9. 1. 1978

Endlich präsentierbare auflösbare Gruppen

Philip Hall hat 1954 die Frage gestellt, ob jedes homomorphe Bild einer endlich präsentierbaren auflösbaren Gruppe G endlich präsentierbar sei. Hall selbst hat gezeigt, dass dies zutrifft, wenn G einen Abelschen Normalteiler mit polyzyklischer Faktorgruppe besitzt.

In Zusammenarbeit mit Ralph Strebel (Heidelberg) wurde kürzlich eine notwendige Bedingung (*) für die endliche Präsentierbarkeit einer auflösbaren Gruppe gefunden, die sich nachweisbar auf homomorphe Bilder vererbt und die im metabelschen Fall auch hinreichend ist; folglich gilt wenigstens: <u>Korollar 1</u>: Jedes metabelsche homomorphe Bild einer endlich präsentierbaren Gruppe ist endlich präsentierbar.

Daraus ergibt sich <u>Korollar 2</u>: Das Hall'sche Problem hat eine positive Lösung wenn G in der Varietät $\mathfrak{N}_2\mathfrak{A}$ ist (Erweiterungen von nilpotenten Gruppen der Klasse 2 durch Abelsche Gruppen).
<u>Korollar 3</u>. * Sei G eine endlich präsentierbare Gruppe mit Zentrum Z und G/Z metabelsch. Dann ist Z endlich erzeugbar und G/Z residuell endlich. <u>Korollar 4</u>. Eine metabelsche Gruppe G ist genau dann endlich präsentierbar, wenn das semi-direkte Produkt $G' \rtimes (G/G')$ endlich präsentierbar ist. (Zum Beweis von Korollar 3 braucht man tiefliegende Sätze von Groves und Roseblade)

Robert Bieri (Freiburg i. Brg.)

Algorithmische Informationstheorie 20.1.77

Péter Gács

Wir schildern in einem zusammenhängender Form, nach Levin, die Theorie der Beschreibungskomplexität, die in 1965 durch Kolmogorov begonnen wurde. Die apriori Wahrscheinlichkeit $M(x)$ ist eine positive, von unten berechenbare Funktion mit endlicher Summe, ($x \in N$, die Menge der Nat. Zahlen), die bis auf eine multiplikative Konstante maximal unter solchen Funktionen ist. Levin hat bewiesen, daß $M(x)$ bis auf eine multiplikative Konstante mit $2^{-K(x)}$ übereinstimmt, wo $K(x)$ eine modifizierte Version der Kolmogorovschen Komplexität ist. Wir behandeln einige Aspekte und Konsequenzen dieser Gleichheit, Eigenschaften der Komplexität, und ihre Bedeutung für die formalisierte Heuristik.

Gács Péter

Heiratsprobleme

23.1.78

Man interessiert sich für ein notwendiges und hinreichendes Kriterium, das entscheidet, ob eine vorgelegte Familie eine injektive Auswahlfunktion (i.A.) besitzt oder nicht. Ein solches Kriterium ist nicht bekannt. Allerdings kennt man (gewisse) Kriterien für gewisse Klassen von Familien. Es werden Untersuchungen vorgestellt, die gemeinsam mit M. Holz und K.-P. Podewski durchgeführt wurden. Grundlegend ist folgender Begriff: Eine Familie F heißt <u>kritisch</u>, falls F eine i.A. besitzt und falls für jede i.A. f von F gilt $\mathrm{Wb}\, f = \bigcup\{F(i) \mid i \in \mathrm{Db}\, F\}$.

Resultat: Eine Familie $F = (F(i) \mid i \in I)$ mit $|I| \leq \aleph_0$ besitzt genau dann eine i.A. falls kein $J \subseteq I$ und kein $i \in I \setminus J$ existiert mit $F \restriction J$ kritisch und $F(i) \subseteq \bigcup\{F(j) \mid j \in J\}$.

Dieses Resultat wird verallgemeinert und es werden Anwendungen aufgezeigt.

K. Steffens
(Hannover)

Was ist und was soll die Selbergsche Spurformel?

Der Inhalt dieses Vortrags geht weitgehend zurück auf bahnbrechende Entdeckungen, die A. Selberg vor ca. 25 Jahren gemacht hat, deren Details aber erst in jüngster Vergangenheit allgemein zugänglich geworden sind. – Wir betrachten fixpunktfreie diskrete Untergruppen Γ von $PSL(2,\mathbb{R})$ mit kompaktem Quotienten $X = \Gamma\backslash\mathbb{H}$ ($\mathbb{H}$ = obere Halbebene). Für solche Gruppen beinhaltet die Selbergsche Spurformel eine Beziehung zwischen Summen der Gestalt $\sum_{n=0}^{\infty} h(r_n)$ ($\lambda_n = \frac{1}{4} + r_n^2$ durchläuft die in ihren Vielfachheiten gezählten Eigenwerte des Laplace-Beltramischen Operators $-\Delta$ auf X) und Summen, in denen die Fourier-Transformierte $g(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iru}\, h(r)\, dr$ ausgewertet wird an den Stellen $\log N(P)$ (P durchläuft ein Vertretersystem der Konjugationsklassen hyperbolischer Elemente von Γ, $N(P)$ = „Norm" von P = Multiplikator von P). Die Zahlen $\log N(P)$ sind die Längen der geschlossenen Geodätischen auf X (bzgl. der eind. bestimmten Riemannschen Metrik, die mit der konformen Struktur von X verträglich ist u. konstante negative Krümmung -1 hat), bilden also das „Längenspektrum" von X. Die Spurformel beinhaltet also eine Beziehung zwischen analytischen Invarianten von X, den Eigenwerten von

$-\Delta$, und geometrischen Invarianten von X, den Längen der geschlossenen Geodätischen auf X. Diese Beziehung kann verwendet werden, um asymptotische Aussagen über

$$\#(T) := \{n : 0 \leq \lambda_n \leq T\}$$

$$\pi_0(x) := \#\{\{P_0\} : P_0 \text{ primitiv hyperbolisch}, N(P_0) \leq x\}$$

($\{P_0\}$ = Konjugationskl. von P_0) zu gewinnen. Mit Hilfe eines Tauberschen Satzes bekommt man sehr leicht die Weylsche asymptotische Formel

$$\#(T) \sim \frac{\mu(\mathcal{F})}{4\pi} T \qquad (T \to \infty)$$

($\mathcal{F}$ = Fundamentalbereich von Γ, μ = $PSL(2,\mathbb{R})$-invariantes Maß in H). Schärfere asymptotische Aussagen gewinnt man mit Hilfe der Selbergschen Zetafunktion, die genauer vorgestellt wird. Zusammenfassend erhält man dann recht befriedigende asymptotische Aussagen über $\#(T)$ und die „Primzahlfunktion" $\pi_0(x)$. In der Formel für das asymptotische Verhalten von $\pi_0(x)$ spielen die „kleinen" (in $]0, \frac{1}{4}[$) gelegenen Eigenwerte von $-\Delta$ eine besondere Rolle. Der Vortrag schließt mit Hinweisen auf neuere Resultate bzgl. der möglichen Existenz Riemannscher Flächen vom Geschlecht g für die solche „kleinen" Eigenwerte wirklich vorhanden sind.

30.1.78

J. Elstrodt

1.2.78

Zur Fehlerabschätzung des konstanten Gliedes in Lernprozessen mit distanzvermindernden Operatoren.

Lernprozesse, deren assoziierte Zustandskette Markoff'sch ist, haben distanzvermindernde Operatoren, wenn gilt, daß die r_i, definiert als

$$r_i = \sup_{x \neq y} \int p(x, de^i) \, \frac{d(u(x, e^i), u(y, e^i))}{d(x, y)}$$

[($p(\cdot,\cdot)$ stochastischer Kern, $e^i = (e_{i-1}, e_{i-2}, \dots, e_0)$, d Abstand, u Übergangsfunktion $u: X \times E \to X$ (X: Zustandsraum, E Ereignisraum)] erfülle

$r_1 < \infty$ und $\exists k : r_k < 1$. Für den Übergangsoperator läßt sich dann zeigen, daß gilt

$$\| U^n - U^\infty \| \le \beta \alpha^n$$

(Norman, 1972)

In einem linearen Lernmodell $x' = \beta g + \alpha x$ erfüllt eine Wahl von $\beta = \dfrac{d(g, x)}{\max_{y \neq x} \{ d(g, y) \} + c}$ (g Beobachtung(svektor), $x, y, \dots$ seien "Klassen"beschreibungen (endlich viele), $\alpha = 1 - \beta$, und c eine bel. Realisierung einer Zufallsvariablen aus $\mathbb{R}^+$) die distanzvermindernde Eigenschaft und erlaubt außerdem noch, Erwartungswert und Varianz der Grenzverteilung zu berechnen. Eine Approximation der vom Lernmodell gezeigten Fehler durch eine Annahme

$$\hat{E}_n = \alpha_n \beta_n^m + \gamma_n \quad \forall m \le n$$

kann durch gewichtete Fehlerquadratminimierung erzielt werden, wobei als Gewichte β_n^{-m} gewählt wird, damit man eine Höherbewichtung der kleinen, und (hoffentlich) schon konstanten Fehler erhält.

