

wobei  $\langle X \rangle$  der natürliche steigende Prozeß in der Doob-Meyer-Zerlegung von  $X^2$  ist.

Das Hauptresultat des Vertrages ist das Folgende:

Seien  $A$  und  $B$  Diffusionsfunktionale, sodass das maßtheoretische Maß  $\mu$  von  $A$  absolute stetig bzgl. des Maßes von  $B$  auf der  $\sigma$ -Algebra in  $C$ , die aus den von  $A$  unendlich naher Zukunft von Funktionen  $x \in C$  nach Zeit 0 "erzeugt" wird, ist. Dann existiert es eine streng positives ( $\text{mod } \mu$ )  $\tau$  auf  $C$  (eine Stopzeit), sodass

$$\mu(\{x : A(t, x) = B(t, x) \quad \forall t \leq \tau(x)\}) = 1$$

19. 12. 80

M. Strohmeier  
(Essen)

### Modelltheoretische Fragen der Körpertheorie

Zunächst werden die allgemeinen modelltheoretischen Begriffe im Körper eingeführt. Als Beispiel wird ein kurzer Modell-Körper oder Beweis des Artin-Schreierschen Satzes bzw. Hilberts 17. Problem gegeben. Weiter werden etliche Vereinfachungsätze im Kategorialen hergeleitet. Beispiel:  $K$  sei algebraisch abgeschlossen oder reell abgeschlossen, und  $L$  sei ein beliebiger Körper; falls  $K(x_1, \dots, x_s)$  und  $L(x_1, \dots, x_t)$  elementar äquivalent sind, dann ist  $s \geq t$ .

Hieraus folgt, dass im Körper  $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  aus  $\mathbb{R}(x_1, \dots, x_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  alle Elemente äquivalent sind.

Die entsprechende Frage für  $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$  ist noch offen. Für einen Teilkörper  $K$  von  $\mathbb{C}$  sei  $H_K$  der Ring aller formellen Potenzreihen mit Koeffizienten in  $K$ . Es wird bewiesen,  $H_{\mathbb{Q}}$  und  $H_{\mathbb{C}}$  nicht elementar äquivalent sind für jeden echten Teilkörper  $K$  von  $\mathbb{C}$ . Schließlich werden Entscheidbarkeitsfragen erörtert.

9. 1. 81

C. U. Jensen  
(Kopenhagen)

## Verbandslehre als Begriffsalgebra

Es wird eine Entwicklung der Verbandslehre skizziert, bei der Verbandslehre als Begriffsalgebra verstanden wird. Ausgegangen wird von einem (abstrakten) Kontext, das ist ein Tripel  $(G, M, I)$ , wobei  $G$  und  $M$  Mengen sind und  $I \subseteq G \times M$ ; die Elemente von  $G$  heißen Gegenstände, die von  $M$  Merkmale und  $g \in M$  wird gelesen "der Gegenstand  $g$  hat das Merkmal  $m$ ". Durch  $A' := \{m \in M \mid g \in m \text{ für alle } g \in A\}$  und  $B' := \{g \in G \mid g \in m \text{ für alle } m \in B\}$  ( $A \subseteq G, B \subseteq M$ ) wird eine Galois Verbindung zwischen  $G$  und  $M$  erklärt. Im Sinne der traditionellen Begriffslerei wird ein Begriff eines Kontextes  $(G, M, I)$  definiert als ein Paar  $(A, B)$  mit  $A \subseteq G, B \subseteq M, A' = B$  und  $B' = A$ ;  $A$  heißt der Inhalt und  $B$  der Inhalt des Begriffes  $(A, B)$ . Eine natürliche Ordnung (Unterbegriff - Oberbegriff) auf der Menge  $\mathcal{L}(G, M, I)$  aller Begriffe von  $(G, M, I)$  erhält man durch:  $(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2) \Leftrightarrow A_1 \subseteq A_2 (\Leftrightarrow B_1 \supseteq B_2)$ . Grundlegend ist nun der folgende

Satz: Für einen Kontext  $(G, M, I)$  ist  $(\mathcal{L}(G, M, I), \leq)$  ein vollständiger Verband, für den gilt:

$$\bigwedge_{i \in J} (A_i, B_i) = (\bigcap_{i \in J} A_i, (\bigcap_{i \in J} A_i)') \quad , \quad \bigvee_{i \in J} (A_i, B_i) = ((\bigcap_{i \in J} B_i)', \bigcap_{i \in J} B_i)$$

Angeheftet ist für einen vollständigen Verband  $L$  genau dann  $L \cong (\mathcal{L}(G, M, I), \leq)$ , wenn Abbildungen  $\varphi: G \rightarrow L$  und  $\mu: M \rightarrow L$  existieren, so daß  $\varphi(G)$  supremum-dicht in  $L$ ,  $\mu(M)$  infimum-dicht in  $L$  und  $g \in M \Leftrightarrow \varphi(g) \leq \mu(m)$  ist.

Das damit aufgezeigte Verständnis der Verbandslehre als Begriffsalgebra, legt die Behandlung der Verbandslehre in vier Problembereichen nahe, wobei Strukturtheorie, Darstellungslehre und Arithmetik von Verbänden mit einbezogen werden. Dazu werden ausführliche Anwendungsbeispiele diskutiert.

Rudolf Wille (Darmstadt)

16. 1. 81

## Zum Umkehrproblem der Galois-Theorie

In dem Vortrag habe ich gezeigt, wie man für einen galoisischen Fließkörper-Körper  $N/\mathbb{Q}(t)$  eine Abschätzung für den Grad des Definitionskörpers aus der Erweiterung über  $\mathbb{Q}$  gewinnen kann. Dies gelingt nach dem Hodge-Prinzip mit einer Größe, in die nur Eigenschaften der Galoisgruppe  $G$  und der Verzweigungspunkte von  $N/\mathbb{Q}(t)$  eingehen, nämlich mit der "Anzahl der Klassen  $\mathfrak{l}(T)$  zulässiger Erzeugendensysteme zur Verzweigungsstruktur von  $N/\mathbb{Q}(t)$  modulo Aut( $G$ ). Ist diese gleich eins und ist, was man unter geeigneten Voraussetzungen nachweisen kann, da dann über  $\mathbb{Q}$  definitorische Erweiterung  $N/\mathbb{Q}(t)$  galosisch, so gibt es nach dem Hilbertschen Irreduzibilitätsatz Spezialisierungen der  $N/\mathbb{Q}(t)$  definierenden Gleichung,

zu Zahlkörpern über  $\mathbb{Q}$  mit der Galoigruppe Grenzen. Dies kann man als  
 oder außerdem für alle nicht auflösbaren primären Gruppen vom  
 dext.  $d \leq 16$  machen, wobei mit höchstens den Kusnezows  
 und  $M_{12}$ , für welche als Definitionskörper  $\mathbb{Q}(\text{Fix})$  benötigt wurde.  
 Beispiel der  $PSL(2,7)$  wurde vorgeführt, wie man die Ordnung für  
 solche Körperverzweigungen berechnen kann.

1.1.1981

P. H. Becker (Karlsruhe)

### Die Konstruktion universeller Familien von $C^\infty$ -Funktionen auf $D^2$

Unter einer "K-Familie" versteht man eine Familie  $F: M \times D^2 \rightarrow \mathbb{R}$  von  
 $C^\infty$ -Funktionen über  $M$ , die "bijektionsstabil" ist und bezüglich  
 Typen und Anzahlen ihrer singulären gewissen Einschränkungen  
 ("K") unterworfen ist. Durch Induktion nach wachsender Komplexität  
 will man K-volle "universelle" K-Familien konstruiert werden. Dieser  
 Induktionsprozess habe ich in einer gründlichen Arbeit axiomatisch formuliert...

30.1.1981

K. Jänich (Regensburg)

### Quadratische Formen und abelsche Varietäten über Funktionenkörpern

Sei  $K/\mathbb{R}$  ein Funktionenkörper vom Transzendenzgrad 2. Eine  
 bekannte Vermutung von S. Lang besagt, daß  $K$  ein  $\mathbb{C}_2$ -Körper sein soll,  
 falls  $K$  nicht reell ist (d.h. -1 ist Quadratzusammen in  $K$ ). Für quadra-  
 tische Formen spezialisiert, würde folgen:  $q$  ist isotrop über  $K$ , wenn  
 $q(-1) \geq 5$ . Setzt man  $u(K) = \max\{\dim q \mid q \text{ anisotrop über } K\}$ ,  
 so wird also  $u(K) \leq 4$  vermutet. Bewiesen ist bisher nur  $u(K) \leq 6$ .  
 $u(K)$  kann auch (etwas anders) definiert werden, wenn  $K$  reell ist.

Im Vortrag wird gezeigt:  $u(K) \leq 4 \iff$  jedes Element der Ordnung 2  
 in der Brauergruppe  $B(K)$  ist eine Quaternionenalgebra  
 (dabei ist  $B_\mathbb{C}(K) = \bigcap \text{Ker}(B(K) \rightarrow B(K_\alpha))$ , wobei  $K_\alpha$  die reellen Hälften  
 von  $K$  durchläuft)

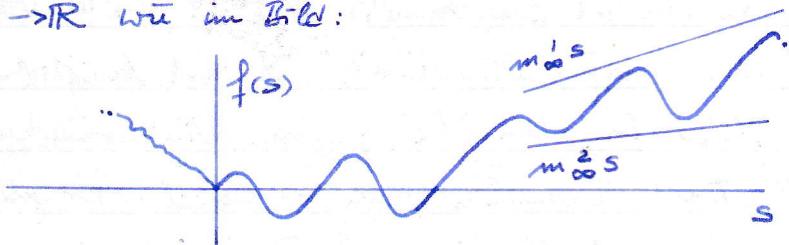
Über die Brauergruppe  $B(K)$  ist in einigen Fällen etwas bekannt.  
 Sie enthält dann eine Weil-Chatelet-Gruppe  $H^1(\bar{C})$ , wobei  $\bar{C}$   
 eine abelsche Varietät über  $k$  ist mit  $k$  von Transzendenzgrad 1  
 über  $\mathbb{R}$ . Die Struktur von  $H^1(\bar{C})$  und auch die Frage, ob in dieser  
 Gruppe „Ordnung“ und „Index“ eines Elements übereinstimmen,  
 wurde in Arbeiten von Ogg und Serre untersucht.

