Wir zeigen wie in den letzten Jahren Methoden und Ergebnisse aus der Codierungstheorie benutzt sind um zu versuchen Probleme aus der Theorie der endlichen projektiven Ebenen zu lösen.

Für ein linearen Code C mit duale $C^{\perp}$ betrachtet man $A(\xi,\eta)$ und $A^{\perp}(\xi,\eta)$ wo $A(\xi,\eta) = \sum A_i \xi^i \eta^{n-i}$ und A_i die Anzahl der Wörter vom Gewicht i ist. Der Satz von MacWilliams besagt: (1) $A^{\perp}(\xi,\eta) = q^{-k} A(\eta-\xi, \eta+(q-1)\xi)$ wenn C ein (n,k)-Code ist.

Sei jetzt A die Inzidenz Matrix einer hypothetischen proj. Ebene der Ordnung 10. Die Zeilen von A erzeugen einen Code C mit $\bar{C} = \bar{C}^{\perp}$, d.h. $\dim \bar{C} = 56$. Für diese Code haben Thompson u.a. gezeigt dass $A_{15} = 0$. Wenn noch zwei andere A_i (klarerweise ist $A_i = 0$ für $1 \le i \le 10$) bekannt wäre könnte man aus (1) $A(\xi,\eta)$ berechnen und vielleicht zeigen dass die Ebene nicht existiert.

Es ist gezeigt dass aus $\bar{C}$ die Ebene zurückgefunden werden kann. Sei jetzt B die Inzidenz Matrix von einem Blockplan 2-(56,11,2) (es sind schon 4 nicht isomorphe bekannt!). Da generiert $(I_{56}\ B)$ einen Code mit den gleichen Parameter wie $\bar{C}$. Leider ist für die 4 bekannten Beispiele dieser Versuch um "$PG(2,10)$" zu finden nicht gelungen.

Zum Schluss berichten wir über neue partielle Geometrien die mit Hilfe von bekannten Codes konstruiert worden sind. Hier ist noch viel unbekannt. Für Anwendungen in der Gruppentheorie kann diese Methode noch nützlich sein.

(11.1.80) J.H. van Lint (Eindhoven)

18. 01. 1980. Endlichkeitssätze für isometrische Strukturen mit Anwendungen in der Knotentheorie.
E. Bayer, Genf

Ein Knoten ist eine glatte, orientierte Untermannigfaltigkeit $K^n \subset S^{n+2}$, so daß K^n ist homeomorph mit S^n.
Man betrachtet den Fall $n = 2q-1$, $q > 1$. Man kann dann zu eine Seifertsche Fläche M^{2q} von K^{2q-1} eine Seifertsche Form $A : H_q(M,\mathbb{Z})/_{\text{Torsion}} \times H_q(M,\mathbb{Z})/_{\text{Tors}} \to \mathbb{Z}$ zuordnen. Falls K^{2q-1} einfach ist, (das heißt $\pi_i(S^{2q+1} \setminus K^{2q-1}) \cong \pi_i(S^1)$ $i < q$) dann existiert nach Sätze von Levine und Trotter eine Seifertsche Fläche M^{2q} für K^{2q-1} mit $\pi_i(M^{2q}) = 0$ $i \leq q-1$ und mit $\det(A) \neq 0$. Eine solche Fläche heißt minimale Seifertsche Fläche.

Frage 1 (Trotter): Wieviel Isotopieklassen von minimale Seifertsche Flächen hat ein gegebener Knoten K^{2q-1}?

Um diese Frage beantworten zu können, braucht man einige Invariante, nämlich

$$n = \operatorname{Rang}_{\mathbb{Z}} H_q(M^{2q})$$

$$\varphi = \text{Minimalpolynom von } (A + (-1)^q A^t)^{-1} A$$

$(\det(A + (-1)^q A^t) = \pm 1$: Poincaré Dualität$)$

Satz 1:

K^{2q-1} hat nur endlich viele Isotopieklassen von minimale Seifertsche Flächen $\Longleftrightarrow$ φ hat keinen mehrfachen Faktor mit konstanten Term > 1.
$\Longrightarrow$ ist ein Satz von Trotter

Frage 2 Wieviel einfache Knoten gibt es (bis auf Isotopie) mit Invarianten n und φ?

Satz 2: (E. B., F. Michel)

Es gibt nur endlich viele Isotopieklassen von einfache $(2q-1)$-Knoten mit Invarianten n, φ $\Longleftrightarrow$ φ hat keinen mehrfachen Faktor.

Diese Sätze beweist man mit algebraische Methoden:

M_1, M_2 sind isotop $\Longleftrightarrow$ $(S_1, z_1) \cong (S_2, z_2)$

K_1, K_2 sind isotop $\Longleftrightarrow$ (S_1, z_1) und (S_2, z_2) sind S-äquivalent

wobei $S_i = A_i + (-1)^q A_i^t$, $z_i = S_i^{-1} A_i$

<u>Definition:</u> (U, S, z) ist ein isometrisches Struktur, falls

- $U \cong \mathbb{Z}^n$
- $S : U \times U \to \mathbb{Z}$ ist $\mathbb{Z}$-bilinear, $(\varepsilon = \pm 1)$ ε-symmetrisch, nicht ausgeartet
- $S(zu, v) = S(u, (1-z)v) \quad \forall u, v \in U$

Man sieht leicht daß $(S = A + (-1)^q A^t,\ z = S^{-1}A)$ ist ein isometrisches Struktur.

Um die Endlichkeitssätze zu beweisen, im Fall φ irreduzibel, man ordnet zu jedes isometrisches Struktur ein ε-hermitesche Form zu, und man beweist

<u>Lemma:</u> es sei $\Lambda = \mathbb{Z}[x]/(\varphi)$, mit Involution $x \mapsto 1-x$, es sei U ein $\mathbb{Z}$-torsion freies Λ-Modul, von endlichen Rang, es sei $D \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Es gibt nur endlich viele Isomorphismenklassen von ε-hermitesche Formen $B : U \times U \to \Lambda$ so daß $ad(B)(U) \supset \mathrm{Hom}_\Lambda(U, D \cdot \Lambda)$

wobei $ad(B) : U \to \mathrm{Hom}_\Lambda(U, \Lambda)$

$x \longmapsto B(x, \ )$

Eva Bayer

Dicke Inzidenzstrukturen für einige sporadische Gruppen.

Für die sporadischen Gruppen M_{24}, $Co1$ und F_1 wurden dicke Inzidenzstrukturen konstruiert, sodaß die Gruppen transitiv auf den max. Fahnen operiert. Der Zusammenhang zwischen diesen Gruppen und ihren Inzidenzstrukturen und zwischen den Chevalley-Gruppen und ihren Gebäuden scheint recht eng. Ist B der Stabilisator einer max. Fahne, so enthält B eine 2-Sylowgruppe von G und $B/O_2(B) \simeq S_3$. Außerdem ist die Abbildung, die jeder Fahne ihren Stabilisator zuordnet, eine Bijektion des Fahnencomplexes von $\mathcal{J}$ auf die Menge aller Untergruppen von G, die ein Konjugiertes von B enthalten, die außerdem die Inklusion umdreht. Insofern zeigen die B^g, $g \in G$ enthaltenden Untergruppen ein ähnliches Verhalten wie parabolische Untergruppen in Chevalley-Gruppen.

Die Frage, ob möglicherweise das Verhalten dieser sporadischen Gruppen daher rührt, daß sie auf einem "natürlichen" $GF(2)$-Modul operieren, wurde gestellt. Man kann zeigen, daß man den 24 dimensionalen $GF(2)$-Modul für $Co1$ auf eine analoge Weise wie die natürlichen Moduln für $A_n(2)$, $C_n(2)$, $D_n(2)$ bzw. ${}^2D_n(2)$ erhält.

Franz Timmesfeld

25. 1. 80

Fast-Primzahlen in kurzen Intervallen.

Für die Existenz von Primzahlen bzw. Fastprimzahlen ($P_r = n \Leftrightarrow \Omega(n) \le r$) in einem Intervall der Form $x - x^\theta \dots x$ gilt nach Heath-Brown, Iwaniec und Jutila $\theta \le 0.55$ bei Primzahlen. Für P_2's wird in einer gemeinsamen Arbeit mit H. Halberstam und R. Heath-Brown $\theta \le 0.4548$ (erscheint in den Proceedings vom Durham-Colloquium, 1979) gezeigt. Neue Hilfsmittel beim Beweise sind 1. Verbesserte Siebgewichte, 2. Verbessertes Restgliedvorgehen nach Iwaniec, 3. Verschärfung der van der Corput-Methode nach Heath-Brown und H. Maier, 4. Mittelbildung der Restglieder nach Chen (Scientia Sinica 1975).

(1.2.80) H.-E. Richert

Ein Maximumprinzip für Systeme nichtlinearer elliptischer Differentialgleichungen mit Anwendungen auf harmonische Abbildungen Riemannscher Mannigfaltigkeiten.

