählbaren Graphen deren Struktur berechenbar ist. $\chi_r(G)$ sei diejenige kleinste Zahl von Farben so daß es ein Verfahren gibt das G mit $\chi_r(G)$ Farben färbt. Wir beweisen für die betrachtete Klasse G von Graphen

1. $\exists G : \chi_r(G) > \chi(G)$ für jede chromatische Zahl $\chi(G)$
2. $\chi_r(G) \leq 2\chi(G)$
3. $\exists G : \chi(G) = 3$ & G planar & G ~~zsh~~ 2-fach zsh & $\chi_r(G) > 3$
4. Es gibt ein Verfahren welches alle planaren zsh G mit 5 Farben färbt.
5. G habe das Geschlecht p, $\chi(p)$ sei die chromatische Zahl der Klasse der Graphen vom Geschlecht p. Dann gilt $\chi_r(G) \leq \chi(p) + 5$.

Vermutung: Bei 5. gilt $\chi_r(G) = \chi(p)$ für $p > 0$.

Hans Georg Carstens
Hannover

25.10.76

Kombinatorische Eigenschaften von Komplexen und Familien konvexer Mengen im R^d

Ist F eine Familie konvexer Mengen im R^d, so beschreibt N(F), der Nerv von F, das Durchschnittsverhalten der Mitglieder von F. Zwei zentrale Probleme der kombinatorischen Geometrie werden diskutiert:
Problem 1: Wie lassen sich die abstrakten simplizialen Komplexe charakterisieren, die als Nerv einer Familie F im R^d auftreten?
Problem 2: Wie lassen sich die zugehörigen f-Vektoren charakterisieren, die die Komplexseiten verschiedener Dimension abzählen?
Zur Lösung des zweiten Problems wird eine Vermutung formuliert, die sog. k-Vermutung, die in einer Reihe von Spezialfällen bewiesen ist.

Jürgen Eckhoff, Dortmund

8.11.76

Hermite'sche Formen über Ordnungen

Wir betrachten die Wittgruppe $W_0(A)$ einer Ordnung A über einem Dedekindring R in einer halbeinfachen separablen Algebra B über dem Quotientenkörper F von R. Genauer wird der Kern der Abbildung $W_0(A) \to W_0(B)$ bestimmt.
Drei Beispiele werden betrachtet.

1) A ist Unterring eines algebraischen Zahlkörpers $F' = \mathrm{Quot}(A)$. $W_0(A)$ die Wittgruppe symm. Bilinearformen auf A

2) A ist der Koordinatenring einer irreduziblen reellen affinen Kurve γ mit Funktionenkörper F. $W_0(A)$ wieder die Wittgruppe symm. Bilinearformen auf A

3) $A = \mathbb{Z}G$ der Gruppenring einer endlichen Gruppe G. Als Involution wird die von $g \to g^{-1}$, $g \in G$ induzierte genommen. $W_0(A)$ ist die Wittgruppe hermitescher Formen auf A, die auch als L-Gruppe offener, orientierbarer Mannigfaltigkeiten auftritt.

In allen drei Fällen wird der Kern durch spezielle Eigenschaften – Primideale, Singularitäten bzw. Darstellungen – gekennzeichnet.

Manfred Kolster, Münster

15.11.1976

Examples and Applications of Continuous Lattices

If X is a partially ordered set, we define $x \ll y$ for $x, y \in X$ by $x \ll y \Leftrightarrow$ ($\forall D \subseteq X$ up-directed) $y \leq \sup D \Rightarrow (\exists d \in D)\ x \leq d$. A complete lattice L is continuous if $x = \sup\{y \in L : y \ll x\}$ $\forall x \in L$. Any finite lattice is continuous, and also, any product of continuous lattices is continuous. Thus, 2^X is continuous for any set X, where $2 = \{0,1\}$. Dana Scott first investigated continuous lattices in a search for a model of the λ-calculus of Church and Curry. As further examples, we list:

1.) For any Hausdorff topological space X, $\mathcal{O}(X)$, the lattice of open subsets of X, is a continuous lattice iff X is locally compact.

2.) Any algebraic lattice is a continuous lattice.

3.) I^n is a continuous lattice, for any set n, where $I = [0,1]$ is the unit interval in the natural order.

A compact semilattice S is Lawson iff each point has a neighborhood bases of compact subsemilattices. Due to work of Karl Hofmann and Al Stralka, it is now well-known that a compact Lawson semilattice is a continuous lattice, and each continuous lattice has a unique topology relative to which it is a compact Lawson semilattice.

In a recent preprint, "A Lemma on primes appearing in algebra and analysis", Gierz and K. Keimel give a wide-ranging series of applications of continuous lattices to other branches of Mathematics, including lattice-theoretic versions of the following:

I.) If we view $C(X)$ as ~~a~~ the continuous sections ~~over~~ of the trivial bundle $\mathbb{R}\times X \to X$, X a compact Hausdorff space, then they prove a ~~generalization of~~ the well-known result of Gelfand an Kolmogoroff that the only prime ideals of $C(X)$ are of the form $\{f \in C(X) : f(x) = 0\}$, where $x \in X$.