6.2.81

O. Pfister (Mainz)

## EIN BÖSER NUMERISCHER TRAUM: GEISTERLÜSUNGEN NICHTLINEARER EIGENWERTPROBLEME

Sei  $L$  ein elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung und  
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  wie im Bild:



( $f$  liegt in  $\infty$  in  
 dem Raumwinkel, der  
 durch  $m_0^<$  und  $m_0^>$  geb.)

Es wird das nichtlineare Eigenwertproblem

$$(1) \begin{cases} Lu + \lambda f(u) = 0 \text{ in } \Omega, & \lambda \in \mathbb{R} \\ u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$$

für ein beschr. Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  mit glattem Rand  $\partial\Omega$  untersucht. Die  
 zentralen Fragestellungen sind:

- ) Existenz von globalen Lösungsketten positiver Lösungen von (1)
- ) Verhältnis der Lösungen von (1) zu den „numerischen Lösungen“ von  
 $(2) Ax - \lambda Fx = 0$ .

Dabei wird die typische numerische Approximation etwa die FINITE DIFFERENZENAPPROXIMATION studiert. Zu nächst werden neue Bifurkationsresultate für (1) vorgestellt, die das globale Lösungsverhalten weitgehend erfassen. Dieses Lösungsverhalten findet man auch in den 1-Parametrischen Systemen (2). Überraschendweise ist die Struktur der Lösungen von (2) jedoch viel komplexer: Es werden 3 fundtypen von (Geister) Lösungen von (2) vorgestellt und diskutiert, die keine Lösungen der Differentialgleichung (1) approximieren. Schließlich wird eine numerische GLOBALE PERTURBATIONSMETHODE für (1&2) eingeführt und beschrieben, die dann

dient, sowohl

- Existenzsätze für das gegebene Problem (1) zu gewinnen, die auch
- einen Selektionsalgorithmus bereitzustellen, der aus der Gesamtheit aller Lösungen von (2) die "relevanten" aussortiert.

Die dargestellten Phänomene und Existenzsätze lassen sich auch bei völlig anderen Differentialgleichungen finden: etwa bei gewöhnlichen Differentialgleichungen mit VERZÖGERUNG.

Heinz-Otto Peitgen

(FREIE HANSESTADT BREMEN)

## Theoretische und praktische Aspekte eines neuen Zugangs zu Splines mehrerer Veränderlicher

Ein neuer Zugang zu multivariaten Splines beruht auf einer mehrdimensionalen Version von B-Splines, die ursprünglich über eine geometrische Charakterisierung gegeben sind. Die Herleitung analytischer Darstellungen und ihre numerische Realisierung wird diskutiert. Ferner werden kombinatorische Prinzipien zur Bildung "stabiler" Basen vorgestellt, die optimale Approximationseigenschaften gewährleisten. Als Anwendungen sind Oberflächendarstellungen und der Gebrauch als "Knotenpunktmen" bei der Lösung von Randwertproblemen anzusehen.

23. 4. 81

Wolfgang Dahmen (Bonn)

## Über eine Klasse partiell beobachtbarer stochastischer Kontrollprobleme

Betrachtet wird ein stochastisches System, dessen Dynamik durch eine lineare stochastische DGL beschrieben wird.

durch die Verwendung einer geeigneten Kontrolle, die Wert in einer spezifischen Menge eingeschränkt darf, soll der Zustand des Systems möglichst nah an einer gegebenen Zielgröße herangestellt werden. Als Informationsbasis über den Zustand des Systems stehen dabei nur fehlerbehaftete Messungen von linearisierten partiellen Zustandskomponenten zur Verfügung. Nach Überprüfung zu einem separaten und dementsprechendem Problem wird für eine feste Klasse von Kostenfunktionen die optimale Feedbackkontrolle berechnet, und zwar mittels Approximation des gestrahlten linearen Problems durch eine Folge abstrakter Probleme.

26.9.81

Moritz Blaschke  
(Bem.)

### Approximation mit positiven Operatoren in $L^p$ -Räumen.

Während die Charakterisierung von endlichen Korokinsystemen in  $C(X)$ ,  $X$  kompakt, im wesentlichen durch die Arbeiten von Šaškin gegeben wurde, fehlt eine solche Charakterisierung bisher für die in vielen Anwendungen auftretenden  $L^p$ -Räume. Zur Lösung dieses Problems betrachtete man zunächst für ein positives Radonmaß  $\mu$  auf einem lokalkompakten Raum  $X$  mit abzählbarer Basis den Raum  $L^p(\mu)$  aller reell-wertigen  $p$ -fach integrierbaren Funktionen ( $p \in [1, \infty]$ ). Für einen endlich-dimensionalen linearen Unterraum  $H \subset L^p(\mu)$ , für  $x \in X$  und eine  $\mu$ -Nullmenge  $N \subset X$  sei

$$M_x^N(H) := \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i e_{x_i} : \lambda_i \geq 0, x_i \in X \setminus N, \text{ und } \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i h(x_i) = h(x) \right\},$$

wobei  $n = \dim(H)$ . Dann gilt für eine endliche Teilmenge  $K \subset X$  und den hier von erzeugten endlich-dimensionalen Unterraum  $H$  ist genau dann Korokinsystem in  $L^p(\mu)$ , wenn eine  $\mu$ -Nullmenge  $N \subset X$  existiert mit

$$M_x^N(H) = \{e_x\} \quad \text{für alle } x \in X \setminus N.$$

Für  $L^p$ -Räume erhält man die endlichen Korokkin-Systeme gerade durch Äquivalenzklassenbildung (Mengen fast überall gleicher Funktionen) von endlichen Korokkin-Systemen in  $L^p$ -Räumen. Mit dieser Charakterisierung erhält man eine Reihe neuer bislang unbekannter  $L^p$ -Korokkin-Systeme. Anwendungen ergeben sich in der Fourierrechnung und der Approximationstheorie.

30. 4. 1981 Klaus Staeuer  
(Slangen)

## Vorzeichnung bei elliptischen Randwertaufgaben über unbeschränktem Gebiet

Bei Betrachtet werden nichtlineare elliptische Eigenwertaufgaben über einem unbeschränkten Gebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ .

Mit Hilfe einer erweiterten Ljusternik-Schnirelmann-Theorie wird zunächst gezeigt, daß auf jeder Sphäre von  $L^2(\Omega)$  unendlich viele Eigenfunktionen existieren und das die zugehörigen kritischen Werte einem inf-sup-Prinzip genügen. Mit Hilfe dieses inf-sup-Charakterisierungen ist es dann möglich zu zeigen, daß der kleinste Punkt  $\lambda^*$  des Spektrums der Linearisierung ein Verzweigungspunkt ist, gehört darüber hinaus  $\lambda^*$  zum kontinuierlichen Spektrum - was bei vielen Anwendungsbereichen der Fall ist - so kann man zeigen, daß unendlich viele Lösungszweige in  $\lambda^*$  von der minimalen Lösung abweichen. Als typisches Beispiel erhebt sich das folgende Problem:

$$-\Delta u + w(x)|u|^\sigma u = \lambda u \quad (u \in W_0^{1,2}(\Omega)),$$

wobei  $w$  positiv und stetig und  $\sigma > 0$ . Im Fall  $\Omega = \mathbb{R}^n$  ist  $\lambda^* = 0$   $\infty$ -facher Verzweigungspunkt, wenn  $\int_{\Omega} w^{2/(1-\sigma)} dx < \infty$

7. 5. 81

Tatjana Kühn  
(Köln)

# Wahrscheinlichkeitsmaße mit vorgegebenen Randverteilungen

Es wird ein Modell vorgestellt zur Beschreibung des Einflusses von stochastischer Abhängigkeit auf statistische Fragestellungen. Ausgangspunkt dieses Modells sind Charakterisierungen von der Klasse der W.-Maße mit vorgegebenen Randverteilungen durch Ordnungseigenschaften (Fréchet-Schranken). Hauptergebnis dieses Vortrages ist die Lösung eines Optimierungsproblems mit deren Hilfe in einigen Beispielen der Einfluss stochastischer Abhängigkeit dann explizit bestimmt wird. Insbesondere wird die Stärke der Fréchet-Schranken nachgewiesen.

Fudger Düsseldorf

11.5.81

## Zum Verhalten der Lösungen einer linearen Operatorgleichung bei Störung des Operators mit Raugänderung

(Gem. Arbeit mit R. Kress (Göttingen), erscheint in Math. Meth. Appl.,  
Die Streuung eines elektrostatischen Feldes  
im  $\mathbb{R}^3$  an endlich vielen Dielektrika und  
Leitern wird beschrieben durch

$$\begin{aligned} \text{div } E_x &= 0 \\ \text{rot } E_x &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{in } BUD \\ \text{auf } \partial G \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} [V, E_x]_+ = c_n \quad \text{auf } \partial G \\ [V, E_x]_- - [V, E_x]_+ = d_n \quad \text{auf } \partial D \\ n \cdot (V, E_x)_+ - (V, E_x)_- = j_n \end{array} \right\}$$

$$E_x(x) = o(\gamma) \quad \text{für } |x| \rightarrow \infty.$$

(Dabei: B: Außengebiet, D: Dielektrikum ( $n$ : Maß für seine Dielektrizitätskonstante),  $\partial$ : Leiter,

$[ , ]$ : Vektorprodukt,  $( , )$ : Skalarprodukt,  
 $c_{x_1}, d_{x_1}, \delta_x$ : vorgegeben).