Seien $u_i : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ beschränkt, offen, eine Lösung des Systems

$$\Delta u = f(\cdot, u, \nabla u)$$

im klassischen Sinn. Die rechte Seite habe quadratisches Wachstum im Gradienten. Es werden Bedingungen angegeben für die Gültigkeit einer Abschätzung der Gestalt

$$|u_1 - u_2| \le c \sup_{\partial\Omega} |u_1 - u_2| .$$

Es muß eine Lipschitzbedingung an f und eine quantitative Einschränkung an die Bilder $u_i(\Omega)$ erfüllt werden. Die erhaltenen Ergebnisse sind im gewissen Sinne optimal und lassen sich auf harmonische Abbildungen

von Riemannschen Mannigfaltigkeiten übertragen. Dort erhält man folgendes optimale Ergebnis
Sei M eine zusammenhängende kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit, $\partial M \neq \phi$, N sei vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, $\partial N = \phi$, $\varkappa > 0$ sei eine Schranke für die Schnittkrümmung von N. Seien u_i harmonische Abbildungen von M in N; $B_R(a)$ die geodätische Kugel um $a \in N$ mit Radius R; Sei $u_i(M) \subset B_R(a)$; $B_R(a)$ erfülle die Schnittortbedingung. Dann gilt mit einer von u_i unabhängigen positiven Zahl

$$d_N(u_1, u_2) \leq c \sup_{\partial M} d_N(u_1, u_2)$$

falls $\quad R < \frac{\pi}{2\sqrt{\varkappa}}$.

Dieses Ergebnis ist ebenfalls optimal. Einige Anwendungen auf die Existenztheorie und Störungstheorie werden diskutiert.

8. 2. 1980

Wolf Jäger

The basic ideas of analytic number Theory can be traced to Riemann's fundamental paper on The zeta function

$$\Lambda(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\tfrac{s}{2}) \zeta(s).$$

In my work I have used These ideas of Riemann to study The analytic properties of The Euler products associated with automorphic forms on GL_2. I will explain what These new results are in Terms of a well known example : The Ramanujan modular form.

Let

$$\Delta = q \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n.$$

It has been known for some time That

1. $\tau(m \cdot n) = \tau(m)\tau(n)$, $(m,n) = 1$;

1'. $\zeta_\Delta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) n^{-s} = \prod_p \frac{1}{1-\tau(p)p^{-s}+p^{11-2s}}$ (Mordell)

2. $\Lambda_\Delta(s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)\zeta_\Delta(s)$ is entire (Hecke - Mordell)

3. Critical Strip : $\Lambda_\Delta(\rho)=0 \Rightarrow \frac{11}{2} \leq Re(\rho) \leq \frac{13}{2}$ (Hardy's Observation)

4. $\Lambda_\Delta(\frac{13}{2}+it) \neq 0$, all real t (Rankin).

5. Explicit formula (Moreno 1972)

$$\sum_{p^\alpha \leq x} \tau(p^\alpha)\log p = -\sum_{\substack{\rho \\ \Lambda_\Delta(\rho)=0}} \frac{x^\rho}{\rho} - \left(\log x + \frac{1}{2}\frac{\zeta_\Delta^{(2)}(0)}{\zeta_\Delta^{(1)}(0)}\right) - S_\infty(x),$$

where $S_\infty(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{x^{\lambda_1-2n}}{\lambda_1-2n} + \frac{x^{\lambda_2-2n}}{\lambda_2-2n} \right\} = O(x^{\frac{11}{2}}\log x)$.

In the proofs of the above results one does not need the estimate $|\tau(p)| < 2p^{\frac{11}{2}}$ (Deligne) and hence can be applied to other automorphic forms, for example real analytic cusp forms. We have

Th (L.N.M. no 626 (1976)). Let φ be an automorphic representation of $GL_2(F_A)$, with associated L-function $\Lambda_\varphi(s)$. Then $\Lambda_\varphi(s)$ has the properties 1.-5. above.

These types of results can be used to prove analogues of the prime number theorem, namely

I. $$\sum_{p \leq x} \tau(p)\log p = O\left(x^{\frac{13}{2}} e^{-c\sqrt{\log x}}\right)$$

II $$\sum_{p \leq x} \tau(p)^2 \simeq c_\Delta \cdot x^{12}$$

A generalization of the explicit formula (5.) above leads to a proof of an Effective Multiplicity One Theorem for GL(2):

Th If $\pi = \otimes_v \pi_v$ and $\pi' = \otimes_v \pi_v'$ are automorphic representations of $GL_2(F_A)$ of conductor $\leq N$, then there is an effectively computable constant $c = C(\pi_\infty, \pi_\infty')$ such That

$$\pi_v \sim \pi_v' \text{ (equivalent) for all } v \leq N^c,$$

Then $\pi_v \sim \pi_v'$ for all v.

Carlos J. Moreno
IHES + Univ. of Illinois (2-15-80).

6. 3. 1980 Schlichte analytische Funktionen und die Teichmüllersche Theorie

In den letzten zehn Jahren ist die klassische Theorie der schlichten analytischen Funktionen von der Theorie der Teichmüller-Räume beeinflusst worden. Hiebei spielt das folgende Problem eine zentrale Rolle: Es sei f meromorph in einem einfach zusammenhängenden Gebiet A der Ebene. Es gilt, die Abweichung von f von einer Möbius-Transformation zu messen.

Falls f in der ganzen Ebene eine quasikonforme Abbildung ist mit komplexer Dilatation μ, so ist die Norm $\|\mu\|_\infty$ ein Mass für diese Abweichung: $\|\mu\|_\infty = 0$ genau dann, wenn f eine Möbius-Transformation ist, und falls $\|\mu\|_\infty$ klein ist, so verhält sich f in fast allen Punkten der Ebene beinahe wie eine konforme Abbildung. Ein anderes Mass ist die Schwarzsche Ableitung S_f von f. Ist $\|S_f\| = \sup |S_f(z)|\,\eta(z)^{-2}$, wo η die Dichte der Poincaréschen Metrik von A ist, so gilt $\|S_f\| = 0$ genau dann, wenn f eine Möbius-Transformation ist.

Die zwei Zahlen $\|\mu\|_\infty$ und $\|S_f\|$ hängen voneinander ab. Erstens, falls f eine quasikonforme Abbildung der Ebene ist mit komplexer Dilatation μ und $f|A$ ist konform, so gilt $\|S_{f|A}\| \leq 12\|\mu\|_\infty$. Umgekehrt, sei A ein quasi-Kreisgebiet, d.h. das Bild einer Kreisscheibe unter einer quasikonformen Abbildung der Ebene. Dann gibt es eine Konstante $\varepsilon > 0$ mit der folgenden Eigenschaft: Falls $\|S_f\| < \varepsilon$, so ist f schlicht in A und kann auf eine quasikonforme Abbildung der Ebene erweitert werden mit $\|\mu\|_\infty \leq \|S_f\|/\varepsilon$

(Ahlfors 1963).

Die obigen Resultate geben Anlass, die folgenden drei Gebietskonstanten einzuführen: $\sigma_1(A) = \|S_f\|$, wo f eine konforme Abbildung von A auf ein Kreisgebiet ist, $\sigma_2(A) = \sup\{\|S_f\| \mid f \text{ schlicht in } A\}$, $\sigma_3(A) = \sup\{a \mid \|S_f\| \le a \Rightarrow f \text{ schlicht in } A\}$. Dann ist $0 \le \sigma_1(A) \le 6$, und es gilt für jedes A, dass $\sigma_2(A) = \sigma_1(A) + 6$. Für Kreisgebiete ist $\sigma_3(A) = 2$ (Nehari und Hille 1949), und $\sigma_3(A) > 0$ dann und nur dann, wenn A ein quasi-Kreisgebiet ist (Ahlfors 1963 und Gehring 1977).

Es sei $Q = \{\varphi \text{ holomorph in } A \mid \|\varphi\| < \infty\}$, $U = \{\varphi = S_f \mid f \text{ schlicht in } A\}$ und $T = \{S_f \in U \mid f$ kann auf eine quasikonforme Abbildung der Ebene erweitert werden$\}$; T ist der universelle Teichmüller-Raum. Das Resultat $\sigma_3(A) > 0 \Leftrightarrow A$ quasi-Kreisgebiet ist gleichbedeutend mit $T = \operatorname{int} U$. Im Jahre 1978 löste Gehring ein berühmtes Problem von Bers, indem er zeigte, dass die abgeschlossene Hülle von T eine echte Teilmenge von U ist. Der Rand von T ist daher noch teils unbekannt, und es ist auch eine offene Frage, ob U zusammenhängend ist.