H. Rohwer
IMECC – Universität Campinas
Brasilien

Das Spektrum des Wittringes einer algebraischen Mannigfaltigkeit.

Sei X ein zusammenhängendes quasiprojektives Schema. Es wurde ein Beweis des folgenden Satzes skizziert, der über die Primideale des Wittringes $W(X)$ der symmetrisch bilinearen Formen auf X Auskunft gibt. Sei $I(X)$ das Ideal der durch Formen gerader Dimension repräsentierten Elemente von $W(X)$.

Satz: i) $I(X)$ ist das einzige Primideal P von $W(X)$ mit $2 \cdot 1_{W(X)} \in P$.

ii) Besitzt $W(X)$ keine Homomorphismen $\sigma: W(X) \to \mathbb{Z}$ ("Signaturen von X"), so ist $I(X)$ überhaupt das einzige Primideal von $W(X)$

iii) Andernfalls sind die Kerne der Signaturen genau alle minimalen Primideale von $W(X)$.

Für X lokal stammt dieser Satz von Knebusch–Rosenberg–Ware. Der Satz läßt sich für nicht lokales X auf den lokalen Fall zurückführen durch eine von A. Dress entwickelte K-theoretische Lokal–Global–Technik, s. A. Dress, Comm. in Algebra (für X affin), und die Vorlesung von Knebusch in den Kingston–Proceedings der Konferenz über quadratische Formen 1976.

Es läßt sich weiter zeigen, daß jede Signatur σ von X durch eine Anordnung α eines Restklassenkörpers $k(x)$ von X induziert wird:

$$\sigma(E) = \text{Sylvester-Signatur von } E(x) \text{ bzgl. } \alpha.$$

Manfred Knebusch
(Regensburg)

Die diskontinuierlichen Isometriegruppen der nicht-euklidischen Ebene.

Es wurde ein Methode beschrieben, die im Titel genannten Gruppen in freie Produkte von Untergruppen mit Amalgamen zu spalten. Diese Aufspaltung gestattet eine sehr einfache geometrische Deutung. Als Anwendung ergeben sich teilweise bekannte Sätze über die Klassifizierung der Gruppen auf grund der sogenannten geometrischen Isomorphie. Eine weitere Anwendung ist ein sehr einfacher Zugang zum dem am Anfang dieses Jahrhunderts von Robert Fricke eingeführten Vorgänger des Teichmüller-Raumes. Schliesslich wurde kurz ein Problem betreffend geometrische Automorphismen endlicher Ordnung erwähnt, das sich mit Hilfe des Fricke-Teichmüller-Raumes lösen lässt.

13. 2. 1978

Werner Fenchel (Kopenhagen)

Profinite group actions on boolean trees.

Luis Ribes and I showed that a large part of the Bass Serre theory of groups acting on trees can be carried over from discrete to profinite groups. An (oriented) boolean graph Γ is defined to be a pair of maps $E(\Gamma) \overset{d_0}{\underset{d_1}{\rightrightarrows}} V(\Gamma)$ in the category of boolean spaces (compact, Hausdorff, totally disconnected). Let $\underline{C}$ be a class of finite groups, closed under the formation of subgroups, quotients and finite products, and let $\mathfrak{a}$ denote the left adjoint of the forgetful functor from the category of abelian pro-$\underline{C}$-groups to the category of boolean spaces. A boolean graph Γ is then defined to be a $\underline{C}$-tree if there is an exact sequence:

$$0 \to \mathfrak{a}(E(\Gamma)) \xrightarrow{d} \mathfrak{a}(V(\Gamma)) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}_{\underline{C}} \to 0,$$

where $d(e) = d_0(e) - d_1(e)$ for all $e \in E(\Gamma)$, and ε sends all $v \in V(\Gamma)$ to the generator 1 of the free abelian pro-$\underline{C}$-group $\mathbb{Z}_{\underline{C}}$ on one generator. Free action of a pro-$\underline{C}$-group on a boolean $\underline{C}$-tree is not sufficient to guarantee that the pro-$\underline{C}$-group is free on a pointed boolean space: additional hypotheses are needed about the existence and liftability of a maximal $\underline{C}$-tree in the graph of orbits. One can define the concept of "topological colimit of a $\underline{C}$-tree of pro-$\underline{C}$-groups"; however the canonical morphisms from the vertex groups and edge groups into this topological colimit need not ~~exist~~ be injective. When injectivity is assumed, the Bass Serre theory carries over nicely, and the cohomology of the topological colimit can be described in terms of the cohomology of the vertex groups and edge groups. We applied our results to obtain information about the structure and cohomology of one-relator pro-p-groups.

17. 6. 1978. D. Gildenhuys
McGill University.

Die Entstehung der analytischen Zahlentheorie

Es wurde beschrieben, wie Dirichlet zum ersten Mal in großem Umfang Methoden der Analysis anwandte, um zentrale Fragen der Zahlentheorie zu behandeln. Beim Versuch, den Satz über Primzahlen in arithmetischen Progressionen zu beweisen, wurde er veranlaßt, die L-Reihen $L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}$ einzuführen. Der zentrale Punkt im Beweis ist der Nachweis von $L(1,\chi) \neq 0$ für $\chi \neq 1$. Dirichlet versucht, $L(1,\chi)$ direkt zu berechnen, indem er den Ansatz

$$L(1,\chi) = c_1 \log \frac{1}{1-\varepsilon} + \dots + c_{d-1} \log \frac{1}{1-\varepsilon^{d-1}} \quad , \quad \log \frac{1}{1-\varepsilon^{k}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{nk}}{n} \quad , \; \varepsilon = \exp\left(\frac{2\pi i}{d}\right)$$

macht. Die c_i sind durch ein lineares Gleichungssystem bestimmt, und es ergibt sich daß die c_i im wesentlichen Gauss'sche Summen sind. Nach einigen Rechnungen ergibt sich für $\chi(k) = \left(\frac{k}{n}\right)$

$$L(1,\chi) = \frac{\pi}{p\sqrt{p}} \left(\sum b - \sum a\right)$$

, b quadr. Nichtreste, a quadr. Reste
χ Charakter mod p, p Primzahl $\equiv 3(4)$

z. B. $$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + - \dots = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$, bzw.

$$L(1,\chi) = \frac{1}{\sqrt{p}} \log \left(\frac{\prod \sin\left(\frac{\pi b}{p}\right)}{\prod \sin\left(\frac{\pi a}{p}\right)} \right) \qquad p \text{ Primzahl } \equiv 1(4).$$

Im ersten Fall folgt sofort $L(1,\chi) \neq 0$ und der tiefe Satz $(\sum b - \sum a) > 0$. Im zweiten Fall benutzt man die Galois-Theorie des p-ten Kreisteilungskörpers um zu zeigen, daß

$$\frac{\prod \sin\left(\frac{\pi b}{p}\right)}{\prod \sin\left(\frac{\pi a}{p}\right)} = \frac{s + t\sqrt{p}}{-s + t\sqrt{p}} \qquad s,t \in \mathbb{Z},\ s \neq 0 \quad , \quad \eta = \frac{s + t\sqrt{p}}{2} \text{ Einheit in } \mathbb{Q}(\sqrt{p})$$

Damit ist auch in diesem Fall gezeigt $L(1,\chi) \neq 0$. Eine sich aufdrängende Frage ist: Welche Potenz der Grundeinheit ε ist η. Die Antwort ist die analytische Klassenzahlformel $\eta = \varepsilon^h$, wobei h die Klassenzahl von $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ ist. Zum Beweis muß $L(1,\chi)$ noch einmal anders berechnet werden, indem man eine ζ-Funktion $Z(s)$ für $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ einführt, diese Reihe durch ein Doppelintegral approximiert und $\lim_{s\to 1} (s-1) Z(s)$ berechnet. Im Fall $Q(\sqrt{-1})$ sieht diese Rechnung so aus: $Z(s) = \sum \frac{1}{(x^2+y^2)^s}$.

$$\lim_{s\to 1} (s-1)\, Z(s) = \lim_{s\to 1} (s-1) \iint\limits_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^s} = \lim_{s\to 1} (s-1) \frac{\pi}{(s-1)} = \pi .$$

Winfried Scharlau, 24. 4. 1978
(Münster)

Automorphisms of the free group of rank 2.