Mittels eines potentialtheoretischen Ansatzes wird dieses Differentialgleichungsproblem in eine Integralgleichung auf  $\partial B$  umgeformt, deren Lösungen eindeutig eindeutig denen des Ogl.-problems entsprechen. Wir erhalten also eine von Parameter  $x$  abhängige Familie von Gleichungen

$$x - K_x x = f_x,$$

wobei  $K_x : C^{0, \alpha}(\partial B) \rightarrow C^{0, \alpha}(\partial B)$  kompakt ist.

Wir interessieren uns für das Verhalten von Lösungen für  $x \rightarrow 0$ . Die Schweißigkeit ist dabei, daß  $I - K_x$  bei  $x=0$  seinen Rang ändert, denn:

$\dim N(I - K_x) =$  Anzahl der Zusammenhangskomponenten von  $G$ ,

$\dim N(I - K_0) =$  Anzahl der Zusammenhangskomponenten von DUG.

Wir haben also die Frage der Abhängigkeit von Lösungen einer für alle singulären Operatorengleichung vom Parameter  $x$  untersuchen an einem Punkt, an dem sich noch dazu der Rang ändert. Mit einer Formel (an die Ljapunow-Schmidt-Methode aus der nichtlinearen Analysis erinnernden Reduktionsmethode) gelingt es, hinreichende (und fast notwendige) Konvergenzbedingungen

herzuleiten, die auf das ursprüngliche physikalische Problem anwendbar sind.

Mit ganz anderen Methoden (Regularisierungsverfahren) wird auch ein Resultat über die Abhängigkeit von Lösungen von Operatorgleichungen 1. Art (i.e.:  $K_x e^{x-f_x}$  mit  $K_x$  kompakt) von Störungen im Operator hergeleitet.

H. Engl / Linz / Klagenfurt,  
Österreich)

Numerische Berechnung immer Grenzwertlich! Betrachtet wird eine Randwertaufgabe ob. Form

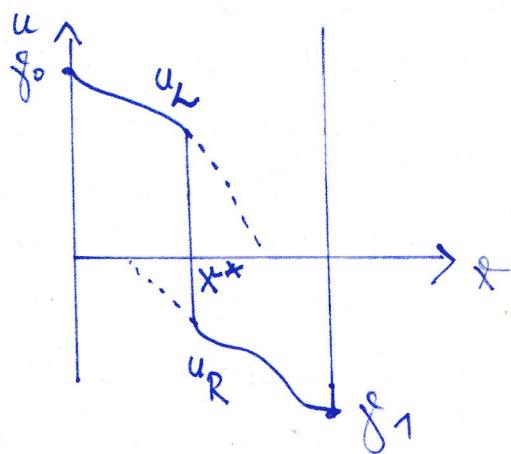
$$-\varepsilon u'' + a(u)u' + b(x, u) = 0, \quad u(0) = g_0, \quad u(1) = g_1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

Die schwärzte Dgl.  $a(u)u' + b(x, u) = 0$  entartet an allen Stellen  $x$ , an denen die unbekannte Lösung eine Nullstelle der Funktion  $a(u)$  annimmt.

Singuläre Störungsprobleme dieser Art modellieren gewisse math. Schwierigkeiten bei Gleichungen für kompressible Strömungen. (Auftreten von Schicks an unbekannten Stellen.) Diskutiert wird u.a. ein Differenzenverfahren von Oslet, das die Dgl. wie folgt diskretisiert

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon h^2}{4} (-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}) + \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \int_{u_{i-1}}^{u_i} a_+(s) ds + \int_{u_i}^{u_{i+1}} a_-(s) ds \right\} \\ & + b(x_i, u_i) = 0. \end{aligned}$$

Unter gewissen Voraussetzungen geht die kontinuierliche Grenzsituation für  $\varepsilon \rightarrow 0$  so aus:



Es wird gezeigt, daß für die Lösung  $u^h$  des diskreten 'admitten' Oskil - Systems (  $\varepsilon = 0$ ,  $h$  fest ) gilt

$$|u_i^h - u_L(ih)| \leq Ch, \quad 0 \leq i \leq j-1$$

$$|u_i^h - u_R(ih)| \leq Ch, \quad j+2 \leq i \leq m+1$$

$$|hj(h) - x^*| \leq Ch$$

mit  $C$  unabh. von  $h$ .

14.5.81

Jens Lorenz

Minnex - Prinzipien für nichtlineare Eigenwertaufgaben  
Für nichtlineare Eigenwertaufgaben  $T(\lambda)u = 0$  (z.B.  $\Delta u = \lambda u$ )  
( $T(\lambda)$  linear, stetig,  $\sigma(T)$  abgeschlossen), für die ein Rayleigh-  
funktional  $p$  existiert, also nicht auf dem ganzen Raum  
definiert ist, wird gezeigt, daß die reellen Eigen-  
werte (bei geeignete Zählung) als minnix - Werte  
von  $p$  charakterisieren lassen. Durch diese Theorie  
werden insbesondere Schwingungen von nichtüberdämpften  
Systemen mit endlich oder unendlich vielen Freiheits-  
graden erfaßt. Es werden zwei numerische Verfahren  
zur Berechnung der reellen Eigenwerte von  $T$  und der  
zugehörigen Eigenvektoren diskutiert, die sich aus der  
minnix - Charakterisierung ergeben.

15.5.81

H. Köt (Erlangen)

$C^*$ -Algebren, K-Theorie und topologische dynamische  
Systeme

Es wird skizziert, wie man mit topologischen  
dynamischen Systemen insbesondere mit topologischen  
Markovketten,  $C^*$ -Algebren assoziieren kann.  
Die Berechnung verschiedener K-Funktionen für die  
Algebren ergibt topologische Invarianten für die  
dynamischen Systeme.

21.5.81

J. Arzh (Marseille)

Reduktion binärer Bäume mittels eines eingebebeschränkten "Degré"

Die Reduktion binärer Bäume spielt eine zentrale Rolle innerhalb  
der Konstruktion von Compilern. In diesem Vortrag wird eine Klasse  
von Algorithmen  $D_K$  zur Reduktion binärer Bäume vorgestellt.  
jeder Algorithmus  $D_K$ , welcher einen eingebebeschränkten "Degré"

der Länge  $k$  und einen zusätzlichen Hilfspeicher benötigt, ist eine mögliche Verallgemeinerung der üblichen Kellersmethode zur Reduktion eines binären Baumes.

Es wird zunächst gezeigt, daß die Anzahl der binären Bäume mit  $n$  Blätter, welche mittels  $D_K$  mit  $\leq i$  verfügbaren Hilfszellen reduziert werden können, gleich der Anzahl der binären Bäume mit  $n$  Blätter ist, welche mittels eines Kellers der maximalen Länge  $(k+1)(i+1)-1$  reduziert werden können. Diese Tatsache impliziert, daß  $D_K$  genau dann alle binären Bäume mit  $n$  Blätter reduziert, wenn  $D_K$  genau  $L_{n/(k+1)}$  verfügbare Hilfszellen besitzt. Ferner ergibt sich, daß  $D_{L_{n/(k+1)}}$  bezgl. des Gesamtspeicherplatzes optimal ist. Abschließend wird eine detaillierte Analyse eines Algorithmus  $D_K$  im "Worst case" und "average case" gegeben.

22.5.81

R. Kemp (Saarbrücken)

hieras abgeschlossene Jahrenungen

Zu einem linearen Polynom  $w = w_0 + \sum_{i=1}^n w_i x_i$ ,  $w_i \in \mathbb{Z}$  werden die sogenannten  $w$ -Abschläge für eindeutige Teilungen von  $\mathbb{Z}$  untersucht. Dabei ist zu einer Teilmenge  $X$  von  $\mathbb{Z}$  der  $w$ -Abschluß  $w((X))$  die kleinste Teilmenge von  $\mathbb{Z}$ , die  $X$  und mit  $x_1, \dots, x_r$  auch  $w(x_1, \dots, x_r)$  enthält. z. B. wird im Falle g. g. T.  $(w_i) = 1$  der  $w$ -Abschluß  $w((x))$  für  $x \in \mathbb{Z}$  durch gewisse Restklassen nach einem durch  $w_0, \dots, w_r$  bestimmten Modul beschrieben.

Wolfgang Gaschütz (Kiel)

9.5.81

(3.6.81) Konzentrationsfunktionen auf lokal kompakten Gruppen

In einer gemeinsamen Arbeit mit Atom Mukherjea (USF Tampa) wird der folgende Satz bewiesen: Sei  $\mu$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf den Borelmengen einer nicht kompakten (lokal kompakten) Gruppe  $G$ , die eine kompakte Erweiterung einer pro-Lieschen Gruppe ist. Dann gilt für jede kompakte Teilmenge  $K \subseteq G$  die Beziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{g \in G} \mu^n(Kg) = 0.$$

Diese Beziehung gilt vielleicht für alle nicht kompakten lokal kompakten Gruppen. Vorerst zerfällt der Beweis in einen wahrscheinlichkeitstheoretischen und einen strukturtheoretischen Teil. (Im Seminar Leptin et al.)