Olli Lehto

Universität Helsinki

Solitone, Symmetrien und Erhaltungssätze bei nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen

Nach einer kurzen Einführung in die Geschichte der KdV und der inversen Streumethode wird – ausgehend vom Lax-Paar für die KdV – eine vollständige Beschreibung der Multi-soliton-Lösungen der KdV mit Hilfe der Methode des spektralen Gradienten gegegeben. Die anschließende Beobachtung, daß die Transponierte des Eigenwertoperators des spektralen Gradienten starke Symmetrie der Hierarchie der KdV ist führt zur Untersuchung der strukturellen Gründe für diese Tatsache und zur Definition der hereditären Symmetrie. Als Hauptergebnis wird gezeigt, daß hereditäre Symmetrien starke Symmetrien der von ihnen erzeugten Hierarchien sind. Der Zusammenhang mit kompatiblen Inversen von Symplektomorphismen wird erläutert.

B. Fuchssteiner

1. 4. 80 Paderborn

Lokale Klassifikation von Quotienten von C^∞-Mannigfaltigkeiten nach eigentlich diskontinuierlichen Automorphismengruppen.

Der Quotient einer komplexen Mgf. nach einer eigentl. disk. Automorphismengruppe ist ein komplexer Raum, lokal hat er die Gestalt $Q_G(\mathbb{C}^n)$, wobei $Q_G = (Q_1, \ldots Q_r)$ homogenes Erzeugendensystem von $S_n(\mathbb{C})^G$ ist. Dasselbe gilt (nach Jung, Schwarz, etc.) auch für C^∞-Mgfn. Die Quotienten sind differenzierbare Räume, die lokale Darstellung ist analog.

Es gilt der Satz: Lokal sind die Quotienten $\mathbb{R}^n/G$, $\mathbb{R}^n/H$, wo $G, H < O(n)$ endlich, genau dann isomorph, wenn G konjugiert zu H.

Der Beweis zerfällt in 3 Teile:

1) G spiegelungsfrei. Dann folgt die Beh. aus einem Satz von M. Artin.
2) G Spiegelungsgruppe: Unter Ausnutzung der Stratifiziertheit der Quotienten wird dies mit einem Satz von Witt bewiesen.
3) G weder noch: G zerfällt in $N_G \cdot K_G$: N_G Spiegelungsgruppe, $N_G \trianglelefteq G$, und K_G spiegelungsfrei. Mit etwas Kenntnis über Permutationsgruppen und der Stratifiziertheit folgt die Beh. per Induktion.

25.4.80 Rainer Strub

Rainer

Qualitatives Verhalten kompakter Blätterungen

In Anlehnung an G. Reebs Terminologie heißt ein kompaktes Blatt F einer Blätterung stabil, wenn jede Umgebung von F eine Umgebung (von F) enthält, die Vereinigung von Blättern ist (dies entspricht dem Begriff der orbitalen Stabilität bei dynamischen Systemen). Eine kompakte Blätterung, d.h. eine Blätterung, deren Blätter alle kompakt sind, heißt stabil, wenn jedes ihrer Blätter stabil ist. Die Struktur stabiler C^r-Blätterungen, $r \geq 1$, ist besonders einfach. Sie sind Seifertsche Faserungen, d.h.: jedes Blatt besitzt eine Umgebung $\mathcal{U}$, so daß nach Übergang zu einer endlichen Überlagerung $\hat{\mathcal{U}}$ von $\mathcal{U}$, die auf $\hat{\mathcal{U}}$ induzierte Blätterung ein (lokal-triviales) Faserbündel ist. Wir diskutieren eine von Epstein-Rosenberg aufgeworfene Frage, inwieweit die Bedingung $H^1(F;\mathbb{R})=0$ für gewisse Blätter F einer kompakten Blätterung $\mathcal{F}$ garantiert, daß $\mathcal{F}$ eine Seifertsche Faserung ist. Epstein u. Rosenberg verlangten $H^1(F;\mathbb{R})=0$ für die typischen Blätter von $\mathcal{F}$. An einem Beispiel zeigen wir, daß die Topologie d. typischen Blätter keinen Einfluß auf das Verhalten von $\mathcal{F}$ hat. Man kann aber zeigen, daß die Forderung $H^1(F;\mathbb{R})=0$ an untypische Blätter (d.h. Blätter mit nicht trivial geblätterten Umgebungen) zumindest in niedriger Kodimension Wohlverhalten erzwingt: es gilt

(1) $\mathcal{F}$ sei kompakte C^1-Blätterung der Kodimension ≤ 3. Dann ist $\mathcal{F}$ stabil oder es gibt ein unstabiles Blatt F und eine endliche reguläre Überlagerung $p: \tilde{F} \to F$ mit $H^1(\tilde{F};\mathbb{R}) \neq 0$

(2) $\mathcal{F}$ sei kompakte C^1-Blätterung der Kodimension ≤ 4 auf einer <u>kompakten</u> Mannigfaltigkeit. Dann ist $\mathcal{F}$ stabil, oder $\mathcal{F}$ enthält ein unstabiles Blatt F mit endlicher reg. Überl. $\tilde{F}$, so daß $H^1(\tilde{F};\mathbb{R}) \neq 0$.

Die Bedingungen an die Kodimension sind durch den Beweis verursacht; es ist nicht klar, ob (1) nicht schon für beliebige Kodimension gilt. Man könnte (mit unserem Beweis) in (1) Kodimension $\leq p$ einsetzen, wenn folgendes wahr wäre. Ist $H \subset SO(p+1)$ eine endlich präsentierbare, unendliche Untergruppe, dann existiert eine Untergruppe $K \subset H$ von endlichem Index mit $H^1(K;\mathbb{R}) \neq 0$, d.h. (hier) $K/[K,K]$ ist unendlich. Diese Aussage ist in $SO(2)$ trivial richtig, nach Ergebnissen von Margulis aber falsch für $SO(3)$.

(3) $\mathcal{F}$ sei kompakt, C^1 und nicht stabil. Dann existiert ~~ein~~ für jedes nichtstabiles Blatt F eine Operation von $\pi_1 F$ auf $\mathcal{E}(p)$, der abelschen Gruppe der Keime in 0 von C^1-Abb. $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $p = \text{Kodim}\, \mathcal{F}$, so daß $H^1(F;\, \mathcal{E}(p)) \neq 0$.

2.5.80 E. Vogt (Berlin)

Bounds for the Fitting length of a finite group

Let $\ell(G)$ denote the Fitting (or nilpotent) length of a finite soluble group G. In 1969 Dade proved a conjecture of Thompson that if n denotes the composition length of a Carter subgroup C of G then

$$\ell(G) \leq f(n) = 10(2^n - 1) - 4n$$

An attempt to dualize this theorem would involve bounding $\ell(G)$ by some function of a suitable invariant of a nilpotent injector of G. In view of the fact that $\ell(G)$ is bounded as a function of $\max\{d_p : d_p = \text{minimal number of generators of a Sylow } p\text{-subgroup of } G\}$ (see P.L.M.S. (3), 33 (1976), 329–360) the natural candidate for the invariant is $d(E)$, the minimal number of generators of a nilpotent injector E of G.

Theorem 1: Let $O_{p'}(G) = 1$ and let $P \in Syl_p(G)$. If there exists a function f_1 independent of p s.t. $\ell(G) \leq f_1(d(P))$, then there exists a function f_2 s.t. $\ell(H) \leq f_2(d(E))$ for all groups H and nilpotent injectors of H.

Theorem 2: Let $G = KP$ with $K \trianglelefteq G$, $K \cap P = 1$, $P \in Syl_p(G)$. Let V be a $\mathbb{Z}_p G$-module which is faithful for K and suppose that there exists a function f_3 such that

$$\ell(K) \leq f_3(\dim(V/[V,P])).$$

Then a function f_1 as in Theorem 1 exists.

Theorem 3: For $p = 2$, such a function f_3 exists. Thus there is good evidence that $\ell(G)$ is bounded in terms of d(nilpotent injector)

9.2.80 T.O. Hawkes

Das Basisproblem in der Theorie der Modulformen

Sei $S_k(N)$ der Raum der Spitzenformen vom Gewicht k zu $\Gamma_0(N)$, $k \geq 4$ gerade. Das Basisproblem besteht darin, eine Basis von $S_k(N)$ aus arithmetisch interessanten Spitzenformen anzugeben. Diese erhält man durch Thetareihen zu verallgemeinerten Brandt-Matrizen.

