proof of its existence.

John J. Cannon (ETH Zürich, + Sydney).

10.1.77 „Das Verhalten der Picard-Gruppe bei gewissen Ringerweiterungen."

Sei k ein algebr. ~~agb~~ abgeschlossener Körper, A, A' endl. erzeugte normale k-Algebren. Dann gibt es exakte Folgen
$0 \to \mathrm{Pic}\, A \to \mathrm{Pic}(A \otimes A') \to \mathrm{Pic}(Q(A) \otimes A')$,
$0 \to \mathrm{Pic}\, A \oplus \mathrm{Pic}\, A' \to \mathrm{Pic}(A \otimes A') \to \mathrm{Pic}(Q(A) \otimes Q(A'))$
Fragen: 1. $\mathrm{Pic}(Q(A) \otimes Q(A')) = ?$, 2. Ist Abschwächung von der Voraussetzung A normal möglich?
Zu 1. $\mathrm{Pic}(Q(A) \otimes Q(A'))$ endl. erz., aber meist $\neq 0$, etwa wenn $Q(A) = Q(A')$ Funktionenkörper einer nichtrationalen Kurve ist. Aber $= 0$, wenn $Q(A')$ rational oder auch nur unirational ist. (Bsp. eines Hauptidealringes A mit $SK_1(A) \neq 0$.)
Zu 2. Folge bleibt exakt, wenn A seminormal, $A^* = k^*$ ist.
Beschreibung, wann $\mathrm{Pic}\, A \to \mathrm{Pic}\, A[t, t^{-1}]$, $\mathrm{Pic}\, A \to \mathrm{Pic}\, A[t][t^{-1}]$ isomorph sind.

Friedrich Ischebeck.
(Münster)

17. 1. 1977 "Primitive Ideale in Gruppenalgebren endl. erzeugter fastnilpotenter Gruppen"

Ein (zweis.) Ideal I des Ringes R heißt (rechts-) primitiv, wenn $I = \mathrm{Ann}_R(V)$ für einen irreduziblen R-Rechtsmodul V ist. Der Vortrag versucht eine Charakterisierung der primitiven Ideale in Gruppenalgebren überauflösbarer Gruppen (d.h. Gruppen mit einer Reihe $\langle 1 \rangle = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_n = G$, $G_i \triangleleft G$, G_i/G_{i-1} zyklisch) und diskutiert Erweiterungen auf die allgemeinere Klasse der fastnilpotenten endl. erzeugten Gruppen (i.e. Gruppen mit einem nilpotenten Normalteiler von endl. Index).

$\boxed{\text{Satz}}$ G überaufl., k vollkommen, I ein Primideal in $k[G]$. Dann sind äquivalent: (i) I primitiv (ii) $Z(k[G]/I)$ ist eine endl. Körpererweiterung von k (iii) I maximal (iv) I ist lokal-abgeschl. in $\operatorname{Spec} k[G]$: $\bigcap_{\substack{P \in \operatorname{Spec} k[G] \\ P \supsetneq I}} P \neq I$

Für vollprime primitive Ideale (solche mit nullteilerfreier Faktoralgebra) kann der folgende Satz bewiesen werden

$\boxed{\text{Satz}}$ G überaufl., k algebr. abgeschl., $\exists\, I$ vollprimes primitives Ideal mit $G \to U(k[G]/I)$ injektiv $\Rightarrow$ ① $\Delta(G) := \{g \in G : [G : C_G g] < \infty\} = Z(G)$ ② $G/Z(G)$ torsionsfrei ③ $\exists\, f : Z(G) \hookrightarrow k^*$. Es ex. eine eineindeutige Korrespondenz

$$\mathcal{F} : Z^*_{inj} = \{ f \in \operatorname{Hom}(Z, k^*),\ f \text{ mono} \} \longrightarrow \operatorname{Priv}_{\triangleleft} k[G] = \operatorname{Privc}_{\triangleleft} k[G]$$
$$f \longmapsto (\operatorname{Ke} k[f])\, k[G]$$

($\operatorname{Privc}_{\triangleleft} k[G]$ = Menge der vollprimen primit. Ideale P mit $G \to U(k[G]/P)$ mono; $k[f] : k[Z] \to k$ erweitert f)

Zu jedem Ideal $\mathcal{F}(f)$ wird eine irred. monomiale Darstellung V von $k[G]$ angegeben mit $\mathrm{Ann}_{k[G]}(V) = \mathcal{F}(f)$

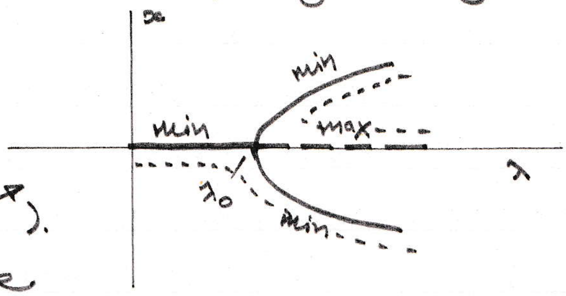
Martin Lorenz
(Gießen)

24.1.77 Catastrophe theory & applications in engineering.

In problems in e.g. structural engineering it is important to analyze the structure of the set of critical points of a smooth function $f_c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ as c (parameter) varies in $\mathbb{R}^r$. Example: buckling beam:-

f_λ = energy for given λ.

Plotting equilibrium value of x (= crit. pt. of f_λ) against λ gives a well-known picture:



This is not structurally stable, in that ε asymmetry in the model changes the picture (dots). Catastrophe theory gives a finite classification of local pictures for $r \leq 5$ (but any n) which are st. stable, via a list of local canonical forms for f_c:

$$x^3 + ax + Q \;, \quad x^4 + bx^2 + ax + Q \;, \quad \ldots \quad \text{(others in 1 or 2 vbles + } Q\text{)}$$

where Q = non-degenerate quadratic form in $(n-1)$ or $(n-2)$ variables. The behaviour of some of these, & their interrelations, are well-known to engineers, but the mathematics gives more information about st. stability, in particular in the context of coupled catastrophes (≡ 'simultaneous mode design') which may not be so well-known.

Since n can be arbitrarily large, one might expect the theory to hold for $n = \infty$, i.e. Hilbert space. The state of the beam is a function $u \in H$

$u = u(s)$  , with equilibrium = crit. pt. of energy $f_\lambda : H \to \mathbb{R}$:

catastrophe theory should yield the same pictures as above, but in function space.

To follow the formalism of the finite-dimensional theory it is necessary to study the action of $G = \mathcal{G}^k \times \mathbb{R}$ on J^k (J^k = k-jet space on H; $\mathcal{G}^k$ = group of k-jets of diffeomorphism germs at $0 \in H$) given by $f \mapsto f.\gamma + K$, $(\gamma, K) \in G$. Unfortunately the orbits may not be submanifolds (e.g. not closed) of J^k; however, if we henceforth restrict to families with $k \geq 7$, $D^2 f(x)$ Fredholm :-

<u>Lemma.</u> There is a finite union Σ of submanifolds of J^k of finite codimension ≥ 6 such that each orbit <u>either</u> lies in Σ <u>or</u> is a submanifold of codimension ≤ 5.

From this it seems straightforward to derive the desired local classification of generic r-parameter families ($r \leq 5$), with Q now a non-deg. quad. form on a complement to $\mathbb{R}^1$ or $\mathbb{R}^2$ in H.

Related refs: Gromoll + Meyer: Topology 1969   Magnus: Proc. Camb. Philos. Soc. 1977

Compare also: Chow, Hale + Mallet-Paret: Arch. Rat. Mech. Anal. 76.

D.R.J. Chillingworth
Southampton.

31.1.1977 "Ramsey Numbers"

Let $R(k)$ be the least integer so that if $n \geq R(k)$ and the edges of K_n are two colored then there exists necessarily a monochromatic K_k (Here K_k denotes the complete graph on k vertices). The existence of $R(k)$ is given by the classical result of RAMSEY which shows $R(k) \leq \binom{2k-2}{k-1} = (4+o(1))^k$.

ERDÖS (1946) showed that if $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$ then $n \leq R(k)$ - i.e. $\exists$ a two coloring of K_n without monochromatic K_k. He considered a random coloring of K_n - for each set S of k vertices the event A_S = "S is monochromatic" has probability $2^{1-\binom{k}{2}}$. Then $P(\vee A_S) \leq \sum P(A_S) = \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$ so it is possible that $\wedge \bar{A}_S$ holds. A calculation yields $R(k) \geq \frac{k}{e} 2^{(k-1)/2} (1+o(1))$. This was the seminal work on the "Probabilistic Method" in Combinatorics.