Let F be the free group of rank 2 generated by $\underset{\sim}{x} = (x, y)$, $\Phi = \mathrm{Aut}(F)$ and $\Omega = \mathrm{Inn}(F)$. The subgroup of extended symmetries is Δ. A presentation of Φ is given which allows each φ in Φ to be expressed in a standard form, $\varphi = \gamma_1 \cdots \gamma_k\, \omega\, \delta$, where each γ_i is an (elementary) Nielsen automorphism (e.g. $\underset{\sim}{x} \overset{\gamma}{\mapsto} (yx, y)$), all the γ_i have the same parity (e.g. γ and $\bar{\gamma}$ have opposite parity), ω is in Ω and δ in Δ. It follows that if

$$\{\underset{\sim}{x}\} \xrightarrow{\gamma_1} \underset{\sim}{u}_1 \xrightarrow{\gamma_2} \cdots \xrightarrow{\gamma_k} \underset{\sim}{u}_k ,$$

then the lengths of the $\underset{\sim}{u}_i$ are strictly increasing. Justification of the presentation is an almost immediate consequence.

A further consequence concerns arbitrary m-tuples of words $\underset{\sim}{W}_0 = (W_1, \cdots, W_m)$. Suppose φ as above and let $\underset{\sim}{W}_i$ be the image of $\underset{\sim}{W}_{i-1}$ under γ_i. Then if $|\underset{\sim}{W}_0| < |\underset{\sim}{W}_1|$, we may assume the standard form is such that $|\underset{\sim}{W}_{i-1}| < |\underset{\sim}{W}_i|$, $i = 1, \cdots, k$.

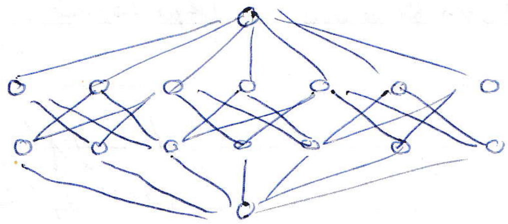
Possible applications are to the conjugacy problem of Φ and to systems of 2 variable equations over free groups.

8 May 1978

M. J. Weeks
Singapore.

Verbandstheoretische Aspekte des Hilbert-Raumes

Ein Orthoverband ist eine Algebra $(L; \vee, \wedge, ', 0, 1)$ mit zwei zweistelligen, einer einstelligen und zwei nullstelligen Operationen, wobei $(L; \vee, \wedge)$ ein Verband ist mit Schranken $0, 1$ und $'$ eine Orthokomplementierung, d.h. eine einstellige Operation, die den Bedingungen $x \leq y \Rightarrow y' \leq x'$, $x'' = x$, $x \vee x' = 1$, $x \wedge x' = 0$ genügt. Ein orthomodularer Verband ist ein Orthoverband der dem orthomodularen Gesetz: $a \leq b \Rightarrow a \vee (a' \wedge b) = b$ genügt. Es wird darauf hingewiesen wie sich dieser Begriff aus der Betrachtung der Unterräume eines Hilbert-Raumes und der Theorie der von Neumann Algebren ergeben hat. Sodann wird die Frage aufgeworfen ob die Gleichungstheorie der orthomodularen Verbände entscheidbar ist. Ein Versuch das Problem direkt anzugehen führt zu einem Entscheidungsverfahren für Orthoverbände (Can. J. 28), nicht aber für orthomodulare Verbände. Da, wie bekannt, die Entscheidbarkeit folgt falls die Varietät aller orthomodularen Verbände von ihren endlichen Gliedern erzeugt wird, wird diese letzte Frage untersucht. Dabei spielt das System $\mathfrak{A}(L)$ aller maximalen Booleschen Unteralgebren von L eine Rolle. Es wird die Frage diskutiert, wie ein System von Booleschen Algebren beschaffen sein muss, damit es sich als System aller maximalen Booleschen Unteralgebren eines orthomodularen Verbandes auffassen läßt. Zur Illustration wird das folgende Beispiel diskutiert:



G. Bruns, 22. V. 78
(McMaster Univ., Hamilton, Ont., Canada)

Arithmetik von Modulkurven

Sei N eine natürliche Zahl und sei $X = X_0(N) = Y \cup S$ die Modulkurve, die die Paare (E, C) — E eine elliptische Kurve, C eine zyklische Untergruppe von der Ordnung N — parametrisiert. ($Y = \Gamma_0(N) \backslash \mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}$ = obere Halbebene, $\Gamma_0(N) \subset PSL(2, \mathbb{Z})$ definiert durch die $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, $N | c$.) Sei $A = \mathrm{Aut}(X)$ die Gruppe aller Automorphismen von X (endlich wenn das Geschlecht g von X ≥ 2 ist.) Dann enthält A die Gruppe $W \simeq C_2^r$ der "Atkin-Lehnerschen Involutionen" von X, wobei r die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von N ist. Das Problem der Bestimmung von A steht in enger Zusammenhang mit dem Problem der Bestimmung von $Y(\mathbb{Q})$. Für N quadratfrei ist $A = W$ falls $N \neq 37$ (und $g \geq 2$). Mazur hat bewiesen, daß $Y(\mathbb{Q})$ leer ist, außer einigen seit langem bekannten Fällen. Die Mitteln für das Studium für diese und andere arithmetischen Probleme sind u.a.:

a) die Hecke-Algebra;

b) Reduktion modulo guten Primzahlen ℓ (Igusa);

c) Reduktion modulo einer schlechten Primzahl p (nun sei $p | N$ aber $p^2 \nmid N$) (Igusa-Deligne-Rapoport).

Die Reduktion modulo $p | N$ hat insbesondere viele Anwendungen — Weierstraß-Punkte bei Spitzen, semistabile Reduktion und Rationalität von Endomorphismen (Ribet), Zusammenhang mit supersingulären elliptischen Kurven, usw.

A. P. Ogg 29.5.78
(Bonn, Berkeley)

Die Varietät der Algebrenstrukturen der Dimension d.

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Eine assoziative Algebrastruktur auf k^d wird in der natürlichen Basis $e_1, \dots, e_d$ gegeben durch

$$e_i e_j = \sum a_{ij}^p e_p ,$$

wobei $\sum_q a_{ij}^q a_{qp}^l = \sum_q a_{iq}^l a_{jp}^q$ für alle i, j, p, l gilt.

Diese d^4 quadratische Gleichungen definieren eine algebraische Varietät $V \subset k^{d^3}$. Es sei Alg_d die offene Teilvarietät von V bestehend aus den Algebrenstrukturen mit 1. Wir wollen die Bahnen von Alg_d unter der natürlichen Operation von GL_d (durch Strukturverschiebung!) untersuchen. Dabei soll eine Bahn C als Entartung der Bahn B gelten, falls $C \subset \overline{B}$.

Bekannt sind die folgenden Ergebnisse:

- Alg_1, Alg_2 haben 1 irreduzible Komponente, Alg_3 2, Alg_4 5, Alg_5 10.
- Die Entartungsrelation ist für $d \leq 4$ bekannt
- Die kommutativen Strukturen bilden für $d \leq 6$ eine irreduzible Komponente von Alg_d (Mazzola). Ab $d \geq 10$ breiten sie sich auf mehreren Komponenten aus (Iarrobino).
- Für die Anzahl alg_d der irreduziblen Komponenten von Alg_d gelten folgende Ungleichungen
$$2^{\frac{1}{2}d - \frac{7}{2}} \leq alg_d \leq 2^{d^4}, \quad d \geq 12.$$
- Die kommutativen Algebrenstrukturen mit Einbettungsdimension ≤ 2 bilden eine irreduzible Teilvarietät von Alg_d (Briançon).
- Die Algebrenstrukturen von endlichem Darstellungstyp bilden eine offene Teilvarietät von Alg_d.

P. Gabriel 5.6.78
(Uni Zürich)

Funktional-Interpretationen.