(5.6.81) Eine geometrische Analyse von London National Gallery Cat. Nr. 739  
 Diskutiert werden die mathematischen Aspekte der Zentralperspektive im Altarbild des Carlo Crivelli von 1486 aus Ascoli Piceno, heute Lond. Nat. gall ("Verkündigung mit St. Emidius"). Kulturgeschichtlich interessant ist der Konflikt der an der Nahtstelle zwischen den geistesgeschichtlichen Zwängen mittelalterlicher Ikonographie und den in der Frührenaissance gewonnenen Erkenntnissen mathematischer Konstruktion in der Perspektive auftritt. Er manifestiert sich an dem besprochenen Beispiel in einer perfekten Raumperspektive einerseits, in der aber insgeheim eine Inkonsistenz eingeplant ist, die von der theologisch fixierten Ikonographie der Darstellung erzwungen wird.  
 (Mit Dias im Kollegium)

4.6.81

Karl Heinrich Hofmann (Tulane U. u. TH Darmstadt)

9.-6.-81. -  $k$ -summable series and applications to ordinary linear differential equations.

1. Power series with Gevrey conditions.

A power serie  $\hat{f}(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) verfügt in Gevreybedingung, if either  $s > 1$  if there exists  $A > 0$ ,  $C > 0$  such that:  $|a_n| \leq C(n!)^{s-1} A^n$ . Then  $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_{1,A}$ .

We denote  $\mathbb{C}[[x]]_S = \bigcup_{A>0} \mathbb{C}[[x]]_{S,A}$ ,  $\mathbb{C}[[x]]_{(1)} = \bigcap_{A>0} \mathbb{C}[[x]]_{1,A}$ ;  $\mathbb{C}[[x]]_S$  and  $\mathbb{C}[[x]]_{(1)}$  are stable by derivation and are  $\mathbb{Q}$ -algebra.

## 2. Gervay asymptotic expansions.

Let  $V$  be a sector with vertex at the origin  $0$  of  $\mathbb{C}$ .

Let  $f \in A(V)$ , holomorphic on  $V$  and admitting an asymptotic expansion  $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]$  at the origin. We will say that  $\hat{f}$  admits a Gervay asymptotic expansion on  $V$  (of order  $s > 1$ ) if, for each strict subsector  $W$  of  $V$ , there exists  $B_W$  and  $K_W$  such that:  $\sup_{n \in \mathbb{N}} |f^{(n)}(z)| < K_W (n!)^s B_W^n$ . Then  $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_S$ . We will denote  $f \in A_S(V)$ . If  $\hat{f} = 0$ ,  $f \in A_{S,0}(V)$ .

For "small sectors" (opening of  $V < \frac{\pi}{h}$ ) there is an exact sequence:  $0 \rightarrow A_{S,0}(V) \rightarrow A_S(V) \xrightarrow{\mathcal{I}} \mathbb{C}[[x]]_S$ .

For "big sectors" (opening of  $V > \frac{\pi}{h}$ ),  $A_{S,0}(V) = 0$  and the map  $A_S(V) \xrightarrow{\mathcal{I}} \mathbb{C}[[x]]_S$  is no more injective.

If the direction  $\alpha$  bisecting  $V$  is fixed ( $V$  variable with  $\text{if } V > \frac{\pi}{h}$ ) the union of the images of  $\mathcal{I}$  forms the set of series  $k$ -summable in the direction  $\alpha$  (for  $k=1$  we obtain Borel-summable series).

If  $\alpha = \mathbb{R}^+$ , the sum of  $\hat{f}$  is given by the integral formula:  $f(n) = \frac{h}{\pi h} \int_0^{2\pi} \varphi(t) e^{-t \operatorname{Re} \alpha} t^{h-1} dt$ ; with  $\varphi(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n t^n$ .

$\text{If } h \in \mathbb{Q}$  it is possible to compute  $f$  by factorial series.

If  $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]$  is  $k$ -summable in each direction but a finite number, we will say that  $\hat{f}$  is  $k$ -summable ( $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_S$ ;  $S = 1 + \frac{1}{h}$ );  $\mathbb{C}[[x]]_S$  is a  $\mathbb{Q}$ -algebra stable by derivation. The differences of the different sums of  $\hat{f}$  give birth to a module in  $H^1(S^1; \Lambda_S)$  ( $\Lambda_S$  sheaf of holomorphic functions in sectors with exponential decay of order  $h$ ), with "internal" properties.

### 3) Index theorems.

Theorem -

let  $D = a_m(n) \left(\frac{d}{dx}\right)^m + \dots + a_0(n)$  ( $a_i(n) \in \mathbb{C}[n]$ ) a differential operator. Then  $\mathbb{C}[[x]]_n \xrightarrow{D} \mathbb{C}[[x]]_n$  and  $(\mathbb{C}[[x]]_{(1)}) \xrightarrow{D} (\mathbb{C}[[x]]_{(1)})$  are Fredholm operators. It is possible to express the index  $x_0(D)$  (resp.  $x_{(1)}(D)$ ), using the Newton polygon  $N(n)$  of  $D$ .

### 4) Resummation of formal series solutions of differential equations.

let (1)  $x^{k+1} \frac{d}{dx} - A(x)$  be a differential operator of order one ( $A$  being a  $n \times n$  matrix with holomorphic entries:  $A \in \text{End}(\mathbb{C}^n)$ ).

A fundamental solution of (1) has the form:

$$\hat{H}(x) x^n e^{Q(\frac{1}{x})}$$

$\Lambda$  a constant matrix and  $Q(\frac{1}{x})$  a diagonal matrix with polynomials  $q_i(\frac{1}{x})$  as entries.

Let be  $p_{ij}$  the degree of  $q_j(\frac{1}{x}) - q_i(\frac{1}{x}) = q_{ij}(\frac{1}{x})$ . Then it is possible to find a factorization:

$$\hat{H}(x) = \prod_{i,j} \hat{H}_{ij}(x) \quad \text{and} \quad \text{that each } \hat{H}_{ij}(x)$$

is  $p_{ij}$ -ramale and such that if  $H(x) = \prod_i H_{ij}(x)$ ,  $H(x) x^n e^{Q(\frac{1}{x})}$  is a "true" fundamental solution of the equation.

Jean-Pierre RAMIS (Université de Strasbourg)

12.6.81:

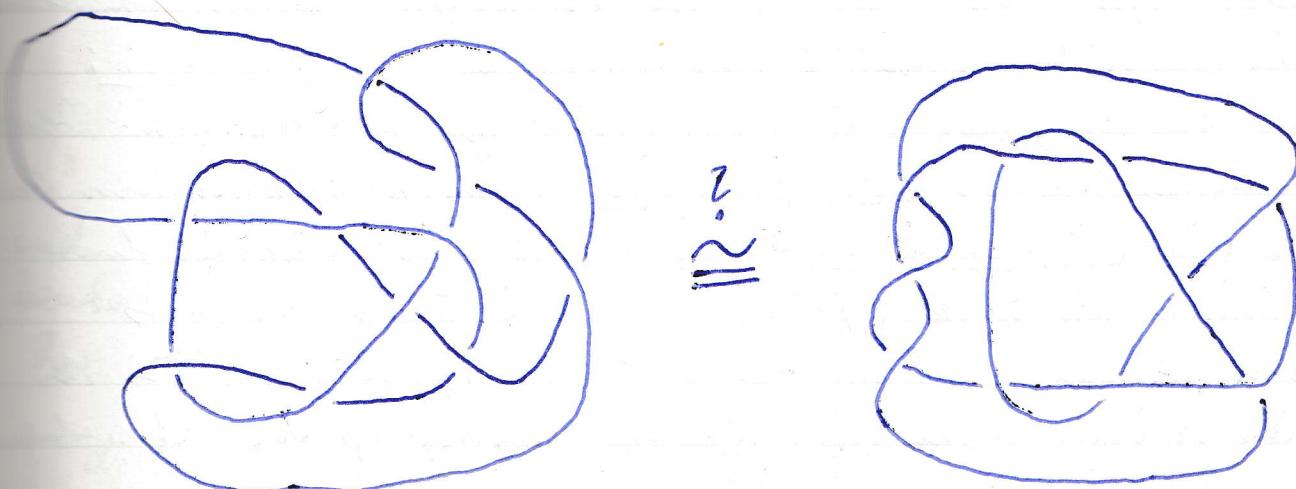
L. A. Nazarova : Survey on the representation theory of partially ordered sets.

# Über das Homöomorphieproblem der 3-Mannigfaltigkeiten

16. Juni 1981

Gefragt ist nach einem Algorithmus, der von zwei gegebenen 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten zu entscheiden gestattet, ob sie homöomorph sein. Die gegebenen Mannigfaltigkeiten können dabei als trianguliert vorausgesetzt werden, was beschränkt uns auf endliche Triangulierungen, also auf kompakte Mannigfaltigkeiten (mit oder ohne Rand).