LOVÁSZ proved the following probability result. Let $A_1, \dots, A_m$ be events with $P(A_i) \leq p$. Assume for each A_i there are $\leq d$ other A's so that A_i is mutually independent of the remaining ($\geq m-d-1$) A's. If $4dp < 1$ then $P(\wedge \bar{A}_i) > 0$. (The "4" may be replaced by "$e+o(1)$" and it is open whether it can be further improved.)

With the events A_S above, each A_S is mutually independent of $\{A_T : |S \cap T| \leq 1\}$ so that: If $4\binom{k}{2}\binom{n}{k-2} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$ then $R(k) \geq n$. I.e. $R(k) \geq \frac{k}{e} 2^{(k+1)/2} (1+o(1))$

The true nature of $R(k)$ remains an open question.

Joel Spencer (Stony Brook)

Mehrfach scharf transitive Liesche Moufangloops.

Es sei G eine topologische Loop, M ein topologischer Raum und $f : G \times M \longrightarrow M$ eine stetige Abbildung, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) $f(1, m) = m = 1(m)$ für alle $m \in M$

(2) Ist β ein Element des Kerns von G, so gilt

$$(\beta\alpha)(x) = \beta[\alpha(x)] \qquad (\alpha\beta)(x) = \alpha[\beta(x)]$$

für $\alpha \in G$ und $x \in M$

(3) Es gibt einen Punkt a von M, so daß die (abgeschlossene) Menge G_a der a festlassenden Homöomorphismen aus G eine Unterloop ist und für jedes $\beta \in G_a$ die Beziehungen $(\alpha\beta)(a) = \alpha[\beta(a)] = \alpha(a)$ und $(\alpha\beta)G_a = \alpha G_a$ gelten, wobei α ein beliebiges Element aus G ist.

(4) Für den Punkt a des Axioms (3) ist $(\beta\alpha)(a) \neq \alpha(a)$, wenn $\beta[\alpha(a)] \neq \alpha(a)$ gilt und $\alpha \in G$ ist.

Wir sagen, daß die auf M operierende Loop G, die (1)–(4) erfüllt sich auf eine normale Unterloop N vererbt, wenn $(\alpha N)(x) = \alpha[N(x)] = (N\alpha)(x) = N[\alpha(x)]$ zutrifft.

Eine Loop G heißt eingeschränkt mehrfach scharf transitiv auf M, wenn der Stabilisator eines (3) und (4) erfüllenden Punktes a mindestens scharf zweifach transitiv auf M ist und G selber transitiv auf M wirkt.

Satz: Operiert auf einem nicht diskreten lokal kompakten Raum M eine eingeschränkt mehrfach scharf transitive Liesche Moufang-Loop L, so daß (1)–(4) erfüllt sind und L sich auf zusammenhängende normale Unterloops vererbt, so läßt sich auf M eine Addition und eine Multiplikation so einführen, daß M bezüglich dieser Operationen zur klassischen Divisionsalgebra $\mathcal{O}$ der Oktaven wird und L aus der scharf zweifach transitiven Loop der Abbildungen $\{x \longmapsto ax + b\ ;\ a \neq 0,\ b \in \mathcal{O}$ besteht; das Produkt $\beta\alpha$ der Elemente $\alpha : x \longmapsto ax + b$ und $\beta : x \longmapsto cx + d$ ist dabei gemäß der Regel $\beta\alpha : x \longmapsto (ca)x + cb + d$ zu bilden.

7.2.1977

Karl Strambach
(Erlangen)

14. 2. 77

Lokale Kohomologie und Spitzen.

Sei $S_n = \{ Z = (z_{ij}) = Z' = X + iY,\ Y > 0 \}$ die verallgemeinerte Siegelsche obere Halbebene des Grades n. Auf ihr operiert die symplektische Gruppe $\Gamma_n = Sp(n, \mathbb{Z})$ als eigentlich diskontinuierliche holom. Transformationsgruppe. Für die Theorie der automorphen Funktionen ist es wichtig den Quotientenraum $X_n = S_n / \Gamma_n$ zu untersuchen. $X_n = S_n / \Gamma_n$ ist ein normaler komplexer Raum mit höchstens ~~Quo~~ Quotientensingularitäten. X_n ist selbst nicht kompakt, kann aber auf natürliche Weise in einen kompakten normalen Raum $\hat{X}_n$, die Satakekompaktifizierung ~~eingebettet~~ werden als offener Unterraum eingebettet werden:

$$\hat{X}_n = X_n \dot\cup X_{n-1} \dot\cup \dots \dot\cup X_1 \dot\cup X_0$$

$$= X_n \dot\cup \hat{X}_{n-1} \qquad X_0 = \{\infty\}$$

$\hat{X}_{n-1}$ ist dann abgeschlossene analytische Teilmenge von $\hat{X}_n$, die Menge der Spitzen in $\hat{X}_n$.

Die Spitzen sind im allgemeinen hochgradig singulär in $\hat{X}_n$, nicht einmal Quotientensingularitäten.

Wichtige Invarianten für die singuläre Menge der Spitzen sind die Garben

$$\mathcal{H}^\nu_A(\hat{X}_n, \mathcal{O}_{\hat{X}_n})$$

von Kohomologiegruppen mit Trägern in einer ~~A~~ analytischen Teilmenge

A von $\hat{X}_{n-1}$ z.B. $A = \hat{X}_{n-1}$ oder $A = \{a\}$ $a \in \hat{X}_{n-1}$

Sie können in vielen Fällen mit Hilfe von Gruppenkohomologie bestimmt werden. So erhält man z.B. für den Halm $\mathcal{H}^{\nu}_{\hat{X}_{n-1}}(\hat{X}_n, \mathcal{O}_{\hat{X}_n})_a$ in einem Punkt $a \in X_{n-1}$

$$\mathcal{H}^{\nu}_{\hat{X}_{n-1}}(\hat{X}_n, \mathcal{O}_{\hat{X}_n})_a = \left(H^{\nu-1}(\mathbb{Z}^{n-1}, \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\hat{X}_{n-1},a}\right)^{\Gamma_{n-1,a}}$$

$$\Gamma_{n-1,a} = \{\gamma \in Sp(n-1, \mathbb{Z}),\ \gamma a = a\} \qquad 2 \le \nu < n$$

Für die Spitze ∞ = "S_0/Γ_0" ist folgendes Resultat zu vermuten:

$$\mathcal{H}^{\nu}_{\{\infty\}}(X, \mathcal{O}_{\hat{X}_n})_\infty = H^{\nu-1}(Gl_n(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}, \mathbb{C}) \quad 1 < \nu < \dim S_n$$

Damit kann die Tiefe von $\mathcal{O}_{\hat{X}_n,\infty}$ bestimmt werden. Entsprechendes für Untergruppen $\Gamma \subset \Gamma_n$ von endlichem Index.

Reinhardt Kiehl
Mathematisches Institut der Universität Mannheim

18.4.77

Transversalität und quadratische Formen auf Überlagerungsräumen:

Der Hintergrund dieses Themas ist ~~ist~~ eine Vermutung von Brumfiel und Morgan. Sei X^{2n} ein Poincaré-Raum der formalen Dimension $2n$. Sei weiter $\pi_1(X) = \mathbb{Z}_2$ und $\tilde{X}$ der universelle Überlagerungsraum von X. Unter diesen Voraussetzungen gilt folgendes kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_2 \arrow[r, "i_*"] & \{\tilde{X}^{2n}, K_n\} \arrow[r, "J_*"] \arrow[d, "\hat{\pi}^*"] & H^n(\tilde{X}^{2n}, \mathbb{Z}_2) \arrow[r] \arrow[l, bend right, "s_{\tilde{X}}"'] \arrow[d, "\tau"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_2 \arrow[r, "i_*"] & \{X^{2n}, K_n\} \arrow[r, "J_*"] & H^n(X, \mathbb{Z}_2) \arrow[r] \arrow[l, bend right, "s_X"'] & 0 \end{tikzcd}$$

Dabei ist $K_n = K(\mathbb{Z}_2, n)$ = Eilenb.-McLane Raum

J_* = „Dessuspensions-Abbildung"

τ = Kohomologie-Transfer-Homomorph.