Nachdem mehrere Funktional-Interpretationen der intuitionistischen Zahlentheorie (Heyting-Arithmetik) HA und ihrer Erweiterung auf endliche Typen HA^ω bekannt sind, stellt sich die Frage nach einer gemeinsamen Grundidee dieser Interpretationen. Sie sind Übersetzungen $I: B \longmapsto B^I \equiv \exists v \forall w B_I$, für die ein Interpretationssatz gilt:

Aus $\vdash B$ folgt: es gibt Terme v_0, so daß $\vdash B_I(v_0, w)$

Wir betrachten nach Rath 1978 eine Erweiterung $HA^\omega_\in$ von HA^ω um Mengenterme $\{a\}$, $a \cup b$, $\bigcup_{x\in a} b[x]$, einen beschränkten Allquantor $\Lambda u \in a$ und $\in$-Formeln $b \in a$. Betrachtung eines Beweisbaumes von $C^I \equiv \exists y \forall z C_I$ aus $B^I \equiv \exists v \forall u B_I$ führt zu der Definition

$$(B \to C)^I \equiv \exists Y, W \forall v, z (\Lambda u \in Wvz B_I \longrightarrow C_I[Yv, z]),$$

wobei inhaltlich die Mächtigkeit der Menge Wvz durch die Verzweigungsordnung des Beweisbaumes gegeben ist. Definiert man I für die übrigen logischen Partikel wie für die Dialectica-Interpretation D, dann ist die Theorie $HA^\omega_\in + \{A \longleftrightarrow A^I\}$ in ihrem quantorenfreien Fragment $T_\in$ interpretierbar. Spezialfälle dieser allgemeinen Funktionalinterpretation ergeben sich durch Festlegung der Beschränkung $\Lambda u^\tau \in W$:

1. Ist W stets das Universum vom Typ τ, so ist I äquivalent zur modifizierten Realisation mr von Kreisel 1959, und $HA^\omega_\in$ erweist sich als konservativ über HA^ω.
2. Ist W stets endlich aufgezählt, so ist I äquivalent zur $\wedge$-Interpretation von Ref. und Nahm 1974 und daher für Formeln vom Typ o äquivalent zu D.
3. Ist W das Universum vom Typ $n-1$ für $\operatorname{grad}\tau \geq n > 0$, sonst das vom Typ τ, so ist I äquivalent zur n-Interpretation von Stein 1977.

Die allgemeine Interpretation I läßt sich fortsetzen auf geeignete Systeme der intuitionist. Analysis, aber nur im Fall $I = \wedge$ auf die klassische Analysis.

J. Diller (Münster) 12.6.78

The isomorphisms of the classical groups, 1928 to 1978.

Let Δ be a subgroup of $P\Gamma L(V)$ where V is a vector space with $\dim V \geq 5$ over an arbitrary field F, commutative or not. We say that Δ is full (of projective transvections) if for each line L of V and each hyperplane H of V with $L \subseteq H$ there is a projective transvection τ in Δ with fixed space H and with residual line L, i.e. with $\ker(\tau - 1) = H$ and $(\tau - 1)V = L$. Let $\Lambda : \Delta \cong \Delta_1$ be an isomorphism between two such groups.

__Theorem A.__ Λ has exactly one of the forms $\Lambda\sigma = g\sigma g^{-1}\ \forall \sigma \in \Delta$ for a unique projective collinear transformation g of V onto V_1, or $\Lambda\sigma = h\check{\sigma} h^{-1}\ \forall \sigma \in \Delta$ for a unique projective collinear h of the dual V' onto V_1.

__Application.__ The integral linear groups $PGL(\mathfrak{o})$ with $\mathfrak{o}$ a domain possessing a field of quotients is full and so the isomorphisms between two such groups are given by Theorem A. Now let $n, n_1 \geq 3$ and let $\mathfrak{o}$ and $\mathfrak{o}_1$ be commutative integral domains.

__Theorem B.__ The following are equivalent:

(0) $n = n_1$ and $\mathfrak{o} \cong \mathfrak{o}_1$

(1) $SL_n(\mathfrak{o}) \cong SL_{n_1}(\mathfrak{o}_1)$

(2) $PSL_n(\mathfrak{o}) \cong PSL_{n_1}(\mathfrak{o}_1)$

(3) $GL_n(\mathfrak{o}) \cong GL_{n_1}(\mathfrak{o}_1)$

(4) $PGL_n(\mathfrak{o}) \cong PGL_{n_1}(\mathfrak{o}_1)$

The theory was initiated by Schreier and van der Waerden in 1928, extended to the __big__ groups $PGL(V)$ etc by the method of involutions of Dieudonné and Rickart in 1950, extended to full groups and so to commutative integral domains by my method of CDC in 1968, and extended to full groups over skew domains as in Theorem A by a more geometric method of mine in 1977. All these methods have application to full groups in the other classical groups PΓSp, PΓU, PΓO.

O. T. O'Meara,
University of Notre Dame
June 19, 1978.

Konjugationsklassen komplexer $n \times n$-Matrizen und Klassifikation primitiver Ideale

Seien $G = SL(n, \mathbb{C})$ und $\mathfrak{g} = sl(n, \mathbb{C})$ (Matrizen mit Spur $= 0$), und G operiere auf $\mathfrak{g}$ durch Konjugation. Vieles vom folgenden gilt auch allgemeiner für eine zusammenhängende halbeinfache komplexe Lie-Gruppe G und ihre adjungierte Operation auf ihrer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Der "Orbitraum" $\mathfrak{g}/G$ ist als Menge gut bekannt.

Im ersten Teil des Vortrages wurde über Ergebnisse zu folgenden Problemkreisen berichtet:

1. Man beschreibe die Orbiten $\mathcal{O}_x = \{gxg^{-1} \mid g \in G\}$ und den Abschluß $\overline{\mathcal{O}}_x$ als algebraische Untervarietäten im $\mathbb{C}^{n^2-1}$ $(= \mathfrak{g})$.
2. Man beschreibe den Orbitraum $\mathfrak{g}/G$ "geometrisch", insbesondere einschließlich der Quotiententopologie.

Bei 1. ging es um die Dimension (reguläre, subreguläre Orbiten), um die Normalität von $\overline{\mathcal{O}}_x$ (Kostant 1963 für reguläre, Hesselink 1976 für subreguläre u.a., Kraft-Procesi 1977 für beliebige Orbiten in sl_n), um die lokale geometrische Struktur des "nilpotenten Kegels" $\mathcal{N} = \{x \in \mathfrak{g} \mid x \text{ nilpotent}\} = \overline{\mathcal{O}}_x$, $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$. (Hesselink), um die Natur der auftretenden Singularitäten (Brieskorn u.a. 1970, Hesselink).

Bei 2. wurde eine Einteilung von $\mathfrak{g}$ in "Fasern" von Matrizen konstanter Eigenwerte und in "Schichten" von Matrizen konstanter Orbit-Dimension diskutiert. Die erstere ist klassisch, gegeben durch die Invariantenabbildung $\varphi: \mathfrak{g} \to \mathbb{C}^{n-1}$, $\varphi(x) = (\sigma_2(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \dots, \sigma_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n))$, z.B. $\varphi^{-1}(\varphi(0)) = \mathcal{N}$ ist die Faser mit der kompliziertesten Struktur. Die Fasern $\varphi^{-1}(p)$ sind G-stabile abgeschlossene Untervarietäten. Die Topologie auf Faser$/G$ ist durch eine Ordnungsrelation auf dieser endlichen(!) Menge gegeben, z.B. steht $\mathcal{N}/G$ in Bijektion zur Menge der Partitionen von n, und die entsprechende Ordnungsrelation für Partitionen wurde von Gerstenhaber und Hesselink angegeben. – Zur Definition der "Schichten" betrachtet man die Vereinigung $\mathfrak{g}^{(d)}$ aller Orbiten einer festen Dimension d und zerlegt diese lokal-abgeschlossene

Untervarietät $\mathfrak{g}^{(d)}$ von $\mathfrak{g}$ in ihre irreduziblen Komponenten. Das sind die Schichten von $\mathfrak{g}$. Sätze: Jede Schicht enthält genau einen nilpotenten Orbit (gilt für $\mathfrak{g}$ bel. halbeinfach; mit H. Kraft). Die Schichten sind paarweise disjunkt (gilt nur für $\mathfrak{sl}_n$ und Produkte solcher; Dixmier). Der Quotient Schicht/G ist in natürlicher Weise durch einen $\mathbb{C}^m$ ($m \leq n-1 =$ Rang $\mathfrak{g}$) parametrisiert (H. Kraft). – Das letzte Resultat ist klassisch für den Fall der "regulären Schicht" $\mathfrak{g}^{reg}$ ($\mathfrak{g}^{reg}/G \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^{n-1}$ vermöge φ). Alle diese Resultate und weitere werden zusammengefaßt, indem ein elementares "geometrisches Modell" für den Bahnenraum $\mathfrak{g}/G$ explizit angegeben wird (unter dem Namen "algebraischer Weyl-Komplex" nachzulesen in Invent. math. 40 (1977)), das $\mathfrak{g}/G$ als disjunkte Vereinigung von $p(n)$ affinen Räumen beschreibt ($p(n)$ = Anzahl der Partitionen von n), die durch ein kompliziertes System von Projektionen miteinander verbunden sind.