Der einfachste Spezialfall des Problems - das Homöomorphieproblem für das 3-dimensionale Elementarraumstück - ist eigentlich noch immer ungeklärt. Es erfordert einige Mühe, sich einzumachen, warum dieses Problem nicht-triviale ist. Eine kompliziertere Spezialfall ist das Homöomorphieproblem für Knoten-Außerraume (wobei angenommen wird, daß die zu vergleichenden Knoten in der  $S^3$  liegen). Dieses Problem kann durch einen Algorithmus zur Berechnung von Inkompressibilitätsflächen schließlich gelöst werden (nach einem wesentlichen Beitrag von Thurston, 1976). Da praktische Anwendung des Algorithmus erheblich bis vor kürztem gänzlich ausnahmslos. Es hat sich aber ergaben, daß durch eine Reihe von praktischen (und auch theoretischen) Verbesserungen des Algorithmus nicht-triviale Beispiele, wie etwa



in wenigen Minuten Cyber-Zeit gerechnet werden können,

Wesentlich ist dabei eine Prozedur, die es gestattet, für eine gegebene 3-Mannigfaltigkeit eine „Quasi-Kanonicalität“ zu finden, die eine möglichst kleine Anzahl  $t$  von Ketten benötigt. (Bei dem voraussetzt gezeichneten Kurven kann  $t=16$  erreicht werden.) Hierzu werden Heegaard-Diagramme hergestellt und zwar nicht nur möglichst vereinfacht". Als Maß für das Kompliziertheit dient die folgende Größe:  $\sum (\text{Kettenlänge} - 2)$ , wobei mit „Kettenlänge“ die Anzahl der Buchstaben in der Ablösung der Kurve gemeint ist und die Summe über alle Heegaard-Ketten genommen wird. Für die Vereinfachung werden Whitehead-Zerlegung - Reduktion sowie die Anheftung von „Abknotungs-Haken“ verwendet. Wenn Ketten einer Länge  $< 3$  auftreten, so werden diese (zusammen mit je einem entsprechenden Haken) beseitigt. Es hat sich ergeben, daß die beiden voraussetzt gezeichneten Kurten-Auffassungen zu Heegaard-Diagrammen ähnlich gelten, die auch auf dasselbe „einfachste“ Heegaard-Diagramm vereinfachen lassen. Also sind die Kurten äquivalent erkannt - bereits wenn der Algorithmus zur Berechnung von inkompressiblen flächen möglichst ausgeweitet zu werden beginnt. Es ergab sich, daß genau 3 verschiedene inkompressible (und rands-inkompressible) zweistellige und nicht rands-parallele flächen existieren. Schr verzweigt erwartet die folgende Spekulation: Das oben angegebene Vereinfachung von Heegaard-Diagrammen führt jedes beliebige Heegaard-Diagramm in ein absolut einfaches Diagramm (die betreffenden 3-Mannigfaltigkeiten) mehr (und löst damit das Homöomorphieproblem der 3-Mannigfaltigkeiten in voller Allgemeinheit). Für ein Gesamtbeweis (oder einen Beweis) wäre ich sehr dankbar.

Wolfgang Haken  
Urbana, Illinois

# Prästabilität für $U_2$ (19. 6. 81)

Für einen beliebigen Ring  $A$  mit 1 hat  $B$  als stabilitätsbedingung  $sR_{n+1} \ (n \geq 2)$  wie folgt definiert:  
 zu jeder unimodularen Reihe  $(a_1, \dots, a_n)$  gibt es  $t_{1, \dots, n}$ ,  
 so daß  $(a_1 + a_1 t_1, \dots, a_{n-1} + a_n t_{n-1})$  wieder unimodular  
 ist. Der stabile Raum  $s\Gamma(A)$  ist das Element  $n$ , so daß  
 $A \ sR_{n+1}$  erfüllt. Das wesentliche Stabilitätsresultat  
 für  $U_2$  wurde von Dennis-Vaserstein und Sushil-  
 Tulenbayev, v.d. Kallen bewiesen:

Satz:  $s\Gamma(A)$  reellendlich. Dann gilt

$$U_2(n, A) \rightarrow U_2(A)$$

surjektiv, falls  $n \geq s\Gamma(A) + 1$   
 injektiv, falls  $n \geq s\Gamma(A) + 2$

Das Prästabilitätsproblem für  $U_2$  lautet: Wie sieht  
 der Kern der surjektiven Abbildung  $U_2(n, A) \rightarrow U_2(A)$   
 für  $n = s\Gamma(A) + 1$  aus? Im Vortrag werden Ergebnisse  
 für diesen Kern angegeben und die Beweisidee skizziert.

## II. Kasten

### Die Randverbiegungen der Flächen im „Großen“. (22. 06. 81)

Wir betrachten unendlich kleine Verbiegungen (u.k.v.)  
 und stetige Verbiegungen der Flächen mit Randvorga-  
 bedingungen, insbesonders „Verallgemeinerte Gleitverbiegungen“.  
 Für u.k.v. haben wir folgende Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} \partial_z \bar{\partial} \bar{w} &= 0 \quad (\text{S}) \\ (\bar{\partial} \bar{l}) &= g \quad (\partial S) \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \partial_z w + A w + B \bar{w} = 0 & (\mathcal{D}) \\ \operatorname{Re} \{ \partial_z w + a(z) w \} = 0 & (\mathcal{JD}) \end{cases}$$

(Verallgemeinerte Gleitverbiegungen).

### Satz 1 (V. Kazak)

- V. 1) Ist eine kompakte einfach zusammenhängende Flächestück mit  $K \geq K_0 > 0$ ;
- 2)  $S \in C^{3,M}$ ,  $\partial S \in C^{1,M}$ ,  $\tilde{f} \in C^{1,M}$   $\sigma \in C^{1,M}$   $0 < \mu < 1$ .
- 3)  $\tilde{l}_\varepsilon$  ist eine einparametrische Schar von Vektorfelder, die durch zwei Winkel  $\alpha_\varepsilon$  und  $\beta$  definiert werden. Dabei ist

$$\alpha_\varepsilon = \operatorname{arccos} [\varepsilon \cos \alpha(s)]$$

und  $\alpha(s) \in C^{1,M}(\mathbb{Z})$ ,  $0 < \alpha < \pi$ ,  $0 < \mu < 1$

- B. In der Schar  $\tilde{l}_\varepsilon$ ,  $\varepsilon \in (-\infty, \infty)$  existiert entweder höchstens eine abzählbare Menge von eigentlichen Vektorfeldern oder jedes Vektorfeld ist eigentlich.

Andere geometrische Aufgabe ist mit der Bedingung

$$\lambda_{11} \partial k_R + \mu_{11} \partial \tilde{\tau}_R = \sigma(s)$$

verbunden. Dabei  $k_R$  und  $\tilde{\tau}_R$  Normalkrümmung und geodätische Torsion sind;  $\lambda_{11}, \mu_{11}, \sigma(s) \in C^M$ ,  $0 < \mu < 1$ . Es sei  $\alpha_{\lambda, \mu} = \frac{1}{2\pi} \arg(\lambda_{11} + i\mu_{11})$ ,  $\nu_R(s)$  ist der Index der Fläche  $S$  bezüglich Vektorfeld  $R$  entlang des Randes  $\mathbb{Z}$ .

### Satz 2 (Fomenko V.)

- 1) Wenn  $\sigma \equiv 0$  und  $\alpha_{\lambda, \mu} > -2 - \nu_R(s)$  ist, dann ist  $S$  starf.
- 2) Wenn  $\sigma \not\equiv 0$  und  $\alpha_{\lambda, \mu} > -2 - \nu_R(s)$  ist, dann lässt die Fläche  $S$  u. k. V. dann und nur dann, wenn  $\sigma$  einigen Bedingungen Lösbarkeit genügt.
- 3) Wenn  $\alpha_{\lambda, \mu} \leq -2 - \nu_R(s)$  ist, dann lässt die Fläche  $S$  immer u. k. V. (Bei  $\sigma \not\equiv 0$  haben wir endliche Menge linear unabhängige u. k. V.).

Diese Aufgabe für reduziert zum

$$\begin{cases} d\tilde{\tau} d\tilde{\tau} = 0 \\ \lambda_{11} \partial k_R + \mu_{11} \partial \tilde{\tau}_R = \sigma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{\tau}_R w + Aw + B\bar{w} = 0 \\ \operatorname{Re}\{\tilde{\lambda}(s)w\} = \sigma \end{cases}$$

dabei  $\tilde{\lambda}(s) = -\alpha_{\lambda, \mu} - 2 - \nu_R(s)$  ist.

Ähnliche Frage betrachtet man auch für stetige Verbiegungen der Flächen mit Rand.

V. Kazak (Rostow-am-Don, U-

# Wachstumsfolgen endlich erzeugbarer Gruppen

26. Juni 1981

Es wurde berichtet über Ergebnisse, die in Zusammenarbeit mit Herrn J. Wiegold entstanden sind. Die Wachstumsfolge einer endlich erzeugbaren Gruppe  $G$  ist die ganzzahlige Folge  $(d(G^n))$ , wobei  $X^n$  das direkte Produkt von  $n$  Kopien und  $d(X)$  die minimale Erzeugendenzahl einer Gruppe  $X$  bezeichnen. Falls  $G$  nicht perfekt ist, so ist ihre Wachstumsfolge nach endlich vielen Gliedern eine arithmetische Folge:  $d(G^n) = n d(G/G')$  für alle genügend großen  $n$ . Sei jetzt  $G$  perfekt. Dann gilt

$$d(G^n) \leq d(G) + (d(G)-1) \log_2(n+1)$$

für alle  $n$ . Sollte  $G$  darüber hinaus ein endliches epimorphes Bild der Ordnung  $s > 1$  besitzen, dann gilt auch  $\log_s n \leq d(G^n)$  für alle  $n$ . Die Wachstumsfolge wird also von oben und auch von unten durch logarithmische Folgen beschränkt, und deshalb hat die Wachstumsfolge dasselbe logarithmische Verhalten. Es bleibt der Fall, in dem die perfekte Gruppe  $G$  keine nicht-trivialen endlichen epimorphen Bilder hat.

Sollte  $G$  entweder (a) nur endlich viel maximale Normalteiler besitzen oder (b) ein Element  $g$  besitzen, dessen Bild in jedem nicht-trivialen Bild von  $G$  unendliche Ordnung hat, dann ist  $d(G^n) \leq d(G) + 1$  für jedes  $n$ , so daß die Wachstumsfolge von  $G$  nach endlich vielen Gliedern konstant wird. Insbesondere werden die Wachstumsfolgen von unendlichen einfachen endlich erzeugbaren Gruppen nach endlich vielen Gliedern konstant.