Sei dazu Q eine definite Quaternionenalgebra über $\mathbb{Q}$ mit der Grundzahl F_1, F_2 eine zu F_1 teilerfremde natürliche Zahl und $I \subset Q$ eine Ordnung der Stufe $F_1 F_2$. Ist l eine gerade natürliche Zahl, $\chi_l : Q^\times \longrightarrow GL_{l+1}(\mathbb{C})$ die l-te tensorielle Darstellung von $Q^\times$ und $B_l(n, F_1, F_2)$, $n \in \mathbb{N}$, die zu diesen Daten gebildete n-te verallgemeinerte Brandt-Matrix, so sind die Koeffizienten der Matrixreihe $\sum_{n=1}^{\infty} B_l(n, F_1, F_2) e^{2\pi i n \tau}$ Spitzenformen vom Gewicht $k = l+2$ zu $\Gamma_0(F_1 F_2)$. Man betrachtet nun zwei Darstellungen des Hecke-Ringes $H_{F_1 F_2}$ (im Sinne von Shimura) zu $\Gamma_0(F_1 F_2)$, nämlich die, die durch Brandt-Matrizen und diejenige, die durch Hecke-Operatoren geliefert wird. Durch Vergleich der Spuren beider Darstellungen (Spurformeln von Eichler und Hijikata) gewinnt man

$$\langle \theta_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle \theta_d \rangle \simeq \bigoplus_{m \mid F_2} \delta\left(\frac{F_2}{m}\right) S_k^0(F_1 m)$$

wobei die Isomorphie als Isomorphie von Moduln über dem Hecke-Ring $H_{F_1 F_2}$ zu verstehen ist. Dabei bedeuten $\theta_1, \dots, \theta_d$ die von Null verschiedenen Elemente auf der Diagonalen der obenstehenden Matrixreihe, $S_k^0(F_1 m)$ den Raum, der von den Neuformen zu $\Gamma_0(F_1 m)$ erzeugt wird und $\delta\left(\frac{F_2}{m}\right)$ die Anzahl der Teiler von $\frac{F_2}{m}$. Mit Hilfe der Theorie der Neuformen von Atkin und Lehner gelingt damit eine Lösung des Basisproblems im Falle einer quadratfreien Stufe.

16.5.1980 Rolf-Dieter Kulle

Göttingen

A graph Γ is locally $\mathcal{P}$ if the link $\Gamma(x)$ of each vertex x has property $\mathcal{P}$. Locally Γ_0 for some graph Γ_0 means locally $\mathcal{P}$ for $\mathcal{P} = [\Gamma_0]$ and this is also expressed by saying that Γ is locally homogeneous or Γ has constant link. Two general problems are (1) the existence of locally $\mathcal{P}$ graphs for given $\mathcal{P}$ and (2) the classification of locally $\mathcal{P}$-graphs. In this talk results and methods of the following authors were discussed: M. Brown and R. Connelly; A. Blass, F. Harary and Z. Miller, M. Ronan; A. Vince. Ronan's work was motivated by Tits' "A local approach to buildings".

23.5.80 W. H. Haemers

Fox subgroups of free groups

Let F be a free group on X and $\mathbb{Z}F$ its integral group ring. Let $\underline{\underline{f}} = \mathbb{Z}F(F-1)$, $\underline{\underline{r}} = \mathbb{Z}F(R-1)$, $R \trianglelefteq F$. Then $F(n,R) = F \cap (1 + \underline{\underline{r}}\,\underline{\underline{f}}^{n})$ is called the n-th Fox subgroup of F relative to R & the identification of $F(n,R)$ is known as the Fox problem. In this talk a survey was given of the up to date progress on this problem. The group $F(n,R)$ was compared with $G(n,R) = \prod_{m=2}^{n+1} \prod_{\underline{t}(m)} [R_{t_1}, \dots, R_{t_m}]$, where $\underline{t}(m) = (t_1, \dots, t_m)$ is an m-tuple of integers satisfying $t_1 + \dots + \hat{t}_i + \dots + t_m \geq n$ $\forall i$, $R_t = R \cap \gamma_t(F)$.

May 28, 1980. N.D. Gupta (Winnipeg)

Neben die numerische Invarianten, wie Grad, Diskriminante, Klassenzahl, ..., kommt einen algebraische Zahlkörper mit drei weiter Invariante ausgestattet:

die Zetafunktion, die Adelering, und der Normform.

Diese letzte drei sind, ihrem sehr unterschiedliche Natur zum Trotz, sehr eng miteinander verwandt. Es wurde diese Verwandtschaft erläutert. Nachher wurde viel Bier getrunken; dazu ein ausgezeichnetes Quiche, von Frau Draxl serviert. R. Perlis (Bonn) 30.5.80

Some classical problems of linear algebra

Classification problems of linear algebra (formulated in geometric terms or terms of matrix problems) mark the beginnings of the theory of associative algebras (von Staudt, Weierstrass, Jordan). Classical methods of solutions reached soon their limitations. Some of the recent techniques of the representation theory provide explicite methods of solutions, as well as proper understanding, of such classification problems. These points have been illustrated on the well-known Kronecker's classification of pairs of complex matrices and on the two recently formulated problems on classification of complex linear transformations, and real linear transformations between two quaternion vector spaces, respectively (D. Djoković, Lin. Algebra and Appl. 20 (1978) 147–165). There are "simple normal forms for matrices" in the first instance, whereas the second problem is "wild" in the sense that any finitely generated real algebra can be realized as the endomorphism algebra of a suitable matrix (D.–Ringel, Lin. Algebra and Appl. 30 (1980)). In general, the underlying (modulated) oriented graph of the problem tells immediately whether the problem is trivial (finite number of indecomposable blocks), "tame" (solvable) or wild: the graph is Dynkin, Euclidean or otherwise. Even in the wild case, a functorial method describes all "preprojective" and "preinjective" blocks. A construction of the preprojective algebra of a modulated graph has been sketched to illustrate, for every orientation of the graph, its decomposition as a direct sum of all preprojective representations, each occurring once (D.–Ringel, Proceeding of the 2nd ICRA, Carleton Univ. Lecture Notes #25–26 (1980); to appear in Springer Lecture Notes).

6.6.1980

V. Dlab,
Carleton Univ., Ottawa

A discrete subgroup Γ of a second countable loc. compact top. group G is a lattice in G if the homogeneous space G/Γ carries a finite G-invariant Borel measure. A lattice Γ in G is uniform (or co-compact) if G/Γ is compact, otherwise it is said to be non-uniform. The space of deformations of Γ is the set of homomorphisms of (the abstract group) Γ into G with the topology of pointwise convergence. Γ is said to be <u>rigid</u> if in a nbd. of the natural inclusion i ($i: \Gamma \to G$), every deformation is of the form $\mathrm{Int}\, g \cdot i$ ($g \in G$).

In the first part of this talk we describe the results of Selberg and Weil that assert that in a real semi-simple Lie group which has no compact factors and which is not locally isomorphic to $SL_2(\mathbb{R})$, any "irreducible" <u>uniform</u> lattice is rigid, and the results of (Borel and) Raghunathan on rigidity of <u>arithmetic</u> lattices in groups which are not locally isomorphic to $SL_2(\mathbb{R})$ or $SL_2(\mathbb{C})$. In this connection we note an important observation of A. Weil: Γ is rigid if

$H^1(\Gamma, Ad) = 0$. In all the rigidity proofs (except that of Selberg for $SL_n(\mathbb{R})$) one actually shows that $H^1(\Gamma, Ad) = 0$.

An interesting application of rigidity and a result of Kazhdan-Margulis on "Siegel hypothesis" is the following: $G \overset{loc}{\not\cong} SL_2(\mathbb{R}), SL_2(\mathbb{C})$ (G with no compact factors either!), then given any $c > 0$, there are only finitely many lattices Γ, up to conjugation by elements in G, such that $\mu(G/\Gamma) < c$; μ a fixed Haar measure on G. In $SL_2(\mathbb{C})$, the failure of rigidity for non-uniform lattices is illustrated by noting that there is a sequence $\{\Gamma_i\}$ of uniform lattices (in $SL_2(\mathbb{C})$) which converges to a non-uniform lattice Γ (Jørgensen). This phenomena provides a counter example to a question of Margulis for the group $G = SL_2(\mathbb{C})$. However, this question is still open for groups other than $SL_2(\mathbb{R})$ or $SL_2(\mathbb{C})$.

For s.s. groups over non-archimedean fields of char 0, rigidity of irreducible lattices holds provided that we exclude the groups of rank 1, but in case the field is of positive characteristic, very often rigidity fails (and so often $H^1(\Gamma, Ad) \neq 0$).

We also have the following theorem (Amer. J. Math. Vol. 98): Let Γ be an irreducible lattice in a real s.s. G (G not loc. isom. to $SL_2(\mathbb{R}) \times$ a compact group), Γ' be a discrete subgroup of a s.s. real Lie group G'. Assume $\Gamma' \cong \Gamma$. Then Γ' is a lattice in G' if and only if the symmetric spaces associated with G, G' are of equal dimension.

An interesting corollary of this theorem is the following group theoretic property of irreducible lattices Γ in s.s. groups not loc. isom to $SL_2(\mathbb{R}) \times$ a compact group: Any injective homomorphism $\theta : \Gamma \to \Gamma$ is surjective.

Finally we give an exposition of the following strong rigidity theorem of Mostow, Margulis (and myself in non-uniform "$\mathbb{Q}$-rank 1" cases):

Theorem. Γ and Γ' be irreducible lattices in real analytic s.s. groups G and G' respectively. We assume that both G, G' have trivial center and no compact factors, and also that G is not locally isomorphic to $SL_2(\mathbb{R})$. Then any isomorphism $\Gamma \to \Gamma'$ extends to an isomorphism of G on to G'

Gopal Prasad
T.I.F.R. Bombay
13/6/80.