Im zweiten Teil des Vortrages wurden primitive Ideale in der universellen einhüllenden Algebra $U(\mathfrak{g})$ betrachtet. Das sind nach Definition die Kerne irreduzibler Darstellungen von $U(\mathfrak{g})$. (Sie sind nützlich z.B. als Invarianten unitärer Darstellungen reeller Lie-Gruppen.) Es bezeichne $\mathfrak{X}$ die Menge aller primitiven Ideale J von $U(\mathfrak{g})$ und $\mathfrak{X}^1$ die Teilmenge der vollprimen J (d.h. $U(\mathfrak{g})/J$ nullteilerfrei). Für nilpotentes $\mathfrak{g}$ hat man seit 1963 die Dixmier-Abbildung $\mathfrak{g}^*/G \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}^1$ (und $\mathfrak{X}^1 = \mathfrak{X}$) eine Bijektion zwischen Orbit-Raum und primitivem Spektrum. Mit kleinen Modifikationen hat man für auflösbare $\mathfrak{g}$ eine analoge Bijektion (Dixmier, Conze, Duflo, Vergne, Rentschler 1967–73). Für halbeinfaches $\mathfrak{g}$ hat man $\mathfrak{X}^1 \subsetneq \mathfrak{X}$, und man identifiziert $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{g}^*$ (via Killingform). Für $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ kann man eine Abbildung $\mathfrak{g}/G \to \mathfrak{X}^1$ wohl definieren ("Definition einer Dixmier-Abbildung für $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$", Inv. math. (1977)) und zeigen, daß sie injektiv ist (mit Jantzen, Inv. math. 39 (1976)). Ob sie surjektiv (auf $\mathfrak{X}^1$) ist, ist ein offenes Problem. (Richtig für $\mathfrak{sl}_3$, Dixmier 1974). Zum Abschluß wurde ein Ausblick auf den nicht vollprimen Teil des primitiven Spektrums gegeben. Insbesondere wurde eine Vermutung von Jantzen erklärt, welche (basierend auf fundamentalen

Arbeiten von Duflo, Annals 1976) die mengentheoretische Beschreibung von $\mathfrak{X}$ in interessanter Weise auf die Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_n$ zurückführt. Wesentliche Schritte zum Beweis der Vermutung hat in den letzten Monaten A. Joseph geliefert.

W. Borho
SFB 40 Bonn
GHS Wuppertal

(26.6.78)

Geometrie der Hjelmslev-Gruppen

Hjelmslevgruppen sind involutorisch erzeugte Gruppen, in deren Gruppenebene man eindeutig Lote fällen kann und der Satz von den drei Spiegelungen gilt. Es wurde eine Einführung in die Geometrie der Hjelmslevgruppen gegeben. Behandelt wurden u.a. Darstellungssatz, Reduktionssatz, gruppentheoretische Charakterisierung der endlichen Hjelmslevgruppen, Phänomene, die mit dem möglichen Auftreten von Doppelinzidenzen zusammenhängen, Reziprozitätsgesetz, Hjelmslev-Homomorphismen, Nachbarrelationen, Nachbar-Homomorphismus, Austauschsatz, Algebraisierung über Ringen nach E. Salow, Einordnung der 7 Arten projektiv-metrischer Ebenen.

(3.7.78)

F. Bachmann (Kiel)

Paritätsfragen und Ganzheits Normal Basen.

Es wurde eine sachliche und historische Einführung in die in den letzten acht Jahren entdeckten Zusammenhänge zwischen ~~der~~ Paritätsfragen in der algebraischen Zahlentheorie, insbesondere nach dem Wert der Artinschen Wurzelzahlen einerseits und der Galoismodul Struktur der Ringe ganzer Zahlen gegeben. Es wurden Sätze erwähnt, die in Richtung der Hauptvermutung $tW_{N/K} = U_{N/K}$ liegen. Man hat $U_{N/K} = (O_N)$, die Klasse in $Cl(Z\Gamma)$ ($\Gamma = Gal(N/K)$, $O_N = int(N)$), und $W_{N/K}$ ein Homomorphismus, der die Werte der Wurzelzahlen an symplektischen Charakteren wiederspiegelt.

A. Fröhlich, King's College London

(10.7.78)

Topologische Charakterisierung globaler Körper und algebraischer Funktionenkörper in einer Variablen.

Aufbauend auf die Resultate von Mutylin (1966) haben Shanks und Warner 1976 gezeigt, daß jede lokalbeschränkte Ringtopologie auf dem rationalen Zahlkörper $\mathbb{Q}$ speziell ist; dabei soll eine Ringtopologie eines Körpers K speziell heißen, wenn sie diskret oder trivial ist oder wenn für eine nicht leere Menge $\mathcal{S}$ von Bewertungen auf K $\left(a \cdot \{x \in K : \forall \varphi \in \mathcal{S} \ \ \varphi(x) \leq 1\}\right)_{a \in K \setminus \{0\}}$ eine Nullumgebungsbasis ist. Für eine größere Klasse von Körpern wurde ein entsprechendes Resultat von Nichols und Cohen 1977 bewiesen. Wieslaw äußerte 1978 die Vermutung, daß ein entsprechender Satz genau für die Körper gilt, deren vollständige Hülle bzgl. jeder seiner Bewertungen lokalkompakt ist. Diese Vermutung ist nur "in einer Richtung" richtig. Es gibt z.B. unendlich-algebraische Körpererweiterungen von $\mathbb{Q}$, deren vollständige Hülle bzgl. jeder seiner Bewertungen lokalkompakt ist, die aber lokalbeschränkte Ringtopologien besitzen, die nicht speziell sind.

Der wichtigste Satz des Vortrags:

Ein Körper K ist genau dann ein globaler Körper, wenn jede lokalbeschränkte Ringtopologie auf K speziell ist und wenn K außer der trivialen und diskreten Topologie noch weitere lokalbeschränkte Ringtopologien besitzt.

Zusatz: Ein Körper ist genau dann absolut algebraisch, wenn die diskrete Topologie und die triviale Topologie seine einzigen lokalbeschränkten Ringtopologien sind.

Entsprechend gilt:

Eine Körpererweiterung $K|k$ ist genau dann ein algebraischer Funktionenkörper in einer Variablen über k (oder algebraisch), wenn jede lokalbeschränkte Ringtopologie auf K, bzgl. der k beschränkt ist, speziell ist.

Zusatz: Eine Körpererweiterung $K|k$ ist genau dann algebraisch, wenn die diskrete Topologie und die triviale Topologie die einzigen lokalbeschränkten Ringtopologien auf K sind, bzgl. der k beschränkt ist.

20.10.78 Hans Weber (Konstanz)

Über Beiträge von C.F. Gauß zur Numerischen Mathematik

Der Vortrag folgt den Spuren, die Gauß im engen Zusammenhange mit seiner Tätigkeit als Astronom u. Geodät in der Numerischen Mathematik hinterlassen. Ausgehend von der Aufgabenstellung der Numerischen Mathematik u. den hohen wissenschaftlichen Ansprüchen, die man heute an die numerischen Methoden zu stellen hat, wird an ausgewählten Gegenständen gezeigt, wie Gauß diese Ansprüche bereits erkannt u. in welchem Maße er ihnen entsprochen hat. Hervorgehoben wird beispielsweise die Idee der numerischen Stabilität, die er in einem Brief an den Astronomen Bessel ausgesprochen hat. Viele Arbeiten von Gauß werden von der Methode der kleinsten Quadrate beherrscht. Aus einer Vorlesungsnachschrift, die A. Ritter von einer von R. Dedekind noch nach fünfzig Jahren gewürdigten Vorlesung von Gauß angefertigt hat, ist ersichtlich, daß Gauß bereits das quadratische Optimierungsproblem

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \longrightarrow \min, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k + b_j \geq 0, \quad b_j \geq 0, \quad j = 1(1)m > n$$

formuliert u. für seine Lösung einen Algorithmus angegeben hat, der den wesentlichen Zügen dem heutigen reduzierten Gradientenverfahren von WOLFE bzw. dem Verfahren von BEALE entspricht. Von Gauß' Beiträgen zur numerischen linearen Algebra wird vor allem sein Eliminationsverfahren hervorgehoben. Seine „indirekte" Elimination ist als Gauß-Southwell-Relaxation in die Literatur eingegangen. Sie ist eine Vorläuferform des Gauß-Seidelschen Einzelschrittverfahrens. Von seinen Methoden zur Lösung nichtlinearer Gleichungen werden das auf die Fehlerquadratmethode zurückgehende Gauß-Newton-Verfahren u. ein ableitungsfreies Verfahren angeführt, das als eine Diskretisierung des Newton-Verfahrens aufgefaßt werden kann. Gauß hat es für $n=2$ angegeben. Für allgemeines n ist es vom Vortragenden Anfang der 50er Jahre entwickelt worden, unabhängig von ihm 1959 von P. WOLFE. Es ist eine der möglichen Verallgemeinerungen der Regula falsi von Gleichungen im R^1 auf Gleichungen im R^n.