John Wilson  
Cambridge, Großbritannien

## Aspherical Group Presentations.

Let  $G = \langle X; R \rangle$  be a group presentation  
 $\sigma = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  where  $p_i = u_i r_i^{\varepsilon_i} u_i^{-1}$ ,  $r_i \in R$ ,  $\varepsilon_i = \pm 1$   
and suppose  $w$  is the reduced form of  $p_1 p_2 \cdots p_n$ .  
The cancellation process whereby  $p_1 p_2 \cdots p_n$   
can be transformed into  $w$  is representable  
by a labelled planar map called a  
van Kampen diagram. For certain sequences  
spherical maps also enter into the picture.  
A presentation is called diagrammatically aspherical if all such spherical maps  
can be transformed by simple combinatorial  
operations into what is effectively the  
union of trivial spherical maps, i.e.  
spherical maps with only two faces.  
Via an algebraic characterisation of  
diagrammatic asphericity, it can be  
shown that if  $R$  has no proper  
powers then any group with ~~as a~~ a  
diagrammatically aspherical presentation  
has cohomological dimension two. Ol'sanec  
two generator group in which all  
proper subgroups are infinite cyclic has  
a diagrammatically aspherical presentation  
and therefore provides an example  
of a group of cohomological dimension  
which is neither an amalgamated free  
product nor an HNN-extension,  
with free amalgamated subgroup. This  
gives a negative answer to a problem  
posed in the Proceedings of the Durham  
conference on homological methods

in group theory.

Donald J. Collis  
 Queen Mary College London  
 (z. 2t Bochum).  
 (3.7.81)

### Chen-Klassen holomorpher Vektorraumbündel

Die Klassifikation holomorpher Vektorbündel auf  $P_n(\mathbb{C})$  hängt eng mit der Klassifikation der algebraischen Mannigfaltigkeiten  $Y \subset P_n$  zusammen.

Es wurde übersichtartig über die Klassifikation berichtet und insbesondere auf die Lösung zweier Probleme von Hartshorne eingegangen (falls Rang = 3). Man hat etwa den Satz: Ist  $E$  ein hol. VRB vom Rang 3 auf  $P_n$ ,  $n \geq 3$ , so gilt für die Chen-Klassen von  $E$

$E$	$c_1(E)$	$c_2(E)$	$c_3(E)$
semistabil	0	$\geq 0$	$ g  \leq \varepsilon^2 + \varepsilon$
stabil	0	$\geq 2$	$ g  \leq \varepsilon^2 - c_2$
stabil	-1	$\geq 1$	$-\varepsilon^2 \leq g \leq \varepsilon^2 - 2\varepsilon + 2$
stabil	+1	$\geq 1$	$-c_2^2 + 2c_2 - 2 \leq g \leq \varepsilon^2$

Der Fall  $c_1 = 0$  stammt ursprünglich von H. Spindler,  
stabil  
 folgt aber aus dem Fall  $c_1 = -1$ .

Diese Abschätzungen sind alle scharf und in den extremen Fällen (d.h. Gleichheit) kann man die Modulräume genau beschreiben.

10.7.81

M. Schneider  
 (Bayreuth)

## Modulfunktionen und Klassenzahlprobleme

Bei der Lösung des Klassenzahl-Eins-Problems imaginär-quadratischer Körper durch Heegner, Stark und Baker spielen überraschenderweise Modulfunktionen eine ausschlaggebende Rolle. Dies liegt damit zusammen, dass gewisse Modulfunktionen an imaginär-quadratischen Stellen  $a$  die oberen Halbebenen Werte annehmen, welche ganze algebraische Zahlen sind. Entscheidend ist dabei, dass ihr Irrationalitätsgrad eng mit der Klassenzahl des Körpers  $\mathbb{Q}(a)$  zusammenhängt. Von besonderem Interesse sind Bildungen der Form  $f_k(z) = n^{12} \frac{J(n^2)}{D(z)}$ , wobei  $J$  die Diskriminante aus der Theorie der Modulfunktionen bedeutet. Wegen der formalen Analogie zu den Einheitswurzeln (Aufstellen in Werten von L-Funktionen an der Stelle  $s=1$ , Konstruktion von vollständigen Einheitsgruppen) liegt die Vermutung nahe, dass man mit Hilfe der Funktionen  $J_k$  und Geschlechtssternen für gewisse relativ abelsche Erweiterungen imaginär-quadratischer Körper konstruieren kann. Könnte man Ergebnisse dieser Art beweisen, so ließen sich damit erneut das Klassenzahl-Eins-Problem und auch höhere Klassenzahlprobleme lösen.

23.10.81

R. Scherk  
(Köln)

Kombinatorische Verallgemeinerungen  
der Platonischen Körper.

Ein regulärer Inzidenzkomplex (r.i.c.) ist ein Verband (im „ausgearteten“ Fall: eine Vollordnung), in der alle Fahnern (das

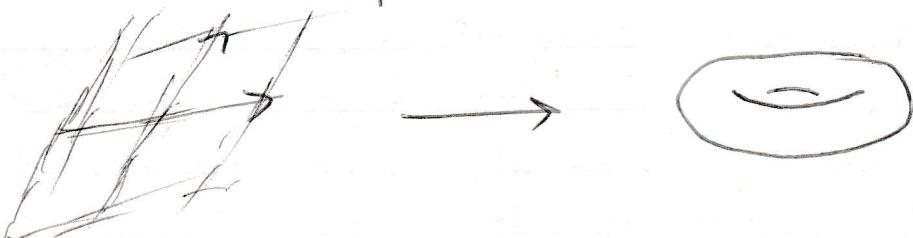
und Ketten  $F_0 < F_1 < \dots < F_m$  maximaler Länge) die selbe Länge  $d+1$  haben;  $d := \dim(\mathcal{K})$ ; der in gewissen Linie zusammenhängend ist, für den es zu jedem  $i$  aus  $0 \leq i \leq d-1$  ein  $k_i$  aus  $\mathbb{N} \setminus \{1\}$  mit „ $F < G$  und  $\dim F = i-1 \wedge \dim G = i+1$ “  
 $\Rightarrow \langle F, G \rangle$  hat genau  $k_i$  „Falten“ gibt, und der regulär ist, d.h. die Automorphismengruppe  $A(\mathcal{K})$  soll fahnentransitiv sein.  
 Die regulären Polytope wie auch die regellosen komplexen Polytope sind v.i.c.e. Es werden weitere Beispiele gegeben, insbesondere das folgende: Ist  $R$  ein Ring mit 1,  $g := \text{card}(R) < \infty$ ,  $G$  eine Untergruppe der Einheitsgruppe von  $R$  mit Ordnung  $n$  und erzeugen die Elemente  $s_{\mu\nu} := g_\mu - g_\nu$  ( $g_\mu, g_\nu \in G$ ) ganz  $R$  so wird  $R$  zu einem 2-dim. Komplex, wenn man seine Elemente Ecken und die add. Nebenklassen von  $G$  Kanten nennt.  
 Ferner wird gezeigt: Bei  $\mathcal{K}$  ein v.i.c.,  $\dim(\mathcal{K}) = d = n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ . Dann ist  $n^\mathcal{K}$  ein v.i.c. der Dim.  $d+1$  mit Ecken  $\mathbb{F} \subseteq \mathcal{K}$ , Facette  $\equiv n^F$ , wo  $F$  eine Facette von  $\mathcal{K}$  ist und  $A(n^\mathcal{K}) = S_n \int A(\mathcal{K})$ .  
 Die Eckenmenge von  $n^\mathcal{K}$  ist  $\{1, 2, 3, \dots, n\}^V$  wo  $V$  die Anzahl der Ecken von  $\mathcal{K}$  ist.

Langer  
 (Dortmund)

## Drinfeld Modules

In his Feb 1969 Bourbaki talk Drinfel'd showed how to associate to a primitive modular form  $f$  a 2-dim.  $\ell$ -adic representation of  $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  such that  $\text{Tr}(p_\ell(\text{Frob}_p)) = \text{eigenvalue of the Hecke operator } T_p$  on  $f$  for all  $p \neq \ell$  and the level of  $f$ .

The young Russian mathematician V. Drinfeld in the early 1970's proved a similar result in the function field case. Instead of a modular form, which can be identified with a <sup>certain automorphic</sup> representation of  $\text{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$  we start with an automorphic representation of  $\text{GL}_2(\mathbb{A}_F)$  where  $F = \mathbb{F}_q(x)$  is a function field and instead of elliptic curves (i.e. lattices in  $\mathbb{C}$ )



Drinfeld uses lattices in  $\mathbb{C}^\infty = \text{completion of}$  the algebraic closure of  $F_\infty$ , the completion of  $F$  at  $\infty$ . These lattices are stable under multiplication by  $a \in A$ . They have an algebraic description and can be collected in a moduli space  $M(\mathbb{Q})$ ; the same is true of these Drinfeld lattices.

hence  $\text{Gal}(F_\infty/F)$  acts on  $H^1(\text{moduli space})$ . Here we find the automorphic representation tensor with the corresponding representations of  $\text{Gal}(F_\infty/F)$ .

6. XI. 81

Dale Husemöller

## Matroide und Greedoiden

Man kann argumentieren, daß Matroide 1935 von Whitney eingeführt wurden als kombinatorisches Abstraktum von linearen (endlich dimensionalen) Räumen (genauer: des Steinischen Ausausdrucks).

In einem ersten Teil des Vortrags wird am Hand von klassischen Resultaten (Rockafellar, Bland, Los Vergnas) gezeigt, wie man wesentliche Resultate aus der Theorie linearer Räume aus einfachen kombinatorischen Sachverhalten direkt ableiten kann, z.B. sind Orthogonalitätsätze oder Alternativsätze vom Farkas Typ durch eine unmittelbare Anwendung von Minty's Färbungssatzma (für mehrfarbige Matroide) zu erhalten.