$\hat{\pi} : S^k \wedge X \longrightarrow S^k \wedge \tilde{X}$

die zu einer Abbildung
$b : \nu_{\tilde{X}} \longrightarrow \nu_X$

S-duale Abbildung (im Sinne von Spanier Whitehead).

$\nu_{\tilde{X}}, \nu_X$ sind die Spivak-Normalen-Faserungen von $\tilde{X}$ bzw X.

$s_{\tilde{X}}, s_X$ sind die Suspensions-abbildungen.

Weiter gilt: $s_{\tilde{X}}$, s_X sind quadratische Funktionen, d.h

$$\cancel{s_*}\; s_X(x+y) = s_X(x) + s_X(y) + i_*(x \cdot y)$$

und $\quad q = \hat{\iota}^* \circ \bar{s}_{\tilde{X}} - \Delta_X \circ \tau$

bildet $H^n(\tilde{X}, \mathbb{Z}_2)$ in $\operatorname{Ker} j_*$ ab, genauer: q ist eine quadratische Form, die zu einer nicht-singulären Paarung gehört.

Die Arf-Invariante dieser Form soll nach der Vermutung das einzige Hindernis dafür sein, daß es einen unter der Decktransformation t von $\tilde{X}$ invarianten Poincaré-Raum W^{2n-1} der formalen Dimension $2n-1$ gibt, der X^{2n} in A und B zerlegt, wobei $tA = B$ und $tB = A$ ist.

Friedrich Hegenbarth,
Math.-Institut
Universität Dortmund

25.4.77 : The Lorenz Attractor.

The Lorenz attractor is a strange attractor which has been proposed as an explicit model for turbulence. First studied by E.N. Lorenz as a severe truncation of the Navier-Stokes equations, it has since attracted the attention of mathematicians because of its particularly interesting dynamical properties. In particular, it is peculiarly unstable vis a vis perturbations of the vector field and is not contained in the closure of the Ω-stable fields. These results were proven by J. Guckenheimer who first gave an abstract construction of a class of attractors, called _Lorenz attractors_, following the computer simulations of Lorenz, and by R. Williams whose gave an inverse limit construction of these attractors and disproved Thom's $\omega\Sigma$-conjecture (which states that $\exists$ a residual set $\mathcal{R}$ of vector fields and a countable list of attractors such that every attractor of a vector field in $\mathcal{R}$ is, up to homeomorphism type, contained in this list).

Following these ideas very closely I gave a unified construction for Lorenz attractors and indicated how one gives a complete topological classification of these attractors using kneading series. Kneading series were first studied by J. Milnor and W. Thurston to study certain continuous endomorphisms of an interval of the real line. Williams showed that a similar artifact could be used to provide an invariant for the topological type of Lorenz attractors and Guckenheimer and I have, separately, shown that this is a complete invariant. I also described the following result: Every Lorenz attractor is contained in a smoothly parameterised two-parameter family of attractors which contains a copy (up to homeomorphism and conjugacy) of every Lorenz attractor. This is interesting because it allows one to deduce that, although individual Lorenz attractors are not Ω-stable, in a certain sense, 2-parameter families are.

References

J. Guckenheimer "A Strange, Strange Attractor" in J. Marsden and M. McCraken "The Hopf Bifurcation" Springer Notes in Applied Maths., 1975

R.F. Williams "The Structure of Lorenz Attractors" Northwestern University Preprint 1976

D.A. Rand "Kneading for the Lorenz Attractor" Warwick University Preprint, 1977.

David Rand

(Warwick, England)

Wann ist eine Algebra perfekt?

Es wurde die Didaktik einer Staatsexamensarbeit besprochen an Hand des folgenden Satzes: Die endlich-dimensionale Algebra A über dem Körper K hat die Eigenschaft $A = A \circ A$ (ist perfekt) genau dann, wenn die kartesische Potenz $A^{\mathbb{N}}$ nur Ideale der Kodimension $< \aleph_0$ oder $\geq 2^{\aleph_0}$ besitzt.

2.5.77

O.H. Kegel (Freiburg)

9-5-77 **Markoff Geodesics**

The two concepts which are interrelated are Markoff forms and Poincaré Geodesics. The Markoff forms are a <u>discrete</u> set of binary indefinite quadratic forms $\phi(x,y)$ (unfactorable) such that $M(\phi) = \min |\phi| / \sqrt{\operatorname{disc} \phi} > 1/3$. If $\phi = (x - \xi y)(x - \xi' y) \times \text{const}$ then the (Poincaré) geodesic connecting $z = \xi$ and ξ' lies below $\operatorname{Im} z = 3/2$ under $SL_2(\mathbb{Z})$. If the z-plane is transformed into the ϑ plane under $\text{const}\, d\vartheta = dJ/(J-1)^{1/2} J^{2/3}$ or $1 - J(z) = \wp'^2(\vartheta) = 4\wp^3(\vartheta) + 1$ then the fundamental domain of the commutator group $\Gamma' = (\Gamma, \Gamma)$. $(\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z}))$ is laid out in a lattice covering of the ϑ-plane with the Markoff geodesics appearing "almost" as straight lines, approximated homotopically by step functions. If we define in a group $\langle A, B \rangle$ the step-word $(A, B)^{u,v} = \prod_{s=1}^{u} A B^{[s(v/u)] - [(s-1)v/u]}$ we find the Markoff forms become fixed points of the Markoff Matrices W given by $(V_1, V_2)^{u,v}$ where $V_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $z \to 1 + 1/1 + 1/z$

and $V_2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $z \to 2 + 1/2 + 1/z$. This result not only explains Markoff's recondite construction but also leads to an unexpected result in the theory of free groups. The Markoff matrices are precisely the primitive matrices of $\Gamma' = (\text{Free group on } V_1, V_2) = F_2$. The production of the pure period of W corresponds almost to the whole automorphism group of F_2, hence a necess & suff condition for $W \in \langle A, B \rangle$ $W = W(A, B)$ to be a primitive word is that $W(A_0, B_0) \sim (A, B)^{u,v}$ for some $\frac{1}{0} > u/v > \frac{2}{1}$ where (A_0, B_0) is one of 12 automorphisms close to (A, B). The full force of the absolute extremal property is not yet realized. For instance if $W(V_1, V_2)$ abelianizes to $uV_1 + vV_2$ $u \geq 0, v \geq 0$ then $|\operatorname{trace} W(V_1, V_2)| \geq \operatorname{trace} (V_1, V_2)^{u,v}$.

Ref. H. Cohn Math Ann 196 (1972)

Harvey Cohn

13.5.77

Diophantische Gleichungen.

I. Erstes allgemeines Resultat über diophantische Gleichungen ist der Satz von Runge, z.B.: Ist $f(x,y)$ ein Polynom, irreduzibel über $\mathbb{Q}$, so ist der höchste homogene Teil von $f(x,y)$ bis auf eine Konstante eine Potenz einer irreduziblen Form dann wenn $f(x,y)=0$ ∞ viele Lösungen in $\mathbb{Z}$ hat.
Als Anwendung von Ergebnissen diophantischer Approximationen folgen die Resultate von Thue, Siegel, Roth bezüglich $f(x,y)=g(x,y)$, wenn $f(x,y)$ eine Form des Grades n, $g(x,y)$ ein Polynom des höchstens Grades m ist, und zwar existiert nur endl. viele Lösungen, falls $m < n-\kappa$ ist, wobei κ der Exponent der entsprechenden Approximationssätze ist, also $\kappa = \frac{n}{2}+1$ (Thue), $\kappa = 2\sqrt{n}$ (Siegel), $\kappa = 2+\varepsilon$ (Roth) für $|\alpha - \frac{x}{y}| > c\,H^{-\kappa}$, $H = \max(|x|,|y|)$, α algebraisch vom Grade n.
Eine Verbesserung des Rothschen Exponenten ist nicht möglich. Trotzdem erhält Schinzel (1969), auch im Buch von Mordell, das gleiche Resultat schon für $m < n$ und zwar durch ziemlich einfache Kombination des obigen Satzes von Runge mit dem Satze von Siegel, wonach $f(x,y)=0$, $f(x,y)$ ein Polynom, nur endlich viele Lös. hat, falls das Geschlecht von $f(x,y)=0$ grösser oder gleich 1 ist. Beispiel: $x^n+y^n-1=f(x,y)$, ~~so~~ $n>2$.
Mordell vermutet, dass der Siegelsche Satz auch für rationale x,y gilt, unbewiesen.
Falls bewiesen folgte daraus die Endlichkeit der Lösungsanzahl der Fermatgleichung für $n>2$.
Der Satz von Siegel wird von S. Lang auf rationale Lösungen mit Nennern $z = \prod c_\varrho^{\zeta_\varrho}$ bei fester endlicher Basismenge c_ϱ, $\zeta_\varrho \geq 1$, $\zeta_\varrho \in \mathbb{N}$ erweitert. Daraus $x^n+y^n=z^n$ für solche z nur endl. viele Lösungen.