Bezüglich weiterer Beiträge von Gauß zur numerischen Mathematik (Interpolation, numerische Quadratur usw.) muß auf einen Vortrag von R. SCHABACK verwiesen werden.

27.10.78

[illegible] (Dresden)

Zerlegbare Erweiterungen affiner Gruppen

Sei k ein fester Grundkörper. Eine affine Gruppe über k ist ein darstellbarer Funktor $G = k\text{-}Alg(A,-)$ von den k-Algebren in die Gruppen. Eine Folge affiner Gruppen $\mathcal{E}: 1 \to M \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} G \to 1$ mit dualen aff. Algebren $C \xleftarrow{\rho} A \xleftarrow{i} B$ heißt <u>exakt</u>, falls $\iota: M \xrightarrow{\cong} \mathrm{Ke}\,\pi$ und i injektiv ist.

Ist M abelsch, so induziert $\mathcal{E}$ durch innere Automorphismen eine G-Modulstruktur auf M. Auf die übliche Weise ist die Gruppe $Ext(G,M)$ der Erweiterungen von G durch den G-Modul M definiert. Diese Gruppe enthält die Untergruppe $H^2_0(G,M)$ der Hochschild=erweiterungen, für die $E(R) \to G(R)$ stets surjektiv ist, R eine k-Algebra. Im allg. ist $H^2_0(G,M) \subsetneqq Ext(G,M)$, so daß sich nicht jede Erweiterung durch einen 2-Cozyklus beschreiben läßt.

$\mathcal{E}$ heißt <u>zerlegbar</u>, falls ein B-linearer, C-colinearer Isomorphismus $A \cong B \otimes C$ existiert.

Sei $Ext_z(G,M)$ die Gruppe der zerlegbaren Erweiterungen. Dann gilt $H^2_0(G,M) \subset Ext_z(G,M) \subset Ext(G,M)$, und Elemente in $Ext_z(G,M)$ lassen sich durch "Paare von 2-Cozyklen" beschreiben.

Ist $\mathcal{E}$ zerlegbar, so ist insbesondere A als B-Modul frei.

Für die Folge $1 \to {}_n\mu \to SL_n \to PGL_n \to 1$, n gerade, ist A <u>nicht frei</u> als B-Modul.

Die Erweiterung $1 \to \mu \to GL_n \to PGL_n \to 1$ ist nicht zerlegbar, aber A ist B-frei (mit einem Satz von Bass)

Stets ist A B-projektiv (mit einem Satz von Gruson-Raynaud)

Zerlegbare Erweiterungen (in denen M ein beliebiger Normalteiler sein kann) lassen sich charakterisieren.

Als Folgerung erhält man

<u>Satz</u>: M sei trigonalisierbar. In jedem der folg. Fälle ist $\mathcal{E}$ zerlegbar

1) $X(E) \to X(M)$ ist surjektiv (X = Charaktere)

2) $\mathrm{Pic}\, B \to \mathrm{Pic}\, A$ ist injektiv

Spezialfälle von 1): a) M unipotent, b) E trigonalisierbar

" 2): a) k perfekt, G trigon., b) k alg. abg., G auflösbar

<u>Satz</u>: Ist G endlich (oder proendlich), so ist $\mathcal{E}$ zerlegbar

<u>Satz</u>: In jedem der folg. F. ist $\mathcal{E}$ zerlegbar.

1) k perfekt, G trigon.

2) k alg. abg., E zus.h., G auflösbar

Damit ist in allen Fällen, in denen Radford, Takeuchi (1977, 78) gezeigt haben, daß A B-frei ist, sogar (auf anderem Weg) bewiesen, daß $\mathcal{E}$ zerlegbar ist. Außerdem wurden weitere angegeben.

<u>Satz</u>: Sei M G-Modul. Dann gibt es eine ex. Folge von G-Moduln $1 \to M \to M_1 \to M_2 \to 1$, so daß die induzierte Folge exakt ist:

$$0 \to \mathrm{Ex}^0(G,M) \to \mathrm{Ex}^0(G,M_1) \to \mathrm{Ex}^0(G,M_2)$$
$$\to \mathrm{Ext}_z(G,M) \to H^2_0(G,M_1) \to H^2_0(G,M_2).$$

Daraus ergeben sich verschiedene konkrete Anwendungen zur Bestimmung von $\mathrm{Ext}_z(G,M)$, z.B.: G glatt, zus.h., M diag. $\Rightarrow \mathrm{Ext}^1_z(X(M), X(G)) \cong \mathrm{Ext}_z(G,M)$; $\mathrm{Ext}(G, {}_n\mu) \cong X(G) \times H^2_0(G,\mu)$, wobei die endl. Gruppe G der Ordnung n trivial operiert. Schließlich sei als Folg. erwähnt: G endl. von der Ordnung n, k alg. abg. oder M triviales G-Modul $\Rightarrow$ $n^2 \cdot \mathrm{Ext}(G,M) = 0$. Daraus ergibt sich eine Version des Satzes von Schur-Zassenhaus auch für zentrale Erw. endl. Gruppen über bel. Grundring k.

3.11.78 H.-J. Schneider (München)

Mischen von Spielkarten.

Mit den Mitteln der Linearen Algebra wird folgender Satz bewiesen:

Seien t Spielkarten vorgelegt. Ihre möglichen Positionen werden mit den Elementen der symmetrischen Gruppe S_t indiziert. Vorgegeben sei eine „Verteilung" p auf S_t mit

$$p(\sigma) \geq 0, \quad \sum_{\sigma \in S_t} p(\sigma) = 1.$$

Im „elementaren Mischprozeß" wird τ mit Wahrscheinlichkeit $p(\tau)$ gewählt, dann geht die Position σ der Karten in $\sigma\tau$ über. Die Übergangsmatrix dieses stochastischen Prozesses ist

$$A = (a_{\sigma\tau}) \quad \text{mit} \quad a_{\sigma\tau} = p(\sigma^{-1}\tau).$$

A ist doppelt stochastisch und hat neben 1 u.a. den Eigenwert $\sum_{\sigma \in S_t} p(\sigma) \operatorname{sgn} \sigma$.

Wir nennen das Mischverfahren fair, falls gilt

$$\lim_{k \to \infty} A^k = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & & \\ \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \quad \text{mit } n = t!.$$

Setzen wir

$$T = \{\sigma \mid \sigma \in S_t,\ p(\sigma) > 0\},$$ so sind

gleichwertig:

a) Jedes Mischverfahren mit „Trägermenge" T ist fair.

b) T erzeugt S_t. Für alle $k \geq k_0$ gibt es $\pi_i \in T$ mit $\pi_1 \cdots \pi_k = \mathrm{id}$.

c) T erzeugt S_t. Es gibt teilerfremde natürliche Zahlen k, l und

$$\mathrm{id} = \pi_1 \cdots \pi_k = \rho_1 \cdots \rho_l \quad \text{mit } \pi_i, \rho_j \in T.$$

Setzt man $\langle 7 \rangle = \gamma_t$ voraus, so kann man genau angeben, wann $\lim_{k\to\infty} A^k$ nicht existiert. Dies ist genau dann der Fall, wenn $p(\sigma) = 0$ für alle $\sigma \in \gamma_t$ mit $\operatorname{sgn} \sigma = 1$. (Dazu wird der Satz von Perron-Frobenius benötigt, bzw. sein Spezialfall für stochastische Matrizen.)