Zum zweiten Teil werden neuere Resultate (HÄUSMANN & KORTE, JENSEN & KORTE) über Matroid-Eigenschaften und Matroid-Orakel vorgestellt. Hauptergebnisse: (1) Für zahlreiche Matroid-Eigenschaften (z.B. Transversal, Selbstdual, Repräsentierbar, Matroid-Parity-Problem) kann gezeigt werden, daß es reinen polynomiale Independece Test-Orakel Algorithmen gibt. (2) Obwohl man Matroide über verschiedene Konzepte (logisch) äquivalent definieren kann, gilt, daß diese unterschiedlichen Konzepte (als Orakel) algorithmisch nicht äquivalent sind. Insbesondere ist die Gröth-Tardieu-algorithmisch am störssten (aber leider schon für binäre Matroide NP-hart).

Im letzten Teil werden neue Ergebnisse über Greedoiden angegeben (KORTE & LOVÁSZ). Ein Greedoid ist eine Verallgemeinerung des Matroids  $(E, \mathcal{J})$   $|E| < \infty, \mathcal{J} \subseteq 2^E$  (1)  $\mathcal{J} \neq \emptyset$  (2)  $x \subseteq y \in \mathcal{J} \Rightarrow x \in \mathcal{J}$  (3)  $x, y \in \mathcal{J}, |x| > |y| \Rightarrow \exists z \in x \setminus y \text{ s.d. } y \cup \{z\} \in \mathcal{J}$ , bei der das Monotonie-Axiom (2) relaxiert wird. Ein anderer definitorischer Zugang zu Greedoiden geschieht über geordnete Mengen (Wörter). Sei  $\mathcal{L}$  die Menge aller Wörter (ohne Wiederholungen) über einem endlich Alphabet  $E$ ; dann definieren wir ein Greedoid  $(E, \mathcal{L})$  als: (1)  $\mathcal{L} \neq \emptyset$  (2)  $(\alpha) = (\beta \cdot x) \in \mathcal{L} \Rightarrow (\beta) \in \mathcal{L}$  (3)  $\alpha, \beta \in \mathcal{L}, |\alpha| > |\beta| \Rightarrow \exists z \in \alpha \text{ s.d. } (\beta \cdot z) \in \mathcal{L}$ . Wir zeigen (a) beide definitorische Konzepte nicht äquivalent. (2) Ein System  $(E, \mathcal{L})$  mit (1) - (2) erfüllt auch (3) genau dann wenn der Greedy Algorithmus für eine bestimmte Klasse von Funktionen optimal ist. Die Sätze über Matroide u. Greedoiden, Dijkstra Algorithmus, Scheduling Probleme von Lawler und Coffman & Graham sind dann Spezialfälle hierzu.

# Das Einbettungsproblem für algebraische Zahlkörper bei Beschränkung der Verzweigung

Beim Einbettungsproblem handelt es sich um folgende Frage: Gegeben eine euklische galoissche Erweiterung  $K/k$  von Zahlkörpern mit Galoisgruppe  $G(K/k) = \mathcal{G}$  und einer Gruppenerweiterung  $\mathcal{G} \rightarrowtail \mathcal{G}$ . Gesucht ist eine euklische galoissche Erweiterung  $N/k$ , so daß die natürliche Projektion  $G(N/k) \rightarrow G(K/k) = \mathcal{G}$  die gegebene Gruppenerweiterung realisiert. Bei gegebener Primzahlenmenge  $S$  von  $k$  kann man zusätzlich fragen, ob es Lösungen gibt, die außerhalb  $S$  unverzweigt sind. Folgende Fragen sollen untersucht werden:

- (A) Lokal-Global-Prinzip eingeschränkt auf-
- (B) Vorgabe lokaler Lösungen an gewissen Stellen
- (C) Lösbarkeit  $\Rightarrow$  te außerhalb  $S$  unverzweigte Lösbarkeit.

Diese Probleme können homologisch gefasst, <sup>und</sup> mit dem Dualitätssatz von Tate-Poitou auf Fragen in der eindimensionalen Kohomologie transformiert werden, die alle dieselbe Gruppe betreffen. Alle drei Fragen können also einheitlich behandelt werden. Man spaltet das Problem dann mit einer Spezialsequenz auf in zwei Teilstufen euklischer Natur, die dann behandelt werden.

Die Ergebnisse enthalten für  $S = P$  (d.h. ohne Beschränkung der Verzweigung) die bisher bekannten Lokal-Global-Prinzipien (Bayer, Neurisch, Nurmam), besonders genau kann man den Fall eines zyklischen Kerns von  $\mathcal{G} \rightarrowtail \mathcal{G}$  studieren. Schließlich zeigt sich, wie die Frage nach einem speziellen Lokal-Global-Prinzip für kleine Mengen  $S$  zusammenhangt mit den Sätzen von Herbrand und Hilbert über die  $p$ -Klassengruppe des  $p$ -ten Kreisrumpers, und dadurch bearbeitet werden kann.

W. Klingen (z.T. Bem.)

aber die aba-Verknüpfung in einer Gruppe  $\cong$  Verwandtes.

Die fragliche Verknüpfung  $*$  in einer Gruppe  $G$   
ist definiert durch

$$a * b = aba.$$

Es ist dann  $(a * b) * c = a * (b * (a * c))$

und die Gleichung  $a * x = b$  ist eindeutig lösbar.

Genau dann ist die Gleichung  $x * a = b$  " "  
(für alle  $a, b$ ) wenn  $G$  ungerade Ordnung hat.

In einer solchen Gruppe ergeben sich weitere  
Verknüpfungen (mit gleichen Kürzungsregeln):

$a + b$  wird definiert durch  $(a + b) a' (a + b) = b$ ,

$a \circ b$  " " " " $a \circ b = ab + ba$ ,

$+ \text{ und } \circ$  sind kommutativ, die Multiplikation

$\sim G$  ist distributiv über  $+$ .

Besonders interessant ist der Fall  $\sim \text{cl}(G) \leq 2$ ,  
d.h.  $G' \subseteq Z(G)$ . Dann (und genau dann)  
ist  $G'$  eine abelsche Gruppe.

Einige  $p$ -Gruppen ( $p$  ungerade Primzahl) mitolvierende  
Sätze lassen sich unter Beachtung dieses Phänomens  
besonders einfach beweisen.

Definiere ein aba-Grupoid als Menge  $G$  mit einer  
Verknüpfung  $*$ , devant daß  $(*)$  gilt.

Die Abb.  $a \mapsto \bar{a} : x \mapsto a * x$  ( $a \in G$ )  
ist dann eine Permutation von  $G$ , und die  
Abb.  $a \mapsto \bar{a}$  ist ein Homomorphismus von  $G$   
in  $S^*$ , wobei  $S$  die symmetrische Gruppe  
der Menge  $G$  bezeichnet (Def. von  $S^*$  siehe oben).

Es gibt einige Analogien zwischen aba-Grupoiden  
und Lie-Algebren.

Bender (Kiel).

# Quartics and Singular K-3 surfaces. 4.XII '81.

To each compact complex surface  $X$  one can associate the Neron-Severi group of divisor, a group which will be denoted by  $NS(X)$ .

By general (transcendental) theory  $NS(X) = H^{1,1} \cap H^2(X, \mathbb{Z})$  defining  $p$  (the Picard number) as  $\text{rk}_{\mathbb{Q}} NS(X)$  we will then get  $1 \leq p \leq h^{1,1} \leq h^2$  (with  $p = h^{1,1} = h^2$  if  $pg = 0$ )

The calculation of  $p$  (when  $pg \neq 0$ ) is very difficult. The first non-trivial case occurs for quartics in  $\mathbb{P}^3$  (there are singular  $b_1 = 0$ , and have a non-vanishing holomorphic 2-form) and deformations ("perturbations") thereof so called K-3 surfaces.

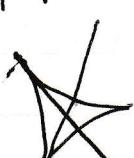
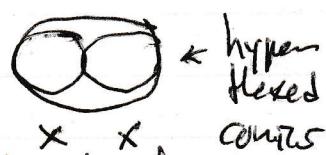
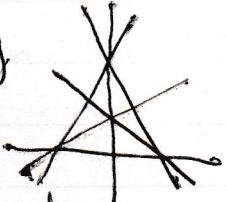
In this case  $h^{1,1} = 20$ , and by a coincidence in Nature the # of moduli also happens to be twenty.

Using the period map (and its bijectivity property) it is easy to see that K-3 surfaces with given Picard number  $p$  form a fan of  $\dim 20-p$ .

My interest has been to find K-3 surface with maximal  $p$  ( $p=20$ ) so called singular K-3 surface. We know that there is only a finite # of such, and in fact Shioda has shown that there is a 1-1 correspondence between such at the space of even, integral, positive definite two dimensional quadratic forms and the action of  $SL(2, \mathbb{Z})$  (the correspondence given by associating to each singular K-3 surface the intersection form (living in  $H^2(X, \mathbb{Z})$ ) to the orthogonal complement of the Neron-Severi group).

I have lots of examples of K-3 surface (as double sextics, and in some case as singular quartics), by using elementary procedure config.