II. Satz von Mahler $X+Y+Z=0$ in $X=\prod a_\varrho^{\xi_\varrho}$, $Y=\prod b_\varrho^{\eta_\varrho}$, $Z=\prod c_\varrho^{\zeta_\varrho}$ nur endlich viele Lösungen mittels des Approximationssatzes $|\alpha - \frac{X}{Y}| > c\cdot H^{-2-\varepsilon}$ in solchen X, Y. Vermutung: gleicher Satz für $\sum_{\nu=1}^{n} X_\nu = 0$ in solchen X_ν nur endl. viele Lösungen.
Unabhängig davon auch später Satz von Gelfond: $a^\xi+b^\eta+c^\zeta=0$ unlösbar bis auf triviale und einzige nichttriviale Lösung. Behauptet den obigen Satz von Mahler ohne Beweis. Verschärfung dieses Satzes mittels der Sätze von Ridout, der p-ad. Übertragung des Rothschen Satzes mit dem Resultat: $f(x,y)$ eine Form n-ten Grades, $f(x,y)=z$, $x = x^* x^{**}$, $y = y^* y^{**}$, $z = z^* z^{**}$, x^{**}, y^{**}, z^{**} wie oben X, Y, Z, $0 \leq |x^*| \leq c|x|^\lambda$, $0 \leq |y^*| \leq c|y|^\mu$, $0 \leq |z^*| \leq c|z|^\nu$, so nur endlich viele Lösungen, falls $\frac{\lambda+\mu}{n}+\nu < 1$.
Speziell $\nu < 1-\frac{2}{n}$ falls $\lambda=\mu=1$. Speziell auch für $\nu=1$.

III. Sätze von W. Schmidt über Normformen: Nur endl. viele Lösungen von $N(M(\underline{x})) = P(\underline{y})$, P ein Polynom vom Grad m in $\underline{y}=(x_1,\ldots,x_l)$, falls $m < n-l$.
$l=2$: Satz von Roth. Dazu p-ad. Übertragung von Schlickewei: $N(M(\underline{x})) = \prod_{p_\sigma} p_\sigma^{\zeta_\sigma} P(\underline{x})$

~~unter~~ gleichen Bedingungen $n < m-l$. Für Fermatgleichung keine Anwendung, da die Fermatsche Form keine Normform ist. Ferner beweist Schneider die Mahlersche Vermutung und die Verschärfung mit der Bedingung $\sum_{\nu=1}^{l} \lambda_\nu < 1$, wobei $X_\nu = X_\nu' X_\nu''$, $0 \le |X_\nu'| \le c|X|^{\lambda_\nu}$.

Th. Schneider.

16.5.77 Quadratische Formen über Polynomringe.

Sei k ein Körper der Char. $\neq 2$ und $R = k[t_1, \dots, t_d]$.
Nach Quillen und Suslin sind alle (endl. erzeugte) projektive Moduln über R frei, d.h. der Form $M = M_0 \otimes_k R$ wobei M_0 ein Vektorraum über k ist.

Frage: Sind alle reguläre quadratische Formen (M, f), $M \cong R^n$ und $f: M \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R(M, R)$ symmetrisch – aus k "erweitert" d.h. isometrisch einer Form $(M_0, f_0) \otimes_k R$ wobei (M_0, f_0) eine quadr. Form über k ist.

Satz 1 (Harder) ja, falls $d = 1$, n beliebig
Satz 2 (Parimala) Ja " $n = 2$ d "
Satz 3 (Raghunathan) ja " $Br(k)$ keine 2-Torsion hat.
Satz 4 (Knus-Ojanguren) gibt es eine nicht-triviale Quaternionenalgebra über k so gibt es quadr. Formen vom Range 3 und 4 über $k[t_1, t_2]$ welche nicht erweitert sind.

Ist k der Körper der reellen Zahlen, so gibt es zu jedem $n \geq 1$ eine quadr. Form vom Range $3n$ über $\mathbb{R}[t_1, t_2]$ welche nicht erweitert ist.

M. Ojanguren

23. 5. 77 Modelltheorie der Moduln

Sei R ein assoziativer Ring mit 1. Die elementare Sprache L_R der R-Moduln hat die nichtlogischen Zeichen $+$, $-$, 0 und f_r $(r \in R)$; f_r bezeichnet die Multiplikation mit r von links. Ist M ein R-Modul und $X \subseteq M^n$, so heisst X definierbar, falls es eine L_R-Formel $\varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$ gibt, so dass für alle $\vec{a} \in M^n$ gilt: $\vec{a} \in X \iff \varphi(\vec{a})$ wahr in M.

Satz 1. Jede definierbare Relation $X \subseteq M^n$ lässt sich mit einer booleschen Kombination von Formeln der Gestalt

$$\exists z_0, \dots, z_{m-1} \left(\bigwedge_{\kappa < k} \sum_{\mu < m} r_{\kappa\mu} z_\mu = \sum_{\nu < n} s_{\kappa\nu} x_\nu \right)$$

definieren.

Satz 2. Es gibt (endliche) kommutative Ringe, so dass die Theorie der R-Moduln unentscheidbar ist (Beispiel: $R = \mathbb{Z}[X]/(X^2, 2^9)$).

Satz 3. Für abzählbare Moduln M sind äquivalent:

(i) M lässt sich innerhalb der Klasse der abzählbaren Moduln bis auf Isomorphie in der Sprache L_R charakterisieren,

(ii) $M \cong \bigoplus_{i=1}^{s} M_i^{(\kappa_i)}$, M_i endlich, $s \in \mathbb{N}$, $\kappa_i \leq \aleph_0$.

W. Baur (Zürich)

25. 5. 77 Diffusionsprozesse und Markoffsche stochastische Felder

Die Theorie der stochastischen Felder ist eine natürliche Erweiterung der Theorie der stochastischen Prozesse, wobei die Indexmenge ("Zeit"), die bei den stochastischen Prozessen (eine Untermenge von) $\mathbb{R}$ ist durch (eine Untermenge vom d-dimensionalen euklidischen Raum) $\mathbb{R}^d$ ersetzt wird. In den letzten Jahren sind interessante Beispiele von stochastischen Feldern konstruiert worden, welche homogen bezüglich der vollen euklidischen Gruppe sind.

Wie von R. Høegh-Krohn und dem Vortragenden gezeigt wurde, können solche stochastische Felder als Diffusionsprozesse angesehen werden, welche Werte in Distributionsräumen über R^{d-1} annehmen und die von regulären Dirichletformen erzeugt werden, welche ihrerseits von quasi invarianten Massen auf Distributionsräumen bestimmt sind. Die Strukturreiche Beziehungen die zwischen den gewöhnlichen endlich dimensionalen Markoff Diffusionsprozesse und elliptischen Differentialoperatoren und Potentialtheorie, vorliegen werden somit, mindestens teilweise, auf den Fall von stochastischen Feldern erweitert. Im Vortrag wurden auch die verschiedenen Aspekte der Markoff Eigenschaften der konstruierten stochastischen Felder diskutiert. Zudem wurde erwähnt wie die Beziehungen zwischen Dirichletformen, Markoff'sche Halbgruppen, Diffusionsprozesse und stochastischen Feldern eine mindestens partielle Erweiterung zu nicht kommutativen Fällen (C^*-Algebren, glatte Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten und Lie Gruppen) haben.

Sergio Albeverio (Oslo).