Dually they establish the well-known result of Arens and Kelley that the extreme points in the closed unit ball of $C(X)'$ are exactly the point evaluations, up to a factor of ± 1.

II.) The Jónsson Lemma of universal algebra is shown to be derivable from their theory.

In a recent paper, J.D. Lawson, J.R. Liukkonen and the speaker have shown the following:

Theorem: Let S be a locally compact semilattice of finite breadth, and $M(S)$ the Banach algebra of all finite regular Borel measures on S. Then Δ, the maximal ideal space of $M(S)$, is algebraically and topologically isomorphic to the space $\mathrm{Hom}(S_d, 2)$ of all algebraic homomorphisms of S into the two-point semilattice. It then follows that Δ is a compact 0-dimensional semilattice, which is therefore a continuous lattice.

Michael Mislove, z. Zt. Tübingen

22.11.76

Algebraische Korrespondenzen.

Seien X und Y irreduzible glatte projektive Kurven über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k. Dann läßt sich jeder algebraischen Korrespondenz zwischen X und Y, d.h. jedem Divisor D auf $X \times Y$ eine lineare Abbildung $l_D : H^0(X, \omega_X) \to H^0(Y, \omega_Y)$ zuordnen, und man hat folgenden Satz von Deuring: Ist $D \sim X \times \mathfrak{a}' + \mathfrak{a} \times Y$ mit $\mathfrak{a}' \in \mathrm{Div}(Y)$ und $\mathfrak{a} \in \mathrm{Div}(X)$, so ist $l_D = 0$. Bemerkung: Im Fall $k = \mathbb{C}$ ist dieser Satz mit dem Abelschen Theorem äq. Mittels Grothendiecks allgemeiner Dualitätstheorie kann man Deurings Satz auf Kurven mit Singularitäten verallgemeinern. Diese Verallgemeinerung liefert Folgerungen über die Wirkung von Korrespondenzen auf Differentialen mit Polen, speziell über die Wirkung von Heckeoperatoren auf den Γ-automorphen Formen vom Gewicht 2 zu einer Fuchsschen Gruppe Γ erster Art.

Günter Tamme, Regensburg.

30.11.76 Quadratic forms in algebra and topology.

The cobordism of n-dimensional manifolds motivates the definition of algebraic cobordism groups $L^n(A)$ of chain complexes of f.g. free A-modules

$$C : C_n \xrightarrow{d} C_{n-1} \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} C_0$$

together with an abstract Poincaré duality

$$H_*(C) \cong H^{n-*}(C)$$

enjoying certain symmetry properties, for any ring with involution A. The higher L-groups $L^n(A)$ $(n \geq 1)$ are to the symmetric Witt group $L^0(A)$ as the higher K-groups $K_n(A)$ $(n \geq 1)$ are to the projective class group $K_0(A)$. The Poincaré duality of the chain complex of the universal cover of an n-dimensional manifold X^n defines a cobordism invariant

$$\sigma^*(X) \in L^n(\mathbb{Z}[\pi_1(X)])$$

which is an equivariant generalization of the signature. All this was first obtained by Miščenko. It is possible to analogously define algebraic cobordism groups $L_n(A)$ of n-dimensional f.g. free A-module chain complexes with a quadratic Poincaré duality, such that a degree 1 normal map $(f: M^n \longrightarrow X^n, b: \nu_M \longrightarrow \nu_X)$ gives rise to a normal bordism invariant

$$\sigma_*(f,b) \in L_n(\mathbb{Z}[\pi_1(X)]).$$

It turns out that $L_n(\mathbb{Z}[\pi_1(X)]) = L_n(\pi_1(X))$ is the Wall surgery obstruction group, and that $\sigma_*(f,b)$ is the surgery obstruction.

Andrew Ranicki
Cambridge, England

1.12.76 „Neuere Ergebnisse der Kombinatorik"

1. Szemerédi 1973: Jede Menge positiver oberer Dichte enthält arithmetische Progressionen beliebiger Länge.
Furstenberg's neuer Beweis (1976) dafür beruht auf dem neuen Satz: Ist $(\Omega, \mathcal{B}, m, T)$ ein dynamisches System mit $m(\Omega)=1$, so gilt $F \in \mathcal{B},\ m(F)>0 \Longrightarrow \sup_n m(F \cap T^{-n}F \cap T^{-2n}F \cap \dots \cap T^{-(k-1)n}F) > 0$.
2. Orthogonale lateinische Quadrate: Resultate von Bose-Shrikhande-Parker und R. Wilson.
3. R. Wilson's Existenzsatz für Blockpläne.
4. Socio-Kombinatorik: Heiratssatz, Satz über unzuverlässige Koalitionen, friendship theorem, Arrow's Satz vom Diktator.