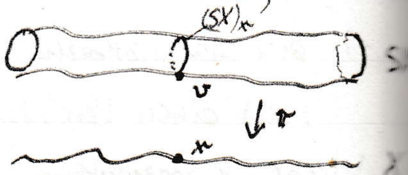
10.11.78 B. Huppert
(Mainz)

13.11.78 : <u>15 Jahre Atiyah-Singer-Indexformel</u>

1963 veröffentlichten M.F. Atiyah und I.M. Singer die berühmte Formel

$$\operatorname{index} P = (-1)^n \int_{SX} \sigma(P)^* \omega \wedge \pi^* \tau \qquad (*)$$

wobei X eine geschlossene orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n ist, SX das Bündel der Differentialformen vom Betrag 1 und



$$P : \begin{pmatrix} C^\infty(X) \\ \vdots \\ C^\infty(X) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} C^\infty(X) \\ \vdots \\ C^\infty(X) \end{pmatrix} \leftarrow \text{N-mal}$$

ein linearer elliptischer Differentialoperator der Ordnung k ist, der sich also in lokalen Koordinaten in der Form

$$Pu(x) = \sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha(x) D^\alpha u|_x \quad ; \; a_\alpha(x) \text{ N×N-Matrix, } D^\alpha \text{ part. Ableitung}, \; x \in X$$

schreiben läßt und ein "Symbol" $\sigma(P) : SX \to GL(N, \mathbb{C})$ besitzt, das für $v = \xi_1 dx_1 + \ldots + \xi_n dx_n \in (SX)_x$ durch

$$\sigma(P)(x,v) = \sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x)\, \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}$$

definiert ist. Man weiß dann, daß Kern P und Kokern P endlich-dimensional sind und ihre Differenz index P nur vom Homotopietyp des Symbols $\sigma(P)$ abhängt. Die linke Seite von $(*)$ ist also eine wohldefinierte ganze Zahl. Auf der rechten Seite handelt es sich bei ω um eine "Weltkonstante", eine alternierende Differentialform auf der Lieschen Gruppe $\mathcal{U}(N)$ der unitären N×N-Matrizen, die (wie die reelle Zahl π) nur von den Krümmungseigenschaften der unitären Gruppe abhängt, während die alternierende Differentialform τ auf X (die "Toddsche Form") durch die Krümmung von X definiert ist. O.B.d.A. kann man wegen der Homotopieinvarianz des Index voraussetzen, daß

$\sigma(P)(SX) \subset \mathcal{U}(N)$ liegt und sich ω damit längs $\sigma(P)$ auf SX ebenso wie τ längs π zurückholen läßt. Damit ist auch der Integrand auf der rechten Seite von $(*)$ definiert – und die Formel wird mit ihren vielfältigen Aspekten und Verallgemeinerungen zu den "tiefsten und härtesten mathematischen Ergebnissen" (Hirzebruch-Zagier) gerechnet.

Im Vortrag wurde versucht

(i) die historischen Quellen und Bestandteile der Indexformel aufzuzeigen, d.h. das "Paradigma der Indexformeln" der Mathematik des 19. und 20. Jh. (Abel, Gauß-Bonnet, Cauchy, Riemann-Roch, Poincaré-Hopf, Lefschetz, E. Noether, Gochberg-Krein, Vekua) und die darin ausgedrückten Wechselwirkungen geometrischer und analytischer Konzepte,

(ii) den – im nachhinein – elementaren Charakter des Bottschen Periodizitäts=satzes und des Indextheorems durch Rückführung auf den shift-Operator als "Prototypen" darzustellen und zwar im Kontext der Konvolutionsoperator auf der Halbachsen,

(iii) einen Vergleich der unterschiedlichen Ansätze zum Beweis der Index=formel vorzunehmen, wobei einerseits der wesentliche Anteil der K-Theorie und der Theorie der Pseudodifferentialoperatoren für den "Kobordismusbeweis", den "Einbettungsbeweis" und den "Wärmeleitungsbeweis" herausgearbeitet wurde, wo=durch man die Indexformel gewissermaßen durch Vorrechnen allein "eines" Beispiels beweisen kann, wohingegen der Fedosov-Hörmander-Beweis durch Einsatz noch härterer analytischer Mittel direkt die Indexformel – ganz ohne K-Theorie – herausrechnen kann und der rein homotopietheoretische Ansatz von Atiyah-Lusztig via poly=nomiale Symbole und Vektorfelder auf Sphären auf die Analysis pseudodiff. Operatoren verzichten kann,

(iv) einen Abriß der weiteren Perspektiven der Indextheorie zu geben, u.a. Brown-Douglas-Fillmore-Theorie, spektrale Asymmetrie und Randwertprobleme, klassische Geometrie der Quantenfeldtheorie und "Quark-Confinement".

B. Booß (Roskilde)

17.11.78

FORD-Kugeln

Wir beginnen mit dem euklidischen Raum $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C}\times\mathbb{R}$. Für $z\in\mathbb{C}$, $d\in\mathbb{R}_+$ bezeichne $B(z,d)$ die Kugel mit Mittelpunkt $\langle z, \frac{d}{2}\rangle$ und Durchmesser d. Es sei $\rho := \frac{1}{2}(1+\sqrt{-3})$, $H := \mathbb{Q}(\rho)$, $L := \{m+n\rho : m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{Z}\}$. H ist ein euklidischer Körper; jedes $z\in H$ kann geschrieben werden als $z=\frac{\alpha}{\beta}$ mit $\alpha\in L$, $0\neq\beta\in L$, $(\alpha,\beta)=1$; $F(z) := B(z,|\beta|^{-2})$ heisst Ford-Kugel zu z oder über z. Es sei $F := \bigcup_{z\in H} F(z)$; verschiedene Kugeln dieser Vereinigung haben keinen inneren Punkt gemeinsam.

Es sei $V_1 := \bigcup_{z\in L} F(z)$. Zu V_1 fügen wir alle (Voll-)Kugeln $B(z,d)$ mit maximalem d derart, dass $B(z,d)$ keine inneren Punkte mit V_1 gemeinsam hat; das ergibt V_2 $(\supseteq V_1)$. So macht man weiter und erhält $V_2, V_3, \ldots$; es sei $V := \bigcup_{m\geq 1} V_m$. <u>Satz 1.</u> Es ist $F=V$. Der Beweis benutzt sehr spezielle Eigenschaften von H.

Für $\eta\in\mathbb{R}_+$ bezeichne $D(\eta)$ das Dreieck mit den Ecken $\langle 0,\eta\rangle$, $\langle 1,\eta\rangle$, $\langle\rho,\eta\rangle$; es bezeichne $r(\eta)$ den Flächeninhalt von $D(\eta)\cap V$; der Flächeninhalt von $D(\eta)$ ist $\frac{1}{2}\sqrt{3}$; daher sei $r^*(\eta) := \frac{2r(\eta)}{\sqrt{3}}$. <u>Satz 2.</u> Für $0<\eta<1$ gilt $r^*(\eta) = \frac{3}{2L(2)} + O(\sqrt{\eta})$, wobei $L(s)$ die L-Funktion ist zum Nichthauptcharakter mod 3. Es ist $\frac{2}{3L(2)} \approx 0{,}85$.

Ein Analogon zu Satz 1 für $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ gilt nicht.

(Die Einzelheiten finden sich bald im Journal für die reine und angewandte Mathem.)

G. J. Rieger, Hannover

1.12.78 Ein algebraischer Aspekt der Riccatischen Differentialgleichung

Die Riccatische Differentialgleichung $\frac{\partial x}{\partial \xi} = v(\xi)x^2 + w(\xi)$, $v, w : I \to K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ stetig, gegeben in dem K-Intervall I, $x(\xi,\eta)$ gesucht sodaß x als Funktion von ξ die Differentialgleichung löst und im Pkt $\eta \in I$ den gegebenen Wert $x(\eta,\eta) = k \in K$ hat, läßt sich nicht nur zur sogenannten „Matrix-Riccati-Diffgl" verallgemeinern. Das wird besprochen, und zwar im Rahmen der Jordan-Paare (Bezeichnungen wie in den Springer lecture notes von O. Loos, Jordan-pairs, 1975). Ein Jordan-Paar besteht aus einem Paar (V^+, V^-) von K-Vektorräumen, zusammen mit quadratischen Abbildungen $Q_+(x)$, $Q_-(x)$ und gewissen Axiomen genügt. Eine Jordan-Algebra A führt zu einem Jordan-Paar (A, A) indem man $Q_+(x) = Q_-(x)$ definiert durch

$$Q(x)y = 2x(xy) - x^2 y .$$

Seien V^+, V^- Banachräume über $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, die quadr. Darst. Q seien stetig. Für ein K-Intervall I, $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, gebe man stetige Funktionen $v : I \to V^-$, $w : I \to V^+$ und ein $k \in V^+$ vor. Unter einer Riccatischen Differentialgleichung verstehe man

$$(*) \qquad \frac{\partial x}{\partial \xi} = Q_+(x)v(\xi) + w(\xi) ,$$

wobei $x : I \times I \to V^+$ so gesucht ist, daß $x(\eta,\eta) = k$ für den festen Anfangspkt η. Bedeutet V^+ (V^-) den Vektorraum der $m \times n$-($n \times m$-) Matrizen mit Elementen aus K und wird $Q_+(x)$ definiert durch $Q_+(x)y = xyx$ für $x \in V^+$, $y \in V^-$, dann handelt es sich um die Matrix-Riccati-Gleichung $\frac{\partial x}{\partial \xi} = xvx + w$. Es wird angegeben, wie sich Sätze über die Matrix-Riccati-Gl. auf die Differentialgleichung $(*)$ übertragen und an welchen Stellen Schwierigkeiten auftreten.