Groups and Hadamard Matrices

An Hadamard matrix $H_n = [h_{ij}]$, $i, j = 1, \dots, n$ is a matrix with every entry $h_{ij} = \pm 1$ such that if H_n^T is its transpose, then $H_n H_n^T = n I_n$. Permuting and changing signs of rows and columns gives another Hadamard matrix $P^{-1} H_n Q$ where P and Q are monomial ± 1 matrices defining the changes of rows and columns respectively. We say that H_n and $P^{-1} H_n Q$ are equivalent and if $P^{-1} H Q = H_n$ we call (P, Q) an automorphism of H_n. With the product rule $(P_1, Q_1)(P_2, Q_2) = (P_1 P_2, Q_1 Q_2)$ the automorphisms form a group which always has $(-I, -I)$ in its center. The matrices H_{12} of dimension 12 are all equivalent and modulo the center $\langle (-I, -I) \rangle$ the automorphism form the Mathieu group M_{12}. For an H_n to exist it is necessary that $n = 1, 2$ or $n = 4m$ and it is conjectured that an H_n exists for all these values. We may change signs of rows and columns to normalize H_{4m} to have its first row and column consisting entirely of $+1$'s. The remaining $+1$'s with rows as blocks and columns as points yield an Hadamard symmetric block design with parameters $v = 4m-1$, $k = 2m-1$, $\lambda = m-1$ and such a design always yields an Hadamard matrix. Many groups may be used to construct these designs. If $v = 4m-1 = q$ is a prime power then the non-zero squares in $GF(q)$ acted upon by the additive group of $GF(q)$ yield such a design. A curious case is that based on the cyclic group of order pq where p and $q = p+2$ are primes. The group also contains a further subgroup of order $(p-1)(q-1)/2$ and it acts on $4m-1$ sets of residues mod pq including the residues a mod pq such that $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a}{q}\right) = \pm 1$ and also the multiples of q. Rank 3 permutation

groups yield certain designs with $v = 4t^2$, $k = 2t^2 - t$, $\lambda = t^2 - t$ which lead directly to Hadamard matrices H_{4t^2} without any bordering of +1's. There is such a case for the representation of the simple group $U_4(2)$ of order 25920 on 36 points with $v = 36$, $k = 15$, $\lambda = 6$.
An extension of Automorphism is a semi-automorphism (P, Q) in which P is a monomial ± 1 matrix and Q an orthogonal rational matrix of bounded denominator. In this way there is an H_{24} with Q of denominator dividing 3 which yield the Mathieu group M_{24}, though no H_{24} has M_{24} in its group of automorphisms

Marshall Hall
California Institute of Techology and Merton College, Oxford

13.6.77 Fortsetzung linearer Funktionale

Andenaes hat 1970 eine Version des Satzes von Hahn-Banach bewiesen, die vor allem in der Choquetschen Theorie der Integraldarstellungen interessante Anwendungen besitzt: Ist auf einem Vektorraum E ein sublineares Funktional p und auf einem Unterraum von E ein p-majorisiertes lineares Funktional f gegeben, so gibt es für jede Teilmenge S von E unter allen p-majorisierten linearen Fortsetzungen von f auf E eine solche, die auf S minimal ist.

Ein Analogon dieses Satzes gilt für prägeordnete Halbgruppen, wenn man numerische (d.h. $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$-wertige) additive und subadditive Funktionale zuläßt. Der Beweis wird für den Fall eines Vektorraumes skizziert. Er benutzt nicht mehr den Satz von Hahn-Banach, sondern basiert auf der Existenz einer größten sublinearen Minorante für jede numerische Funktion und der bekannten Tatsache, daß (in einer geeigneten Ordnung) minimale sublineare Funktionale linear sind.

Er wird sodann gezeigt, daß bekannte Fortsetzungssätze (Mazur-Orlicz, Bauer-Namioka) ebenso einfache Korollare dieses Satzes sind wie eine von J. Lembcke und dem Vortragenden angegebene Kennzeichnung derjenigen numerischen sublinearen Funktionale, welche eine reelle lineare Minorante besitzen.

Als Anwendung auf die Choquetsche Theorie für Halbgruppen S nach unten halbstetiger numerischer Funktionen auf einem lokal-kompakten Raum (auf die der klassische Satz von Hahn-Banach-Andenaes nicht anwendbar ist) wird ein (im kompakten Fall von Boboc und Cornea bewiesenes) Resultat über die Existenz minimaler gefegter Maße, die von einem gegebenen Rand getragen werden, angegeben. Es wird gezeigt, wie man auf einfache Weise hieraus Resultate von H. Bauer und Mokobodzki-Sibony über die Existenz des Šilov-Randes bzgl. S und seine Übereinstimmung mit dem Abschluß des Choquet-Randes erhält.

Bernd Anger (Erlangen)

20.6.77 Diophantine Approximation of complex numbers

Let $\mathbb{Q}_D = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ be an imaginary quadratic number field of discriminant $D < 0$, and let $\mathbb{Z}_D$ be the maximal order of $\mathbb{Q}_D$. For a complex number $\xi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}_D$ the approximation constant $c_D(\xi)$ is defined by

$$c_D(\xi) = \limsup \left(|q||q\xi - p| \right)^{-1},$$

where the lim sup is taken over all $(p, q) \in \mathbb{Z}_D \times (\mathbb{Z}_D \setminus \{0\})$. The Hurwitz spectrum or approximation spectrum is given by $H_D = \{ c_D(\xi) \mid \xi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}_D \}$. The present knowledge of H_D is as follows, where for completeness we include the rational case $\mathbb{Q}$ with $\mathbb{Z}$ as integers, and the rational quaternions $\mathbb{K}$ with Hurwitzian integers $\mathbb{H} = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i + \mathbb{Z}j + \mathbb{Z}w$, $w = \frac{1}{2}(1 + i + j + k)$ as integers:

Case	Discrete part of spectrum	Smallest limit point
$\mathbb{Q}$	$\sqrt{9 - \frac{4}{x^2}}$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3x_1x_2x_3$ $(x = 1, 2, 5, 13, 29, \dots)$	3
$\mathbb{Q}(i)$	$\sqrt{4 - \frac{1}{x^2}} \cup \left\{ \sqrt{\frac{3}{5}\sqrt{41}} \right\}$, $2x^2 + y_1^2 + y_2^2 = 4xy_1y_2$ $(x = 1, 5, 29, 65, \dots)$	2
$\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$	$\sqrt[4]{13}$, 2, $\sqrt{\frac{32\sqrt{3}}{13}}$	$\sqrt{\frac{28 + 16\sqrt{3}}{13}} = 2.07\dots$
$\mathbb{Q}(i\sqrt{11})$	$\frac{1}{2}\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{\frac{1085}{509}}$, ...	$\sqrt{\frac{1588626 + 30690\sqrt{1085}}{1205821}}$
$\mathbb{Q}(i\sqrt{7})$	$\sqrt[4]{8}$, $\sqrt{3}$, ?	$\leqq 2$
$\mathbb{Q}(i\sqrt{2})$	$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ?	$\leqq 2$
$\mathbb{K}$	$\sqrt{\frac{5}{2}}$, ?	$\leqq 2$

A very complete account of the case $\mathbb{Q}(i)$, including the history of the subject, is given in Acta Math. 134 (1975), 1-85.

Asmus L. Schmidt (Univ. of Copenhagen).

27.6.77 Konjugierte Funktionen in der abstrakten Hardy-Algebra Theorie.

Die abstrakte Hardy-Algebra Situation ist der derzeitige Endpunkt einer Kette von sukzessiven Approximationen, deren Ausgangpunkt die klassische Theorie der Randwerte analytischer Funktionen im Einheitskreis und der Funktionenräume H^p ist. Es handelt sich auf einem Wahrscheinlichkeitsmaßraum (X,Σ,m) um eine schwach$*$ abgeschlossene komplexe Unteralgebra $H \subset L^\infty(m)$ mit $1 \in H$ mit der Eigenschaft, daß das Integral $\varphi: f \mapsto \int f dm$ auf H multiplikativ ist. Man definiert die Szegö-Situation dadurch daß $M := \{0 \leqq V \in L^1(m): \varphi(f) = \int f V dm \ \forall f \in H\}$ nur aus der Konstanten 1 besteht; äquivalent ist daß $\mathrm{Re}\, H$ schwach$*$ dicht in $\mathrm{Re}\, L^\infty(m)$ ist. Dies ist insbesondere in der klassischen Einheitskreissituation erfüllt.

Es wird dann die klassische Konjugation (:= Übergang zur konjugierten harmonischen Funktion) auf die abstrakte Hardy-Algebra Situation übertragen. Das Hauptziel sind ein paar Resultate, die die Stetigkeitsaussage von Marcel Riesz (1924) über die Konjugation in L^p $(1<p<\infty)$ und die quantitative Version von Pichorides (1972) verallgemeinern.

Satz 1: H enthalte nichtkonstante innere Funktionen (:= Fktn vom Betrage 1). Für jedes $1<p<\infty$ und $V \in M$ ist dann die Norm $R(p,V)$ der Konjugation im Raume $L^p(Vm)$ stets $\geqq A(p) := \max(\tan \frac{\pi}{2p}, \cotan \frac{\pi}{2p})$.