Über den Zusammenhang zwischen Kirillovs Theorie und Schiffmanns Theorem

Schiffmanns Theorem charakterisiert die positiv definiten zentralen Distributionen auf einer nilpotenten einfach zusammenhängenden Liegruppe, Kirillovs Theorie charakterisiert die unitären irreduziblen Darstellungen einer solchen Gruppe und liefert eine Formel, die Charaktere dieser Darstellungen zu berechnen. Es wurde gezeigt, daß mit wenigen relativ elementaren Schlüssen die Aussagen der Kirillov-Theorie aus Schiffmanns Theorem hergeleitet werden können und umgekehrt.

20.6.80 Rainer Felix

TU München

Über ein unendliches Gleichungssystem

Bei der Bestimmung der Charaktere der S_∞ (= Gruppe der bijektiven Abbildungen von $\mathbb{N}$ auf sich) kommt man auf folgendes Gleichungssystem:

$$(*) \quad a_{\lambda_1,\dots,\lambda_n} = a_{\lambda_1+1,\lambda_2,\dots,\lambda_n} + \dots + a_{\lambda_1,\dots,\lambda_n+1} + a_{\lambda_1,\dots,\lambda_n,1}$$

für alle Partitionen $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ von n. Dabei ~~sind~~ fallen in $(*)$ alle ~~+~~ $a_{\lambda_1,\dots,\lambda_\nu+1,\lambda_{\nu+1},\dots}$ $\cancel{=0}$ mit $\cancel{\lambda_{\nu+1} \geq}\ \lambda_{\nu-1} < \lambda_\nu + 1$.
Dabei sind nur die Lösungen mit

$$(**) \quad a_\lambda \geq 0 \quad \text{für alle } \lambda \in \Lambda := \{\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0 : \lambda_\nu \geq \lambda_{\nu+1},\ \lambda_\nu = 0 \text{ f. f. alle } \nu \in \mathbb{N}\}$$

und der Normierung

$$(***) \quad a_{0,0,\dots} = a_{1,0,0,\dots} = 1.$$

Es genügt wegen der Choquet'schen Theorie den Fall der unzerlegbaren Charaktere zu betrachten. Es wird eine notwendige und hinreichende Bedingung ~~für Lösungen von (*)~~ dafür angegeben, daß eine Lösung von $(*)$, $(**)$, $(***)$ unzerlegbar ist. Damit lassen sich dann explizite Formeln für die Lösungen angeben.

20.6.80 Elmar Thoma TU München.

On the equivalence of nonstable K-theories.

There are several ways using which one can define the nonstable K-groups. One of them is due to Volodin, in this approach one defines $\check{K}_{i,n}(R)$ as $\pi_{i-1}(V_n(R))$, where $V_n(R)$ is the Volodin Space corresponding to the group $Gl_n(R)$. The other one is due to Quillen, in this approach one defines $K^Q_{i,n}(R)$ as $\pi_i(Gl_n(R)^+)$, where plus construction is applied with respect to the normal closure $E_n(R)$ of the group of elementary matrices $E_n(R)$

Theorem. If $n \geq 2i+1$ then there exists a canonical mapping from $\check{K}_{i,n}(R)$ to $K^Q_{i,n}(R)$, this map is onto if $n \geq \max(2i+1, i+s.r.(R)-1)$ and is isomorphism if $n \geq \max(2i+1, i+s.r.(R))$

The crucial role in the proof plays the following result:

Theorem 2. Denote $\cup T_n^\sigma(R)$, where σ runs through all linear orderings of $\{1,\dots,n\}$ and $T_n^\sigma(R)$ is the corresponding triangular group, by $X_n(R)$. Then $\tilde{H}_i(X_n(R)) = 0$ if $n \geq 2i+1$.

22.VI.80 Andrew Suslin

Leningrad branch of Steclov mathematical institute. USSR, Leningrad.

Die multiplikative Komplexität von Algebren

Sei A eine n-dimensionale assoziative Algebra mit 1. Die Komplexität von A, L(A), ist der minimale nichtlineare Rechenaufwand zur Multiplikation zweier Elemente von A.

Satz: $L(A) \geq 2n$ − Anzahl maximaler zweiseitiger Ideale von A

28.6.80 Volker Straßen

(Zürich)

Bemerkungen zum Satz von R.C. James über das Supremum linearer Funktionale

Über Anwendungen auf kompakte konvexe Mengen, Satz von Hahn-Banach, Fixpunktsätze ("Eine konvexe ... Menge ist genau dann schwach kompakt, wenn jede affine Selbstabbildung einen Fixpunkt besitzt") und Rainwater-Topologien des James'schen Satzes wird gesprochen. Sodann wird der Satz auf folgende allgemeinere Art verschärft: Sei Q eine konvexe, relativ abzählbar kompakte Teilmenge eines lokalkonvexen Raumes L, X eine Menge, $T: L \to (l_\infty(X), \omega_X)$ stetig (ω_X die punktweise Topologie) und nimmt jedes Tz, $z \in L$, sein Supremum auf X an, so haben X und TQ vertauschbare Doppellimites.

4. Juli 1980

Klaus Floret
Univ. Kiel.

Renormalizing Gibbs states by means of the Kadanoff transformation

We consider the Kadanoff transformation T (depending on a positive parameter p) acting on probability measures μ on the space $\{+1,-1\}^{\mathbb{Z}^d}$. A measure μ is called a non-trivial fixed point of T, if it is extremal in the set of T-invariant measures but is not a product measure (or convex combination of product ~~mea~~ invariant measures). We describe the set of trivial fixed points and show that non-trivial fixed points exist provided that $d \geq 2$ and p large enough. A strong mixing condition on μ implies convergence of $T^n\mu$ towards a trivial fixed point. In particular this applies to the 2-dimensional Ising model except at the critical point. What happens at the critical point still remains unknown.

14. 10. 1980 Yasunari Higuchi (with R. Lang)
z. Z. Heidelberg.

Explizite Präsentation Hilbertscher Modulgruppen

Es wird ein Verfahren geschildert, mit dem man explizite Präsentationen beliebiger Hilbertscher Modulgruppen $PSL_2\, \mathcal{O}$ gewinnt, wenn $\mathcal{O}$ Ring der ganzen Zahlen im total-reellen algebraischen Zahlkörper (der Klassenzahl 1) ist. Die Eingangsdaten sind: Eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathcal{O}$, ein System von Fundamentaleinheiten von $\mathcal{O}$ und (schwierigste Voraussetzung) die Kenntnis der „Fußboden" - Randräume des Siegelschen Fundamentalbereichs. Praktisch angewendet wurde das Verfahren auf quadratische Zahlkörper der Diskriminanten $d_K = 5, 8, 12, 13$ (gemeinsame Arbeit mit F. Kirchheimer, Freiburg, erschienen bei Crelle 315 1980) sowie auf den Körper $K = \mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{7})$ (Kirchheimer). Es handelt sich um eine Verfeinerung des topologischen Poincaré - Gerstenhaber - Behr - Verfahrens. – Folgerungen: Explizite Präsentationen aller $SL(n, \mathcal{O})$, Konstruktion der Erzeugenden von $K_2(\mathcal{O})$. In unseren quadratischen Beispielen ist $K_2(\mathcal{O}) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, für $\mathcal{O} \subset K = \mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{7})$ ist $K_2(\mathcal{O}) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

24. 10. 80 Jürgen Wolfart
Frankfurt a. M.

Diophantische Probleme bei Modulkurven und der Zusammenhang mit Fermatkurven.

Bei Fragestellungen, die die Torsionsgruppe der K-rationalen Punkte von elliptischen Kurven über einem Zahlkörper K betreffen, wird man auf die Bestimmung der K-rationalen Punkte von der Modulkurve $X_0(n)$ geführt, deren Punkte gerade (bis auf die 2 Spitzenpunkte (0) und (∞)) die über K definierten Isogenien zwischen elliptischen Kurven vom Grad n beschreiben. (Hier und im Folgenden ist n eine Primzahl.) Durch Ausnutzung der sehr reichhaltigen Kenntnisse, die die Zahlentheorie, die algebraische Geometrie und vor allem auch die Theorie der Modulformen liefert, gelingt es Mazur (1976 bzw. 1978) zu zeigen, daß $X_0(n)(\mathbb{Q})$ eine endliche Menge für $n \geq 11$ ist und daß für hinreichend großes n $X_0(n)(\mathbb{Q})$ nur aus den Spitzen besteht. Der wesentliche Schritt des Beweises beruht darauf, daß der "Eisensteinquotient" der Jacobischen Varietät von $X_0(n)$ über $\mathbb{Q}$ nur endlich viele Punkte in $\mathbb{Q}$ besitzt. Für beliebige Zahlkörper K versagt deshalb der Beweisansatz. Man kann nun versuchen, Methoden der sog. "Non-Standard-Arithmetik", wie sie von Robinson-Roquette entwickelt wurden, auf $X_0(n)$ anzuwenden. Es gelingt, die Endlichkeit von $X_0(n)(K)$ in eine arithmetische Eigenschaft der j-Invarianten umzuformulieren, die wiederum über $\mathbb{Q}$ aus den Eigenschaften des Eisensteinquotienten sofort folgt; geht man noch weiter und betrachtet man "Non-Standard-Isogenien", so erhält man gewisse Endlichkeitsaussagen für $X_0(n)(K)$ für großes n. (Vgl. "Cyclic Isogenies and Non-standard Arithmetic", J. Number Theory 1980.)