Konrad Jacobs
(Erlangen)

12.76 Kleine p-Gruppen mit kleinen abelschen Untergruppen.

Eine abelsche Untergruppe U sei „klein" in G, wenn gilt $UZ(G)/Z(G)$ ist zyklisch. Für p-Gruppen G der Nilpotenzklasse 2 mit $G^p \subset G'$ kann man aus der Tatsache, daß alle abelschen Untergruppen klein sind, folgern $Rg(G/Z(G)) \leq Rg(G')$, und diese Ungleichung ist exakt, Gleichheit wird erreicht für jeden Rang größer als 2. Die Betrachtung derjenigen Gruppen G, für die gilt

$G' = G^p = Z(G)$, alle abelschen Untergruppen klein

ergibt für $Rg\, G/G' = 5$ $\frac{1}{5}(p^5 - p)$ paarweise nichtisomorphe Gruppen, die nur zentrale Automorphismen besitzen und alle isoklinisch im Sinne von P. Hall sind. Man kann dies als Zeichen dafür werten, daß eine Klassifizierung aller Gruppen der Ordnung p^{10} nahezu unmöglich ist. Wesentliches Hilfsmittel bei der Konstruktion ist die Benutzung eines additiven Isomorphismus auf $GF(p^5)$ und die Beschreibung des Kommutators durch die Form $x^p y - y^p x$. Zugleich hat man ein ganzes Feld von p-Gruppen, die p-Automorphismengruppen haben. Es gibt also auch hiervon wohl mehr Gruppen als bisher angenommen.

T. Meixner (Würzburg)

13/12/76 Singularities, Differential Geometry & Invariant Theory.

The theory of singularities seeks to obtain normal forms up to smooth coordinate changes or, failing that, homeomorphisms for a residual set of smooth mappings. This set is defined by imposing certain transversality conditions on the (multi)jet extension of the map: the proofs of stability lie much deeper. One may consider also families of mappings, or sections of bundles.

In differential geometry, certain families of mappings occur naturally, and it is of interest to apply the theory to them. The best-known example concerns distance functions from a (varying) point of Euclidean space to points on an embedded manifold. Critical points of various types yield the normal bundle, focal set and umbilics, and (Looijenga) singularity theory is fully applicable.

The situation is somewhat less clear for the direct study of the second fundamental form: nor even ~~what~~ how to stratify the space of such forms. The invariant theory of symmetric bilinear maps $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ (for m or k small) yields some ideas. Even more difficult is the study of the curvature tensor of a Riemannian manifold M^m, though a reasonably satisfactory analysis can be given for $m \leq 4$.

C. T. C. Wall (Liverpool)

20.12.76 "Computational methods in the study of finite groups"

Computers are finding applications in some branches of group theory. Techniques exist for studying groups given by defining relations, permutation groups of large degree and some other types of group.

In this talk I describe the basic techniques for studying groups given by defining relations and permutation groups. The most recent technique developed - an algorithm for computing low index subgroups in a finitely presented group has been applied successfully to problems ranging from topology to math. crystallography.

Computational techniques for studying permutation groups are based on two ideas: the Schreier stabilizer technique and the Sims backtrack algorithm. Recently the combination of Todd-Coxeter and Schreier techniques has resulted in a very fast algorithm for verifying strong generation in large degree permutation groups. Butler has recently developed analogues for matrix groups.

The current state of these techniques is discussed in the context of constructing defining relations for the simple group of Held and giving an independent proof of its existence.

John J. Cannon (ETH Zürich, & Sydney).

10.1.77 „Das Verhalten der Picard-Gruppe bei gewissen Ringerweiterungen.“

Sei k ein algebr. ~~agb~~ abgeschlossener Körper, A, A' endl. erzeugte normale k-Algebren. Dann gibt es exakte Folgen

$0 \to \operatorname{Pic} A \to \operatorname{Pic}(A \otimes A') \to \operatorname{Pic}(Q(A) \otimes A')$,

$0 \to \operatorname{Pic} A \oplus \operatorname{Pic} A' \to \operatorname{Pic}(A \otimes A') \to \operatorname{Pic}(Q(A) \otimes Q(A'))$

Fragen: 1. $\operatorname{Pic}(Q(A) \otimes Q(A')) = ?$, 2. ist Abschwächung von der Voraussetzung A normal möglich?

Zu 1. $\operatorname{Pic}(Q(A) \otimes Q(A'))$ endl. erz., aber meist $\neq 0$, etwa wenn $Q(A) = Q(A')$ Funktionenkörper einer nichtrationalen Kurve ist. Aber $= 0$, wenn $Q(A')$ rational oder auch nur unirational ist. (Bsp. eines Hauptidealringes A mit $SK_1(A) \neq 0$.)

Zu 2. Folge bleibt exakt, wenn A seminormal, $A^* = k^*$ ist.

Beschreibung, wann $\operatorname{Pic} A \to \operatorname{Pic} A[t, t^{-1}]$, $\operatorname{Pic} A \to \operatorname{Pic} A[t][t^{-1}]$ isomorph sind.

Friedrich Ischebeck.
(Münster)