Satz 2: Sei $V \in MJ$ Jensenmaß (übliche Def). Dann $R(p,V) \leqq A(p)$ $\forall 1<p<\infty$.

Korollar: Sei $H \neq \mathbb{C}$ und Szegö. Dann $R(p,1) = A(p)$ $\forall 1<p<\infty$. Dies ist im klassischen Falle der Satz von Pichorides.

Alle Einzelheiten sind in dem neuen Lecture-Notes Band von K. Barbey und dem Verf. zu finden.

Heinz König (Saarbrücken).

On p-groups of maximal class

Let P be a group of order p^n; then P has class $\leq n-1$. If $n \geq 4$ we say that P is of <u>maximal class</u>. For example, let O be the ring of integers in the p^{th} cyclotomic number field, and θ be a complex p^{th} root of unity. If $\mathfrak{p} = (\theta - 1)$ let P be the split extension of $O/\mathfrak{p}^{n-1}$ by a p-cycle acting via multiplication by θ. Then P is of maximal class if $n \geq 4$.

The classification of p-groups of maximal class, modulo a small normal subgroup, has been completed by Susan MacKay and myself, using ideas some of which go back to the work of Blackburn. Valuable work in this area has also been done by Miech and R. Shepherd.

There is a ~~no~~ small chance of proving that groups of order p^n and class $n-r$ have solubility length bounded in terms of p and r alone. Work on such groups has been done with M.F. Newman, Judith Ascione, George Havas and others.

(4.7.77) C.R. Leedham-Green. (London)

Komplexität von Problemen

Ausgehend von Problemen wie – Ist 4777 eine Primzahl? –, – Sind die Seitenflächen des Ikosaeders so färbbar, daß aneinander stossende Flächen verschiedene Farben tragen? – werden die Klassen der in polynomial beschränkter Schrittzahl entscheidbaren Probleme sowie deren „Projektionen" eingeführt (P, NP). Es wird auf den universellen Charakter des Erfüllbarkeitsproblems der Aussagenlogik hingewiesen und gezeigt, wie anderseits dieses Problem auch in das 3-Färbbarkeitsproblem von Graphen kodiert werden kann; eine solche Kodierung ist meist in Fragen der Unabhängigkeit von Varianten des Auswahlaxioms von H. Läuchli angegeben worden. Das Verhältnis der Klassen P, NP (deren Verschiedenheit als Arbeitshypothese angenommen wird) wird erläutert an Hand der Menge A der Zahlen n, die darstellbar sind in der Form $x_1^2 + x_2^2$ mit teilerfremden x_1, x_2. Sowohl A als auch A^c gehört zu NP: Für den Nachweis von $n \in A$ genügt die Angabe von x_1, x_2 (woraus Summe und ggT schnell berechnet), für den Nachweis von $n \in A^c$ genügt der Beweis von $4/n$ oder die Angabe einer Zahl m mit $m \equiv 3 \mod 4$ und m/n. An Hand der historischen Bemühungen um das Auffinden grosser Primzahlen wird eine Verfeinerung der Klassifikation von Mengen vorgeschlagen, welche der P-NP Theorie zugrunde liegt. Man wird dann etwa zu folgender Klasse P^* geführt: A gehört zu P^*, gewenn A eine unendliche Teilmenge A' enthält, welche zu P gehört. Für die Menge der Primzahlen ist die Zugehörigkeit zu P^* offen. Als erstes Ergebnis kann angeführt werden: Es gibt keine unendliche Menge A' von Primzahlen, so dass genau die Elemente von A' von einem endlichen Automaten akzeptiert werden (Resultat von M. Fürer).

4.7.77 E. Specker, Zürich

11. Juli 1977

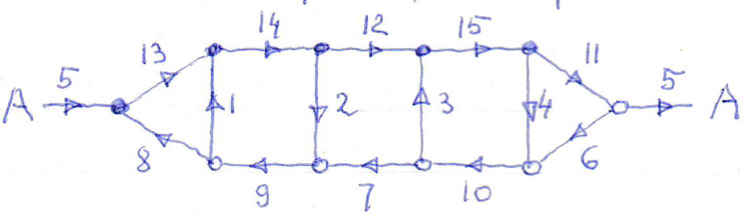
Minimale Dreieckszerlegungen orientierbarer Flächen.

Wir betrachten nur Dreieckszerlegungen der orientierbaren Fläche S_p, bei der je zwei Eckpunkte höchstens durch eine Kante verbunden sind. Eine Dreieckszerlegung von S_p heiße minimal, wenn die Anzahl der Dreiecke in ihr minimal ist. Für die Zahl der Dreiecke, $\delta(S_p)$, wird bewiesen (in einer minimalen Dreieckszerlegung v. S_p)

$$\delta(S_p) = 2\left\{\frac{7+\sqrt{1+48p}}{2}\right\} + 4(p-1) \quad \text{für } p \neq 2 \text{ und}$$

$$\delta(S_2) = 24 .$$

Der Beweis ist sehr umfangreich und umfasst leider viele Fallunterscheidungen. Es wurde zusammen mit meinem Schüler M. Jungerman vollendet. Es wird hauptsächlich eine Weiterentwicklung der Methode der current graphs benutzt. Als Beispiel, für $p=63$ wird der



abgebildete current graph benutzt.

Gerhard Ringel (Santa Cruz)

3. Oktober 1977 Beweis des Vierfarbensatzes

Der 1879er Beweis von Kempe kann repariert werden – allerdings nur mit einer sehr umständlichen Methode, die viele Millionen von Fallunterscheidungen nötig macht. Da alle anderen Beweisversuche gescheitert sind, könnte es sein, daß es keinen wesentlich kürzeren Beweis gibt. 1913 verallgemeinerte G. D. Birkhoff Kempe's Methode zur Bestimmung von ~~R~~ reduziblen Figuren (Figuren, die in einem hypothetischen minimalen Gegenbeispiel zum Vierfarbensatz nicht vorkommen können). Er erwähnte schon die Möglichkeit, daß man vielleicht eine so große Menge von reduziblen Figuren herstellen könnte, daß man beweisen kann, daß jede Landkarte mindestens eine dieser Figuren enthalten muß. Um 1950 begründete Heesch die Vermutung, daß eine derartige „unvermeidbare" Figurenmenge von etwa 10 000 Figuren geben sollte. Die Methoden zur Konstruktion von unvermeidbaren Figurenmengen ließen sich nun so weit verbessern, daß eine Menge von 1482 reduziblen Figuren als unvermeidbar nachgewiesen werden konnte. Die Reduktionsrechnungen benötigten 1200 Stunden Rechenzeit auf drei verschiedenen Rechenmaschinen des Universitätssystems von Illinois. ■

Wolfgang Haken (Urbana, Ill.)

19.10.77

Kegeliterationen für Integralgleichungen und Eigenwertaufgaben

Unter Benutzung einer Modifikation des Fixpunktsatzes von Krasnoselskii für expandierende Operatoren, wird ein neuer Existenzsatz für superlineare Hammersteinsche Integralgleichungen bewiesen. Die spezielle Gestalt der dabei benutzten Kegel liefert gleichzeitig eine punktweise Einschließung für die positive Lösung. Diese Einschließung läßt sich unter Benutzung der Kegeliteration verbessern. Die Idee des Verfahrens besteht darin, unter Ausnutzung der bereits bekannten Einschließung und unter Einbeziehung des nichtlinearen Anteils den Kegel, der durch den Integraloperator in sich abgebildet wird, iterativ zu verkleinern und in diesem kleineren Kegel mit dem Satz von Krasnoselskii bessere Schranken zu erhalten. Das Verfahren läßt sich auf Eigenwertprobleme für Matrizen übertragen. Man erhält Einschließungen für den Spektralradius und den zugehörigen Eigenvektor.

Heinrich Voß (Hamburg)

17. Oktober 1977

Probleme des Kantenzusammenhangs in Graphen.