Der Zusammenhang mit der Fermatkurve $C_n : z_1^n - z_2^n =$ wird durch die Beobachtung gegeben, daß, falls (z_1, z_2, z_3) ein Punkt aus $C_n(K)$ ist, die elliptische Kurve

$E_z : y^2 = x^3 + 4(z_1^2 + z_3^n)x^2 + 16 z_1^n z_2^n x$ besonders schöne arithmetische Eigenschaften hat (Semistabilität und die Adjunktion von Punkten der Ordnung n zu K ergibt nur wesentlich unverzweigte Erweiterungen, deren Galoisgruppe in der $GL(2,p)$ enthalten ist), so daß zu hoffen ist, daß Aussagen über $X_0(n)(K)$ auch Aussagen über die K-rationalen Punkte von C_n liefern.

31.10.80 Gerhard Frey, Saarbrücken

Denseness questions in the classical theory of moments.

Let μ be a probability measure on $\mathbb{R}$ having moments of all orders, and let (s_n) be the momentsequence

$$s_n = \int_{\mathbb{R}} x^n d\mu(x) \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

For every $p \in [1, \infty[$ the vector space $\mathcal{P}$ of polynomials is a subset of $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mu)$, and the talk centers around the question:

For which μ and which p is it true that $\mathcal{P}$ is dense in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mu)$?

Classical results are due to M. Riesz (1923) for the case $p=2$ and to Naimark (1946) for the case $p=1$.

In collaboration Berg and Christensen have obtained the following results:

A: For $p>2$, $\mathcal{P}$ is not dense in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mu)$ if μ is indeterminate (i.e. if there exists $\nu \neq \mu$ with the same moments as μ)

B: If μ is determinate, $p>2$, denseness of $\mathcal{P}$ may or may not occur.

C: There exist indeterminate measures μ for which $\mathcal{P}$ is dense in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mu)$ precisely for $p \in [1, 2[$.

7. 11. 1980 Christian Berg (University of Copenhagen).

0-Zykeln auf Flächen.

Es sei X eine glatte projektive Varietät. Ein 0-Zykel auf X ist ein Element der freie Abelsche Gruppe die von den Punkten von X erzeugt wird. Der Grad eines 0-Zykels ist die Summe seiner Koeffizienten.

Ein 0-Zykel von Grad 0 schreibt sich also als $\sum_i (P_i - Q_i)$ wo die P_i, Q_i Punkte auf X sind, nicht notwendigerweise alle verschieden.

Ein 0-Zykel der Form $\sum_{i=1}^n P_i$ kann man identifizieren mit einem Punkt im Raum $X^{(n)} = \underbrace{X \times \cdots \times X}_{n \text{ Faktoren}} / \mathfrak{S}_n$ wobei die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_n$ durch Permutierung der Faktoren arbeitet. Auf die Gruppe aller 0-Zykeln von Grad 0 definiert man jetzt die Relation der sogenannte rationale Äquivalenz durch: $\sum_{i=1}^n (P_i - Q_i) \sim 0$ dann und nur dann wenn es einen Morphismus $f: \mathbb{P}^1 \to X^{(n)}$ gibt so daß $f(0) = \sum_{i=1}^n P_i$ und $f(\infty) = \sum_{i=1}^n Q_i$. Falls X eine Kurve ist, ist diese Definition äquivalent mit: $\sum_i (P_i - Q_i) \sim 0$ dann und nur dann wenn eine meromorphe (oder sogar rationale) Funktion f existiert so daß die P_i genau die Nullstellen von f sind und die Q_i ihre Pole (alles nach Multiplizität gezählt). Jetzt setzt man

$$A_0(X) = \text{0-Zykeln von Grad 0} \,/\, \text{rationale Äquivalenz}$$

Es waren Abel und Jacobi die bei ihre Arbeit an Integralen diese Gruppe entdeckt haben und die gezeigt haben daß sie isomorph ist zu einem Torus $\mathbb{C}^g/\Lambda$. In modernen Schreibeweise kann man (für eine Kurve X) den Satz von Abel und Jacobi schreiben als

(1) $$A_0(X) \cong H^0(X, \Omega^1_{X/\mathbb{C}})^\vee / H_1(X, \mathbb{Z})$$

wo $H^0(X, \Omega^1_{X/\mathbb{C}})^\vee$ der duale Raum vom Raum der regulären 1-Formen auf X ist und $H_1(X, \mathbb{Z})$ die erste Homologie Gruppe von X; der Isomorphismus wird gegeben durch

$$\sum_i (P_i - Q_i) \longmapsto \left(\left(\omega \longmapsto \sum_i \int_{Q_i}^{P_i} \omega \right) \text{ modulo "Perioden"} \right)$$

(Perioden sind die Werte von Integrale längs geschlossenen Wegen)

Es ist jetzt auch ganz üblich und natürlich einen 0-Zykel zu betrachten als ein Element der Gruppe $H^0(X, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*)$; hier sind $\mathcal{M}^*$ und $\mathcal{O}^*$ die Garben der invertierbare meromorphe bzw holomorphe Funktionen. Das führt dann (noch immer für Kurven) leicht zu $A_0(X) \times \mathbb{Z} \cong H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ woraus man mittels der Exponentialsequenz ableitet

(2) $$A_0(X) \cong H^1(X, \mathcal{O}) / H^1(X, \mathbb{Z}).$$

Für Flächen hat man nicht die Isomorphismen (1) und (2). Weil Faser rationaler Funktionen nun 1-dimensional sind werden die beide Glieder von (2) unvergleichbar. $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ und $H^1(X,\mathcal{O})/H^1(X,\mathbb{Z})$ leben weiter in der Theorie von Picard Gruppen und Picard Varietäten. Die sogenannte Albanese Varietät $H^0(X, \Omega^1_{X/\mathbb{C}})^\vee / H_1(X,\mathbb{Z})$ und eine Abel-Jacobi Abbildung wie (1) gibt es für Flächen zwar ~~auch~~ noch immer, aber die Abbildung ist im Allgemeinen kein Isomorphismus. Genauer, nach einem Satz von Mumford und dessen Präzisierung durch Roitmann hat die Teilmenge von $A_0(X)$ die besteht aus den Klassen von Zykeln $\sum_{i=1}^{n} (P_i - Q_i)$, wenigstens die Dimension $4n$, falls auf X ein regulären 2-Form existiert.

Heute gibt es eine Formel von Bloch (für Flächen)

$$A_0(X) \times \mathbb{Z} \cong H^2(X, \underline{K}_2)$$

wobei $\underline{K}_2$ die Garbifizierung ist von $((\text{offenes } U) \longmapsto K_2(\Gamma(U, \mathcal{O}_X)))$; K_2 ist Milnors K_2-Funktor. Man kann also versuchen $A_0(X)$ mittels K-Theorie zu studieren. Man kann ins Besondere eine "formelle Komplettierung von $A_0(X)$" definieren. Diese formelle Komplettierung ist von Bloch für Flächen über Zahlenkörper und vom Vortragenden für Flächen über beliebige pefekte Körper studiert worden. Dies wird in einem anderen Vortrag geschildert werden. Diese Arbeit hat geführt zu einer konkreten Formel für diese sogenannte formelle Komplettierung von $A_0(X)$. Darin sind $H^2(X, \mathcal{O}_X)$ und $H^2(X, \Omega^1_{X/\mathbb{Q}})$ die wichtigste Bestandteile und die haben auch eine globale Bedeutung. So kommt man dann dazu zu suchen nach Beispiele von Flächen woran man den lokal – global Übergang üben kann. Gute Beispiele werden gegeben durch Kummer Flächen von abelsche Flächen die das Produkt sind von zwei elliptische Kurven E_1, E_2. Man kann da einfach zeigen daß $A_0(X)$ erzeugt wird von "Symbolen" $\{u,v\}$ mit $u \in E_1$, $v \in E_2$ und daß diese Ausdrücke biadditiv sind. Es wird gehofft daß diese Beschreibung sich sehr bald vervollständigen läßt zu einer Präsentation für $A_0(X)$ die Matsumoto's Präsentation für $K_2(\mathbb{C})$ sehr ähnlich sieht.

14 Nov '80 Jan Stienstra (Univ. Utrecht)

Extremal Problems in Hypergraph Theory.

For the first part of the lecture I talked about classical results and problems, trying to show the motivation of the subject. I also mentioned results in which I had been involved.

Let $\mathcal{F}$ be a set of subsets of $\{1, 2, \cdots, n\}$. Then $val(\mathcal{F})$ is the maximum integer v such that each i in $1 \le i \le n$ belongs to v or more sets of $\mathcal{F}$.