Hel Braun, Hamburg.

6-12-1978 A. M. Mathai

The talk will be concerned with some new developments in functions of matrix arguments and the applications of these functions in the field of Statistics. In statistical problems, especially in the area of non-null distributions of test statistics, functions of matrix arguments play a vital role. In comparing statistical tests by using power comparisons one needs the distributions of test statistics when the hypotheses are not assumed to be true. These distributions are known as non-null distributions. The null distributions are the distributions of test statistics when the null hypothesis is assumed to be true. As an illustration, consider the likelihood ratio test for testing the hypothesis of sphericity in the multinormal case. That is, the $p\times 1$ vector X is assumed to have a p-variate normal distribution $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$ and the hypothesis is $H_0: \Sigma = \sigma^2 I$ where σ^2 is an unknown scalar and I is the identity matrix. The likelihood ratio test λ for testing this hypothesis turns out to the following

$$U = \lambda^{2/N} = |S| \Big/ \left(\frac{\mathrm{tr}\, S}{p}\right)^p$$

where N is the sample size, $\mathrm{tr}\, S$ is the trace of S, $|S|$ is the determinant and $S = (s_{ij})$, $s_{ij} = \sum_{k=1}^{N} (x_{ik} - \bar{x}_i)(x_{jk} - \bar{x}_j)$, that is, S is the usual sums of products matrix having the Wishart distribution $W_p(n, \Sigma)$, $n = N-1$. The Wishart density is given by

$$f(S) = \frac{|S|^{\frac{n}{2} - \frac{p+1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\Sigma^{-1} S}}{2^{\frac{np}{2}} |\Sigma|^{n/2} \Gamma_p(\frac{n}{2})}, \quad S > 0$$

where $\Gamma_p(\alpha) = \pi^{p(p-1)/4} \Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha - \frac{1}{2})\Gamma(\alpha - 1) \cdots \Gamma(\alpha - \frac{p-1}{2})$

One method of getting the density of U is through the Mellin and inverse-Mellin transform technique. That is, we find the h-th moment of U, which can be evaluated by with the help of $f(S)$ since U is a function of S, then invert the moment expression to get the density. The h-th moment of U, that is, EU^h is given by

$$EU^h = \int_{S>0} U^h f(S)\,dS$$

where the integration is over the positive definite symmetric matrices S. After some manipulation one can get EU^h in the form of a Lauricella's hypergeometric function of several variables. Then by inverting it we get the non-null density of U as a multiple series involving Meijer's G-functions. Thus the $f(S)$ above is one example of a function of matrix argument. Then ~~the~~ general theory is developed by defining a generalized gamma function first. That is we define,

$$\Gamma_p(\alpha) = \int_{S>0} |S|^{\alpha - \frac{p+1}{2}} e^{-\frac{1}{2}S}\, dS \quad \text{for } R(\alpha) > \tfrac{p+1}{2} - 1, \; S = S'$$

This integral can be evaluated by using the transformation $S = TT'$ where T is lower triangular then $dS = 2^p \prod_{i=1}^{p} t_{ii}^{p+1-i}\, dT$. By this transformation the integral splits into p factors of the gamma type and $p(p-1)/2$ factors of the exponential type which when evaluated yield
$\pi^{p(p-1)/4}\, \Gamma(\alpha)\, \Gamma(\alpha - 1/2)\, \Gamma(\alpha - 1) \cdots \Gamma(\alpha - \frac{p-1}{2})$.

Now the beta and hypergeometric functions of matrix arguments are defined with the help of a generalized matrix transform $M_f(\alpha) = \int_{A>0} |A|^{\alpha - \frac{p+1}{2}} f(A)\, dA$. The definition can be extended to cover higher special functions such as G and H-functions. Thus the theory of functions of scalar argument can be extended to that of functions of matrix arguments. These have many applications which may be seen from the books A.M. Mathai & R.K. Saxena Generalized Hypergeometric Functions ... (Springer-Verlag, 1973, Lecture Notes No 348) and The H-functions with Applications Wiley Halsted New York and Wiley Eastern New Delhi, 1978.

A. M. Mathai, Montreal, Canada.

8.12.78 Gittermodele in der gleichgewicht Statistischen Mechanik

Das Ising Modell in zwei Dimensionen beschreibt Phasenübergänge. Solche Phasenübergänge sind in der Physik interessant. In der letzten Zeit hat sich gezeigt, daß auch andere Modelle: die sog. Modelle mit stetigem Spin in der Physik interessant sind. Eine Konfiguration eines solches Modell mit stetigem Spin ist eine Abbildung

$$\Sigma : \Lambda \to R^{|\Lambda|}$$

wo Λ eine beschränkte Teilmenge von Z^2 ist, $|\Lambda|$ die Anzahl von Elemente in Λ. Man definiert eine Funktion auf Σ die 'Energie' heißt:

$$H(\Sigma) = - \sum_{\substack{|i-j|=1 \\ i,j\in\Lambda}} q_i q_j + P_\Lambda(q)$$

wobei $P_\Lambda(q) = \sum_{i\in\Lambda} P(q_i)$. Das Modell ist mit Hilfe des Wahrscheinlichkeitsmaßes auf $R^{|\Lambda|}$

$$d\mu(q) = \frac{e^{-H(\Sigma)} \prod_{i\in\Lambda} dq_i}{\int e^{-H(\Sigma)} \prod_{i\in\Lambda} dq_i}$$

definiert. Wenn $A(q)$ eine Funktion von $q_i \in \Lambda$ ist betrachtet man Mittelwerte der Form

$$\langle A \rangle_\Lambda = \int A(q)\, d\mu(q)$$

Man interessiert sich für thermodynamische Grenzwerte $\Lambda \to \mathbb{R}^2$, Phasenübergänge aber auch für Eigenschaften von $\langle A \rangle$ als Funktion von λ wobei in $H(\Sigma)$ $P(q)$ durch $\lambda P(q)$ ersetzt wird (P ist ein Polynom z.B. positiv). Mit Hilfe von Entwicklungen vom Typ Klusterentwicklung untersucht man Eigenschaften von A als Funktion von der komplexen Variable λ.

F. Constantinescu
Universität Frankfurt

15/12/78 Smooth Actions of Finite Groups on Homotopy Spheres

Ted Petrie

Let G be a finite group acting smoothly on a manifold M and $p \in M^G = \{x \in M \mid gx = x \text{ for } g \in G\}$. Then there is a representation of G on T_pM the tangent space of M at p. What can one say about the set of representations $\{T_p\Sigma \mid p \in \Sigma^G\}$ when $M = \Sigma$ is a homotopy sphere? Let $R(G)$ denote the (complex) representation ring of G and $\hat{R}(G)$ its completion with respect to the augmentation ideal. Let $I = \ker(R(G) \to \hat{R}(G))$. It is not hard to see that

$$T_p\Sigma - T_q\Sigma \in I \text{ if } p, q \in \Sigma^G, \ \Sigma \text{ a homotopy sphere.}$$

__Theorem__ Let G be an odd order abelian group having at least 4 non cyclic Sylow subgroups and let $\xi \in I$. Then $\exists$ a smooth action of G on a homotopy sphere Σ with $\Sigma^G = p \cup q$ (2 points) and $T_p\Sigma - T_q\Sigma = \xi$.

This should be compared with this theorem of Atiyah-Bott-Milnor Annals of Math 1968:

Theorem ABM. Let G be a compact Lie Group acting smoothly on a homotopy sphere $\Sigma \ni \Sigma^G = p \cup q$ (2 points) and such that G acts __freely__ on $\Sigma - \Sigma^G$ then $T_p\Sigma - T_q\Sigma = 0$ ie the representation are equal.