Bezeichne $\lambda(x, y; G)$ die Maximalzahl kantendisjunkter Wege zwischen den Ecken x und y im Multigraphen G. Sei z eine Ecke von G und seien h und k mit z inzidente Kanten. Dann bezeichne G^{hk} den Multigraphen, welcher aus $G - \{h, k\}$ durch Hinzufügen einer neuen Kante zwischen den von z verschiedenen Endecken von h und k entsteht. Es wird die folgende Vermutung von L. Lovász bewiesen: Sei z eine nicht trennende Ecke vom Grad ≥ 4 im endlichen Multigraphen G. Dann existieren mit z inzidente Kanten h und k, so daß für alle $x \neq y$ aus $G - z$ gilt $\lambda(x, y; G^{hk}) = \lambda(x, y; G)$. — Als Folgerungen aus diesem Ergebnis werden eine sukzessive Konstruktion aller n-fach kantenzusammenhängenden endlichen Multigraphen angegeben und ein Satz von Nash-Williams über zulässige Orientierungen hergeleitet.

W. Mader (Berlin)

24. October 1977

Parallel Prefix Circuits and Some New Logical Networks for Binary Addition

Let $\circ$ be an associative operation on a domain D. The <u>prefix problem</u> is to compute, for given $x_1, \ldots, x_n \in D$, each of the products $x_1 \circ \ldots \circ x_k$, $1 \leq k \leq n$.

<u>Theorem</u>. For $0 \leq k \leq \log_2 n$ and n a power of two there is a product circuit to solve the prefix problem which has depth $\lceil \log_2 n \rceil + k$ and size $2(1+\frac{1}{2^k})n - F(2+\log_2 n - k) - 2F(3+\log_2 n - k) + 1 - k$. Here, $F(m)$ denotes the m^{th} Fibonacci number. For n not a power of two, we can guarantee the same depth and the size is $< 2(1+\frac{1}{2^k})n - 2$. An application of this result gives a general method for the simulation of sequential machines by Boolean circuits having simultaneously depth $O(\log n)$ and size $O(n)$. This method in turn yields a new family of small, fast circuits for binary addition.

Michael J. Fischer
(Joint work with Richard Ladner)
University of Washington (Seattle)

31.10.1977

Zur Topologisierbarkeit von Gruppen

Sei $(G, \cdot, {}^{-1}, e)$ eine Gruppe und sei $G[x] := \{ \prod_{i \in n} a_i x^{\varepsilon_i} \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in G$ und $\varepsilon_i \in \{-1, 1\} \}$. G heißt gebunden, wenn es ein $S \subset\subset G[x]$ gibt mit: 1. $f(e) \neq e$ für alle $f \in S$. 2. Für jedes $a \in G$, $a \neq e$ gibt es ein $f \in S$ mit $f(a) = e$. Sonst heißt G ungebunden. Satz: Sei G eine abzählbare Gruppe, dann sind folgende Eigenschaft äquivalent: 1. G besitzt eine nicht diskrete Hausdorff-Topologie, 2. G ist ungebunden, 3. G besitzt $2^{2^{\aleph_0}}$-viele nicht diskrete Hausdorff-Topologien.

Satz (Hesse 1976). Jede FC-nilpotente und jede lokal-auflösbare Gruppe ist ungebunden.

Klaus-Peter Podewski
TU-Hannover

7. 11. 77

Kohomologie diskreter Gruppen

Sei Γ eine diskrete arithmetisch definierte Gruppe. Dann operiert Γ im Zahlkörperfall auf einen symmetrischen Raum X, und die Kohomologie $H^i(\Gamma, \mathbb{C})$ kann auch als Kohomologie des Quotienten $H^i(\Gamma \backslash X, \mathbb{C})$ berechnet werden. Auf diese Weise kann man einen Zusammenhang zwischen der Kohomologie von Γ und Räumen automorpher Formen herstellen.

Ist man im Funktionenkörperfall, so muß man X durch das sogenannte Bruhat-Tits Gebäude ersetzen, das hier auch X genannt sei. Dann hat man für den Fall, daß Γ in einer Chevalleygruppe liegt einen Satz

$$H^i(\Gamma \backslash X, \mathbb{C}) = 0 \qquad i \neq 0, \ \dim X = d$$

$$\dim H^d(\Gamma \backslash X, \mathbb{C}) = \text{Multiplizität der Steinberg-darstellung im diskreten Spektrum von } L^2(\Gamma \backslash \mathbb{G})$$

(Vergl. Inv. Math., 42, p. 135-175 (1977))

G. Harder
SFB 40 Bonn
GHS Wuppertal.

14.11.77 Wittringe und Anordnungen von Körpern

Sei K ein formal reeller Körper. T eine Präordnung von K und $W(K)$ der Wittring der quadratischen Formen über K. Bezeichne mit $I(K,T) \subset W(K)$ das Ideal, das von den Formen $\langle 1, -t \rangle$, $t \in T$ aufgespannt wird. Nach Pfister (Becker) hat man die exakte Folge

$$0 \to I(K,T) \to W(K) \xrightarrow{\text{sign}} C(X/T, \mathbb{Z})$$ außerdem ist

$$0 \to I(K,T) \to W(K) \to W(K,T) \to 0$$ exakt

Dabei ist X/T der Raum der Anordnungen P von K mit $P \supset T$ und $W(K,T)$ der modulo T reduzierte Wittring.

Skizze des Beweises für folgenden Satz (Becker-Bröcker)

Satz Sei $f \in C(X/T_0, \mathbb{Z})$ gleichwertig

a) $f \mid X/T \in \text{sign}(W(K))$ für alle Präordn. $T \supset T_0$, $(K^* : T^*) < \infty$

b) $f \in \text{sign}(W(K))$

c) $f \mid X/T \in \text{sign}(W(K))$ für alle Fächer $T \supset T_0$, $(K^* : T^*) < \infty$

d) $\sum_{P \supset T} f(P) \equiv 0 \mod \frac{1}{2}(K^* : T^*)$ für alle Fächer $T \supset T_0$, $(K^* : T^*) < \infty$

Fächer sind spezielle Präordnungen, die auch in anderem Zusammenhang eine Rolle spielen.

Zum Beweis wird ein lokal-global Prinzip benutzt (Bröcker 1972), das die Reduktion von b) nach a) erlaubt. Der Rest geschieht mittels einer genauen Analyse von X/T für $(K^* : T^*) < \infty$.

L. Bröcker Münster

21. 11. 77 Über fastvollständige Durchschnitte.

I sei ein Ideal eines regulären lokalen Rings S, r die Höhe von I. Man nennt I (oder auch $S/I =: R$) einen vollständigen Durchschnitt wenn $\mu(I) = r$ ist, wobei μ die Länge ~~eines~~ minimalen Erzeugendensystems von I ist, und einen fastvollständigen Durchschnitt, wenn $\mu(I) = r+1$. Für vollständige Durchschnitte sind viele Eigenschaften bekannt. Es soll darüber berichtet werden, welche Analoga für fastvollständige Durchschnitte existieren.

<u>Satz 1</u>. Ist R fastvollständiger Durchschnitt, so ist R niemals ein Gorensteinring.

<u>Satz 2</u> (Matsuoka) Ist R fastvollständiger Durchschnitt und Integritätsbereich, so hat man eine exakte Folge

$$0 \to K_R \to R^{r+1} \to I/I^2 \to 0,$$

wobei $K_R := \mathrm{Ext}_S^r(R,S)$ der kanonische (dualisierende) Modul von R ist.

<u>Satz 3</u>. Ist I fastvollständiger Durchschnitt und Primideal, so sind folgende Aussagen äquivalent:

1) Der „Konormalenmodul" I/I^2 ist torsionsfrei R-Modul.

2) I^2 ist ein Primärideal

3) R ist vollständiger Durchschnitt in Kodimension 1, d.h. R_P ist vollständiger Durchschnitt für alle $P \in \mathrm{Spec}(R)$ mit der Höhe 1.

Insbesondere ist I^2 niemals primär, wenn $\dim R = 1$.

Man hat Anwendungen für Kähler-Differentiale, z.B. sei S der lokale Ring eines Polynomrings $K[X_1, \dots, X_n]$ über einem vollk. Körper K, $R = S/I$ fastvollständiger Durchschnitt und Integritätsbereich. Dann gilt

<u>Satz 4</u> (Matsuoka, Aoyama). Der Kählersche Differentialmodul $D_K(R)$ besitzt unendliche projektive Dimension.

Ernst Kunz
(Regensburg)

28.11.77 Über das Bild der Exponentialfunktion in Lieschen Gruppen

Ist G eine topologische Gruppe, so heiße G exponentiell, wenn $G = \bigcup\{f(\mathbb{R}) \mid f: \mathbb{R} \to G$ Morphismus topologischer Gruppen$\}$ gilt, und schwach exponentiell wenn die rechtsstehende Menge bloß dicht in G ist. Beispielsweise ist $PSL(2,\mathbb{R})$ exponentiell, aber keine seiner Überlagerungsgruppen (einschließlich $SL(2,\mathbb{R})$) ist schwach exponentiell.