EROÖS-KO-RADO. If $X, Y \in \mathcal{F}$ implies $\frac{1}{2}n \le k \le |X|$ and $X \cup Y \ne \{1, 2, \cdots, n\}$ then $|\mathcal{F}| \le \binom{n-1}{k}$.

BRACE-DAYKIN. If $X_1, \cdots, X_t \in \mathcal{F}$ implies $X_1 \cup \cdots \cup X_t \ne \{1, 2, \cdots, n\}$ then $|\mathcal{F}| \le (t+2)2^{n-t-1}$

DAYKIN-FRANKL. If $X, Y \in \mathcal{F}$ implies $X \cup Y \ne \{1, 2, \cdots, n\}$ then $val(\mathcal{F}) \le \frac{2^n}{4}(1 - \frac{1}{n})$. An example has $val(\mathcal{F}) \ge \frac{2^n}{4}(1 - \frac{1}{n^{0.6}})$.

MARICA-SCHONHEIM. Any n sets have at least n distinct differences.

DAYKIN-LOVÁSZ. The number of values taken by any non-trivial Boolean function is not less than the number of sets over which it is evaluated.

Let L be the set of all subsets of $\{1, 2, \cdots, n\}$. Call $U \subset L$ an up-set if $u \in U$, $u \subset v$ imply $v \in U$. Call $C \subset L$ if $a, b \in C$ imply $a \cap b \ne \emptyset$. Call $S \subset L$ a star if $\exists\, i$ in $1 \le i \le n$ such that $a \in S$ implies $i \in a$.

CHVÁTAL CONJECTURE. A star is a clique of greatest cardinality in a down-set.

KLEITMAN. $|U \wedge D||L| \le |U||D|$ for U an up-set D a down-set

DAYKIN. $|A||B| \le |A \vee B||A \wedge B|$ for $A, B \subset L$ where $A \vee B = \{a \cup b : a \in A, b \in B\}$. For $\wedge$ replace $\cup$ by $\cap$, and similarly for symmetric difference Δ.

AHLSWEDE-DAYKIN.
$$2\sqrt{|A||B|} \le |A \vee B| + |A \wedge B|$$
$$|A| + |B| \le |A \Delta B| + |A \wedge B|.$$

SPERNER THEOREM, LYM INEQUALITY, KRUSKAL-KATONA THEOREM. The later is especially powerful in applications.

For the second part of the talk I outlined the proof of the following new result, which should be compared with a paper of BOLLOBÁS–DAYKIN–ERDÖS.

DAYKIN–HAGGKVIST. If r divides n and $X \in \mathcal{F}$ implies $|X| = r$, and if

$$\mathrm{val}(\mathcal{F}) > \frac{r-1}{r}\left\{\binom{n-1}{r-1} - \binom{n-dr-1}{r-1}\right\}$$

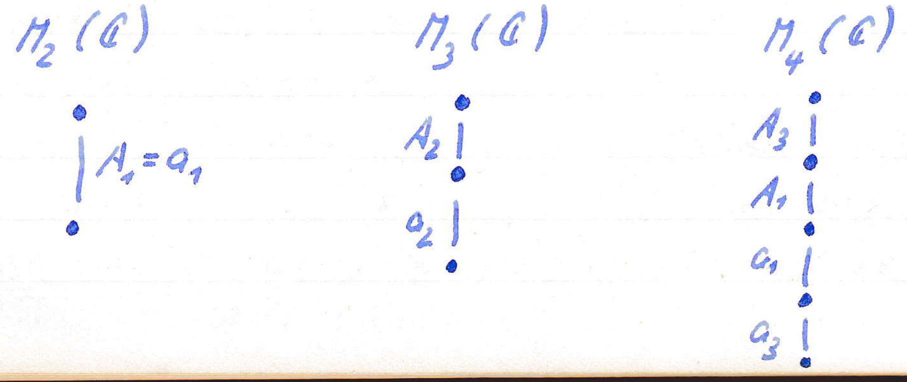
then $\mathcal{F}$ has more than d independent members. We say $a, b \in \mathcal{F}$ are independent if $a \cap b = \emptyset$.

I am very grateful for being invited to Bielefeld Universität. It is a great honour for me. I wish to thank all concerned. David E. Daykin 21st November 1980.

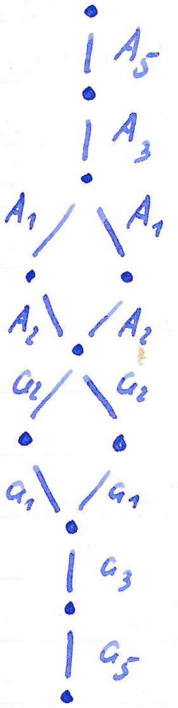
Klassische Singularitäten in klassischen Gruppen

Die Menge N der nilpotenten Matrizen in $M_2(\mathbb{C})$ wird gegeben durch die beiden Gleichungen $\mathrm{Spur}\, A = 0$ und $\mathrm{Det}\, A = 0$. Es läßt sich daher N beschreiben als eine Hyperfläche in $\mathbb{C}^3$ mit Gleichung $a^2 + bc = 0$. Es folgt, daß N im Nullpunkt eine isolierte Singularität hat (die "Kegelspitze"); es handelt sich um die einfachste aller Singularitäten, sie trägt den Namen A_1. Man erhält diese Singularität noch auf zwei andere Weisen: durch "Zusammenschlagen des Nullschnitts im Cotangentialbündel über $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ und als Quotientensingularität $\mathbb{C}^2/\sigma$, σ die Involution $(x, y) \mapsto (-x, -y)$. Die beiden letzten Beschreibungen lassen sich leicht verallgemeinern:
Das Zusammenschlagen des Nullschnitts im Cotangentialbündel über dem $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ liefert eine isolierte Singularität der Dimension $2n$; wir bezeichnen sie mit a_n;

die Quotientensingularität $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Z}_n$ operiert durch $(x,y) \mapsto (\zeta^i x, \zeta^{-i} y)$ (ζ n-te EW), ist die einfache (oder Kleinsche) Singularität vom Typ A_{n-1}. Im Vortrag zeigten wir nun, wie diese Singularitäten auch bei der Verallgemeinerung des ersten Standpunktes auftreten: man betrachte die Menge der nilpotenten Matrizen $\mathcal{N} \subset M_n(\mathbb{C})$. $\mathcal{N}$ zerfällt in eine endliche Menge von Konjugationsklassen, welche bekanntlich – via Jordansche Normalform – durch die Partitionen von n beschrieben werden. Das erste Resultat besagt nun, daß der Abschluss jeder Konjugationsklasse eine normale Varietät mit rationalen Singularitäten ist. Ist nun C eine solche Konjugationsklasse und ∂C ihr Rand, d.h. $\partial C = \bar{C} - C$, so besteht dieser wieder aus endlich vielen Konjugationsklassen, von denen einige offen in ∂C sind. Das zweite Resultat besagt nun, daß die Singularität von $\bar{C}$ entlang einer solchen offenen Klasse $C' \subset \partial C$ entweder vom Typ A_k oder vom Typ a_k ($k<n$) ist. Dabei läßt sich dies rein kombinatorisch mit Hilfe der Partitionen beschreiben. Im folgenden Diagramm repräsentieren die Punkte • die Konjugationsklassen, ein Strich besagt, daß die untere Klasse im Abschluss der oberen liegt und am Strich haben wir den Typ der Singularität hingeschrieben.



$M_6(\mathbb{C})$



$M_7(\mathbb{C})$

Die ordnungsumkehrende Dualität kommt von der Dualität der Partitionen her. Dabei wird der Typ A_i mit dem Typ a_i vertauscht.

<u>Schlussbemerkung</u>: Die beiden Resultate sind gemeinsame Arbeiten mit C. Procesi (Invent. Math. <u>53</u> (1979) und Invent. Math erscheint demnächst). Wir haben inzwischen auch den Fall der anderen klassischen Gruppen SO_n und Sp_n geklärt. Hier treten neue Phänomene auf: es gibt Konjugationsklassen mit <u>nicht normalen</u> Abschlüssen.

H. Kraft 28. 11. 1980

Subadditive Prozesse

Motiviert durch Anwendungen in der Perkolationstheorie haben Hammersley, Welsh und Kingman eine interessante Klasse von Prozessen eingeführt: Sei $S = \{0,1,2,\ldots\}^d$, $\mathcal{R}$ die Familie der "Rechtecke" in S, und $\forall s \in S$ τ_s eine maßtreue Transformation $(s \in S)$ von $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Ein subadditiver Prozess $F = \{F_I : I \in \mathcal{R}\}$ ist eine Familie integrierbarer Zufallsvariabler F_I mit den Eigenschaften: (i) $F_I \circ \tau_s = F_{I+s}$ $(I \in \mathcal{R}, s \in S)$, (ii) Ist I disj. Vereinigung von $I_1, \ldots, I_k \in \mathcal{R}$ so ist $F_I \leq \sum_{i=1}^k F_{I_i}$, (iii) $\sup\{|I|^{-1} \int |F_I| \, d\mu\} < \infty$. Dabei ist $|I| = \operatorname{card}(I)$. Die τ_s sollen eine Halbgruppe bilden. $\{F_I\}$ heißt superadd. wenn $\{-F_I\}$ subadd. ist und additiv, wenn $\{F_I\}$ super- und subadd ist. $\gamma(F) = \lim_{n\to\infty} n^{-d} \int F_n \, d\mu$ mit $F_n := F_{S \cap [0,n-1[^d}$ heißt die Prozeßkonstante.

Kingman bewies für $d=1$ den "subadditiven Ergodensatz": $n^{-d} F_n$ konvergiert f.ü. gegen einen inv. Limes $\bar{f}$. Im Fall $\mu(\Omega) < \infty$ gilt auch L_1-Konvergenz. Smythe und Nguyen haben den Fall $d > 1$ unter Zusatzbedingungen bewiesen. Es wurde über einen neuen (gemeins. mit Akcoglu gefundenen) Beweis des Kingman'schen Satzes berichtet, der nicht nur einfacher ist, sondern auch den Fall $d > 1$ ohne Zusatzbedingungen zu beweisen gestattet. Entscheidend ist die neue "Maximal-Ungleichung"

$$\mu\{\omega : \sup n^{-d} F_n > \alpha\} \leq 3^d \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \gamma(F) \qquad (\alpha > 0)$$

für nichtnegative superadditive Prozesse. Durch ein Beispiel läßt sich zeigen, daß der "Zerlegungssatz", auf dem alle bisherigen Beweise des subadd. Ergodensatzes von Kingman beruhen ohne Nebenbedingungen für $d > 1$ falsch wird.

Die Methode gestattet auch den Beweis von einer Version des obigen Satzes für stetige Zeit und eines Konvergenzsatzes für $t \to 0+0$, der im Fall $d=1$ den Lebesgue-schen Differentiationssatz f. monotone Fkt. enthält.

Schließlich wurde noch die Frage der Norm-Konvergenz in L_p $(1 < p < \infty)$ besprochen. (Resultate einer Arbeit mit Derriennic): Unter der Bedgg $\sup\{\| \frac{1}{|I|} F_I \|_p : I \in \mathcal{R}\} < \infty$ braucht keine L_p-Konvergenz zu gelten, sie gilt aber im Fall $F_I \geq 0$. Im allg. subadd. Fall erhält man nur schwache Konvergenz in L_p. Resultate dieses Typs gelten auch für verallgemeinerte subadditive Prozesse, die man erhält, wenn die Bedg. (1) ersetzt wird durch eine Bedg. (1*) $T_s F_I = F_{I+s}$, wobei T_s ein positiver linearer Operator in L_p ist, der nicht mehr notwendig von der Form $T_s f = f \circ \tau_s$ ist.

5.12.80.

Ulrich Krengel
(Göttingen)

Der Projektionssatz für Wiener-Mengen

In der Idealtheorie der Gruppenalgebra $L^1(G)$ einer lokalkompakten, abelschen Gruppe interessiert man sich für solche Ideale I, welche durch ihre Hülle $h(I)=\{\chi\in\hat{G};\ \hat{f}(\chi)=0\ \forall f\in I\}$ bestimmt sind. Solche abgeschlossenen Teilmengen der dualen Gruppe $\hat{G}$ heißen Wiener-Mengen. Nun weiß man, daß es für eine nicht-kompakte, abelsche Gruppe G in $\hat{G}$ abgeschlossene Teilmengen gibt, die Wiener-Mengen sind, und solche, die es nicht sind. Insgesamt weiß man allerdings sehr wenig darüber, ob eine vorgegebene Menge eine Wiener-Menge ist oder nicht. Ein allgemeiner Satz, der diese Frage entscheiden hilft, ist der (inverse) Projektionssatz (H. Reiter 1958): Sei N eine abgeschlossene Untergruppe von G, F eine abgeschlossene Teilmenge von $\hat{N}$ und $E=\{\chi\in\hat{G};\ \chi|N\in F\}$. Dann ist E Wiener-Menge genau dann, wenn F eine solche ist.

Es wird nun der folgende Satz bewiesen, der unabhängig auch J. Ludwig gezeigt hat:

Sei G eine lokalkompakte Gruppe, G_* der Raum der Kerne in der L^1-Algebra irreduzibler, unitärer Darstellungen von G. Sei weiter N ein abgeschlossener Normalteiler von G, F eine abgeschlossene, G-invariante Teilmenge von N_* und $E=\{\ker\pi;\ \pi$ irr. Darstellg auf G mit $\pi|N(k(F))=0\}$, wo $k(F)=\bigcap_{P\in F} P$ bedeute. Dann mögen noch die kleinsten Ideale $j(E)$ und $j(F)$ mit der Hülle

$h(j(E))=E$ bzw $h(j(F))=F$ existieren; $h(I)$ ist definiert durch $\{P;\ I\subseteq P\}$.
Dann ist E Wiener-Menge genau dann, wenn F Wiener-Menge ist und zusätzlich gilt: $L^1(G) * j(F) \subseteq j(E)$

Nach einem Ergebnis von J. Ludwig existieren $j(E)$ und $j(F)$, falls G bzw N von polynomialem Wachstum sind mit symmetrischer L^1-Algebra.

Die Bedingung $L^1(G) * j(F) \subseteq j(E)$ läßt sich nun in folgenden Situationen beweisen und damit auch der folgende Satz:
Sei G eine lokalkompakte Gruppe und N ein abgeschlossener Normalteiler, seien F und E wie oben. E ist Wiener-Menge genau dann, wenn F Wiener-Menge ist, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:
(i) G ist nilpotent, (ii) G ist klassenkompakte SIN-Gruppe, (iii) G ist Moore-Gruppe und (iv) G ist zusammenhängend, auflösbar und von polynomialem Wachstum und N ist ebenfalls zusammenhängend.

Es bleibt noch zu bemerken, daß (i) und (iv) auf J. Ludwig, (ii) und (iii) auf den Autor zurückgeht.

12.12.80

W. Hauenschild
(Paderborn)

Über unendlich nahe Zukunft

Sei $A(t,x)$ eine Funktion auf $\mathbb{R}_+ \times C$ (C ist die Menge stetiger Funktionen auf $\mathbb{R}_+$) mit Werten in $\mathbb{R}_+$ mit den folgenden Eigenschaften. Sie ist gleich 0 zum Zeitpunkt 0, nicht-fallend und stetig als Funktion von t für jedes $x \in C$ und für jedes t hängt nur vom "Stück" von $x=\{x_s\}_{s\in\mathbb{R}_+}$ bis zum Zeitpunkt t ab. Wir nennen A ein Diffusionsfunktional von einem stetigen lokalen Martingal X, wenn

$$\langle X\rangle_\cdot = A(\cdot, X) \quad f.s.$$

wobei $\langle X \rangle$ der natürliche steigende Prozeß in der Doob-Meyer Zerlegung von X^2 ist.

Das Hauptresultat des Vortrages ist das Folgende. Seien A und B Diffusionsfunktionale, sodaß das Martingalmaß μ von A absolute stetig bzgl des Maßes von B auf der σ-Algebra in C, die von unendlich naher Zukunft von Funktionen $x \in C$ nach Zeit 0 "erzeugt" wird, ist. Dann existiert es ein streng positives $(\mathrm{mod}\ \mu)$ τ (eine Stoppzeit), sodaß

$$\mu(\{x : A(t,x) = B(t,x) \quad \forall t \leq \tau(x)\}) = 1$$

19. 12. 80

[illegible]
(Essen)

Modelltheoretische Fragen der Körpertheorie

Zunächst werden die allgemeinen modelltheoretischen Begriffe für Körper eingeführt. Als Beispiel wird ein kurzer Modell-theoretischer Beweis des Artin-Schreierschen Satzes bzw Hilberts 17. Problem gegeben. Weiter werden etliche Vererbungssätze und Kürzungssätze hergeleitet. Beispiel: K sei algebraisch abgeschlossen oder reell abgeschlossen, und L sei ein beliebiger Körper; falls $K(X_1 \ldots X_s)$ und $L(X_1 \ldots X_t)$ elementar äquivalent sind, dann ist $s \geqq t$. Hieraus folgt dass die Körper $\mathbb{C}(X_1, \ldots X_n)$, $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{R}(X_1 \ldots X_n)$, $n \in \mathbb{N}$ alle elementar inäquivalent sind. Die entsprechende Frage für $\mathbb{Q}(X_1, \ldots X_n)$ ist noch offen. Für einen Teilkörper K von $\mathbb{C}$ sei $\mathcal{H}_K$ der Ring aller formalen Potenzreihen mit Koeffizienten in K. Es wird bewiesen $\mathcal{H}_K$ und $\mathcal{H}_\mathbb{C}$ nicht elementar äquivalent sind für jeden echten Teilkörper K von $\mathbb{C}$. Schliesslich werden Entscheidbarkeitsfragen erörtert.

9. 1. 81.

C. U. Jensen
(Kopenhagen)