Sei nun G lokalkompakt und zusammenhängend, R das Radikal, G_s die größte normale (und dann charakteristische) Untergruppe derart, daß G_s/R kompakt ist. Dann ist G/G_s allemal eine halbeinfache Liegruppe ohne kompakten Faktor. SATZ 1. G ist genau dann schwach exponentiell, wenn G/G_s schwach exponentiell ist. KOROLLAR 1A. Ist G/R kompakt, so ist G schwach exponentiell. KOROLLAR 1B. Sind $N \trianglelefteq G$ und G/N schwach exponentiell, dann auch G.

Damit ist die Frage auf halbeinfache Gruppen zurückgeführt. Eine Untergruppe C von G ist eine Cartanuntergruppe falls sie der Zentralisator einer Cartanalgebra ist. Damit haben wir SATZ 2. Eine halbeinfache zusammenh. Liegruppe ist genau dann schwach exponentiell, wenn alle Cartanuntergruppen zusammenhängend sind. KOROLLAR 2A. Alle komplexen zush. Liegruppen sind schwach exponentiell.

Wir diskutierten weitere Eigenschaften topologischer Gruppen, die mit der schwachen Exponentialeigenschaft zusammenhängen.

Die Arbeit ist gemeinsam mit A. Mukherjea entstanden und benützt Korrespondenz mit A. Borel.

Karl H. Hofmann, Tulane U.
z. Zt. Paris

Ramsey's Theorem in Arithmetic

5.12.77

Until recently the only known examples of true elementary arithmetical statements not provable from P were, as statements about numbers, fearfully complicated. This year however a general method has been devised for constructing true (in $\mathbb{N}$) unprovable statements. Several of these are elementary and combinatorial. One such sentence, noticed by Leo Harrington, was

$$\forall x \, \exists y \quad y \overset{*}{\longrightarrow} (2x)^x_x .$$

[Here $*$ indicates that the homogeneous set Y must satisfy $\min(Y) \leq |Y|$.]

Furthermore if

$$w(n) = \text{the least } m \text{ s.t. } m \overset{*}{\longrightarrow} (2n)^n_n$$

then $w : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ and w dominates any provably total computable function. This can be interpreted as saying that the problem "find a bound on the least m s.t. $m \overset{*}{\longrightarrow} (2n)^n_n$" has no reasonable solution.

It would appear that in combinatorics any reasonable function should be primitive recursive. With this less generous notion of reasonable it is straightforward to give a direct proof of the following result:-

Let $e(n)$ = the least m s.t. $m \overset{*}{\longrightarrow} (3)^2_n$. Then e dominates all primitive recursive functions. Hence the problem "find a bound on the least m s.t. $m \overset{*}{\longrightarrow} (3)^2_n$" has no reasonable solution.

Jeff Paris, Manchester.

Rationalitätsfragen bei Darstellungen endlicher Gruppen

12. 12. 77

A) Sei k ein Körper der Char. 0, G eine endliche Gruppe. Für einen abs.-irred. Charakter χ von G setzt man $s_k(\chi) = \min\{L:k(\chi) \mid L \text{ Zerf.körper von } \chi \text{ über } k\}$. Schur (1906) bewies: Ist L Zerfällungskörper von χ über k, so ist $s_k(\chi)$ ein Teiler von $L:k(\chi)$. Im Anschluß daran hat er die Frage nach der expliziten Bestimmung der natürlichen Zahlen $s_k(\chi)$ aus der Gruppentafel von G gestellt. Es wurde etwas über die Entwicklung dieses Problems referiert: 1) Für $k=\mathbb{R}$ bewiesen Frobenius und Schur (Sitzungsber. der Preuß. Ak., 1906): Setzt man $c_\chi := \frac{1}{G:1}\sum \chi(x^2)$, so ist nur $c_\chi = 1, 0, -1$ möglich, und es gilt $s_{\mathbb{R}}(\chi) = 2 \Leftrightarrow c_\chi = -1$. (Ein einfacher Bew. des Vortr. findet sich in Proc. AMS 1969, wo die Aussage auch auf kompakte Gruppen ausgedehnt wird).
2) Für endl. Erw. k von $\mathbb{Q}_p$ gibt es die Untersuchungen von Witt (Crelle, 1952) sowie des Vortr. (Journ. of number theory, 1971) 3) Den Zahlkörperfall kann man mittels Hasse auf 2) und 1) zurückführen.

B) Ist man an abstrakteren Feststellungen interessiert, so hat man die ziemlich komplizierten Rechnungen in 2) unter A) nicht nötig. Man erhält z.B. relativ einfach den folgenden <u>Satz</u> (Math. Annalen, 1972): Sei k ein beliebiger alg. Zahlkörper. Dann existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Gruppe mit einem abs.-irr. Charakter χ mit $s_k(\chi) = n$ (aber i.a. $k(\chi) \neq k$).

Setzt man ferner $S(k) := \{[A] \in B(k) \mid \exists \text{ Gruppe } G : A \text{ ist einf. Bestandteil von } kG\}$, so gilt der folg. <u>Satz</u>: Sei $k/\mathbb{Q}_p$ endlich, $p \neq 2$. Dann ist $S(k)$ eine endliche (zyklische) Gruppe der Ordnung $e_k := e(k(\zeta_p)/k)$ = Verzweigungsindex von $k(\zeta_p)/k$.
Dieser Satz folgt aus den Formeln in 2) unter A, vgl. auch Yamada Lect. notes 397, aber diese sind für den Beweis nicht erforderlich; im Vortrag wurde ein einfacherer Grund für seine Gültigkeit angegeben. Für die ausgenommene Primzahl 2 gilt: <u>Satz</u>: Sei $k/\mathbb{Q}_2$ endlich. Dann ist $|S(k)| \le 2$. Ist k_0 der max. Kreiskörper in k, so ist $|S(k)| = \frac{1}{(2,k:k_0)}|S(k_0)|$, und es gilt

$$|S(k_0)| = 2 \Leftrightarrow -1 \text{ ist Norm bei } k_0/\mathbb{Q}_2$$

C) Man setzt: $PS(k) = \{[A] \in B(k);\ \exists \text{ Gruppe } G \text{ u. Faktorensystem } f \text{ von } G \text{ in } k : A \text{ ist einf. Bestandteil von } k_f G\}$

$PSA(k)$, $PSN(k)$ bezeichnen die entsprech. Untergruppen, bei denen man sich auf abelsche bzw. nilpotente Gruppen einschränkt. <u>Satz</u> (mit Opolka): Für lokale wie globale Körper k gilt (mit w = Anzahl der Einheitswurzeln in k):

(i) $PSA(k) = B(k)(w) = \{[A] \in B(k);\ [A]^w = 1\}$

(ii) $PSN(k) = \bigoplus_{q \mid w} B(k)_q$

(iii) $PS(k) = B(k)$

F. Lorenz, Münster

$\mathfrak{p}$-adische Körper mit gleichem algebraischen Erweiterungstyp

In Anlehnung an einen Satz von Neukirch - Iwasawa - Uchida - Ikeda:
"Sind k_1 und k_2 algebraische Zahlkörper mit isomorphen absoluten Galoisgruppen, so sind k_1 und k_2 konjugierte Körper"
werden endliche Erweiterungen K und L von $\mathbb{Q}_p$, dem Körper der Henselschen p-adischen rationalen Zahlen, mit isomorpher absoluter Gruppe untersucht. Der Vortrag umfaßt den Bericht über zwei Arbeiten hierzu (eine gemeinsam mit M. Jarden (Tel-Aviv)) und enthält den Satz:

n_K bezeichne den absoluten Grad von $K/\mathbb{Q}_p$, K^0 die maximal abelsche Teilerweiterung in $K/\mathbb{Q}_p$; ζ sei eine primitive p-te Einheitswurzel (p≠

$$\zeta \in K \Rightarrow \left(G_K \simeq G_L \Leftrightarrow n_K = n_L \;\&\; K^0 = L^0 \right).$$

Der Beweis dieses Satzes benutzt Ergebnisse von Uchida und H. Koch. Es wird ein entsprechender Satz ohne die Voraussetzung $\zeta \in K$ angegeben.

(19.12.77)

J. Ritter, TU Berlin