Eg,



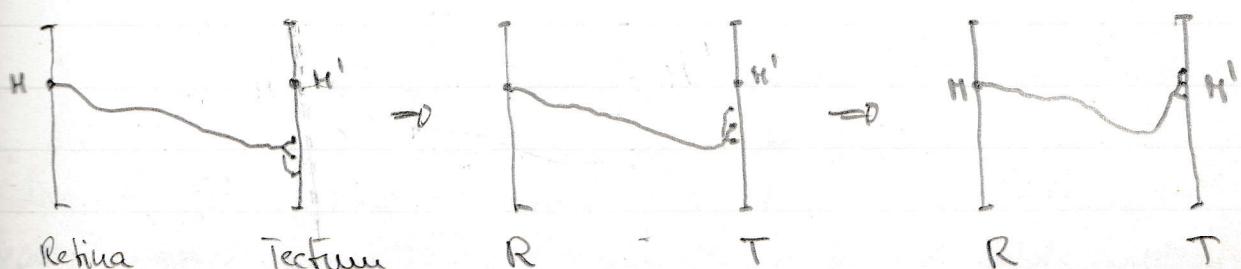
USW-

The task would be to fit these into the Shioda classification, an intriguing and apparently quite hard.

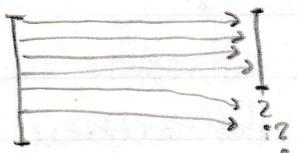
Ulf Petersson (Inst. Mittag-Leffler, Djursholm)

Selbstorganisation im Nervensystem durch Kooperativität und Konkurrenz: Eine analytische Behandlung der Retinotopie - Ontogenese als Beispiel eines solchen Prozesses.

Anatomische Untersuchungen zeigen, dass verschiedene Cortexgebiete durch dicke Nervenfaserbündel verbunden sind. Die Bündel sind meist sehr ordentlich; sie verbinden benachbarte Zellen eines Cortexgebiets mit benachbarten Zellen des Zielgebiets. Die Entstehung einer solchen "topologischen" Projektion lässt sich gut erklären, wenn die Gewebeiteile dicht nebeneinander mit entsprechenden kurzen Faserverbindungen entstehen, nur ausschliessend, die Fasern mit zueinander, aber einander zu driften. Nur ist es aber so, dass sich die verschiedenen Cortexgebiete zuerst unabhängig bilden und erst anschliessend Fasern des einen Gewebes ins andere hinüberwachsen. Oft ist diese erste Zuordnung sehr unordentlich und wird erst durch einen Sortiermechanismus topologisch. Eine erste Theorie dieses Phänomens zu erklären, stammt von Sperry (1943): Er nahm an, dass die entsprechenden Zellen der Gewebe durch den Gen-Code eine komplementäre chemische Markierung erhalten. Eine Faser, die einer mit  $H$  markierten Zelle entstammt, sucht sich im Zielgewebe die mit  $H'$  (kompl. zu  $H$ ) markierte Stelle.



Halbiert man das Zielgewebe, so müssten die eine Hälfte den an kommenden Fasern degenerieren, da sie ihren kopl. Marker nicht finden. Dem ist nicht so, die Gesamtheit der Fasern projiziert auf die restliche Hälfte. Wieso?



R → R T → T

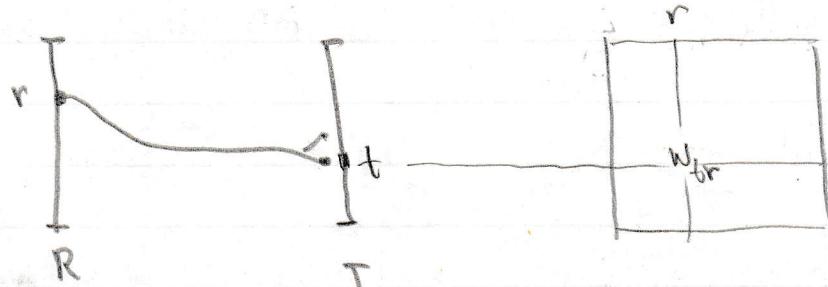


R → R T → T

Willshaw & v.d. Malsburg (1976/77) schlugen deshalb eine neue Theorie vor, welche nur Marker im ersten Gewebe voraussetzt. Diese werden durch den aktuellen Fasernstand ins Zielgewebe transportiert und markieren dieses. Je mehr Fasern einer Umgebung U mit Markierung in die selbe Zielumgebung V projizieren, umso stärker ist V mit U markiert. Die Fasern die aus U stammen tendieren nach V, die restlichen meiden V. d.h. Fasern mit benachbarten Ursprung und benachbarten Zielpunkten kooperieren.

Allerdings kompetieren die Fasern die auf die gleiche Zielzelle projizieren. Zudem ist die Anzahl der Auschlässe (Synapsen) einer Faser beschränkt.

Eine aktuelle Situation w läuft sich im Falle 1-dimer Gewebe in einer Matrix darstellen:



$w_{tr}$  steht für das synaptische Gewicht einer Faser von R im Zielpunkt t ∈ T.

Durch Kooperativität & Kompetitivität ergibt sich das Wachstumsmuster Fig 1 und optimale Muster Fig 2,3



Fig 1

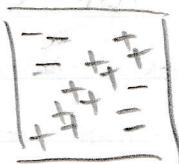


Fig 2



Fig 3

Simulationen zeigten, dass sich eine wunderliche Faseranordnung gemäß Fig 4 - Fig 6 entwickelt.

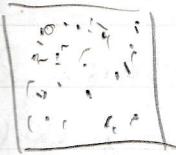


Fig 4

 $\Rightarrow$ 

5

 $\Rightarrow$ 

6

Welche Präg. sich ausbildet wird durch die Anfangssituation festgelegt

v.d. Malsburg u. Häusser haben 1981 das folgende Wachstumsgleichungssystem untersucht. Es formuliert in adäquater Weise die beiden Regeln von N.v.d.H. (1976/77)

$$\dot{W} = \underbrace{\alpha + \beta W \cdot C(W)}_{\text{Wachstumsterm } f} - \underbrace{W \cdot B(\alpha + \beta W \cdot C(W))}_{\text{Begrenzungsterm } W \cdot B(f)}$$

$\alpha$ : positive Ankunftsrate;

$$C_{tr}(W) = \sum_{t',r'} c(t-t',r-r') W_{t'r'}, \quad c(m,n) \text{ Koeffizienten}$$

"gleckenförmig"

der Kooperativitätskoeff.  $j$

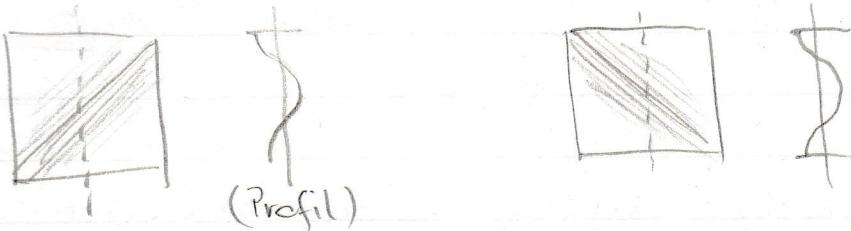
( $N = |T| = |R|$  Anzahl Zellen)

$$B_{tr}(f) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{N} \sum_{t'} f_{tr} + \frac{1}{N} \sum_{r'} f_{tr} \right) \text{ Dämpfungsterm}$$

der Kompetition in Spalten & Zeilen bewirkt.

Die Anfangskonfiguration liege in der Umgebung von 1. Diese Konf.  $W=1$  ist eine stationäre Lösung

① Die lineare Analyse ( $\underline{\lambda} = \underline{\omega} - 1$ ) zeigt das für grosse  $\alpha$  das System gegen  $\underline{\omega} = 1$  konvergiert. Bei kritischem  $\alpha$  sind die instabilen Noden des Systems die sogenannten Diagonalmoden  $\square$ ,  $\square$



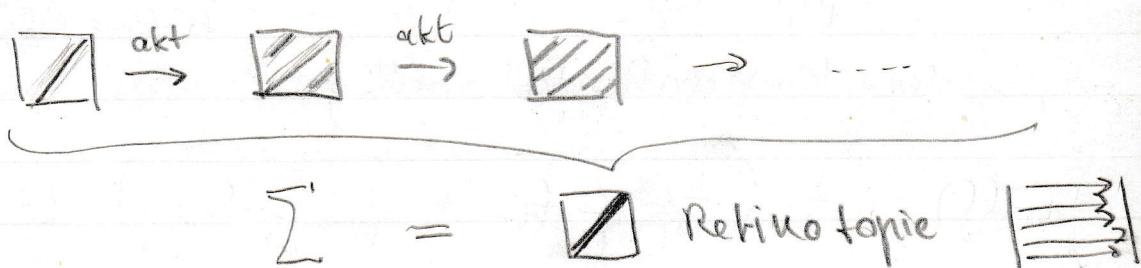
mit dem gleichen größten Eigenwert  $\lambda$ . Jede dieser Noden hat die Tendenz zur Bildung einer Topolog. Proj. ② Die Analyse höherer Ordnung Synergetik! (mit Hilfe der adiabatischen Elimination) zeigt, dass die beiden Noden komplementär. Es ist für  $\underline{\lambda} = \xi \square + \eta \square$  die Approx 3. Ordnung durch

$$\dot{\xi} = \xi \left[ \lambda - (\alpha + \gamma)/4 (\xi^2 + 4\eta^2) \right]$$

$$\dot{\eta} = \eta \left[ \lambda - (\alpha + \gamma)/4 (\eta^2 + 4\xi^2) \right]$$

gegeben. Dieses System hat selektives Verhalten für jene Node, die durch den Anfangszustand favorisiert ist.

③ Die schliesslich euge Projektion wird dadurch garantiert, dass die Diagonalnode auch die höheren Terme der höheren harmonischen Diagonalmodelle in der richtigen Phase aktiviert



M. Deg. 1981

A. Häusler  
Göttingen.

## K-theory of pseudo-tori

A pseudo-torus of dimension  $n$  is the  $C^*$ -algebra generated by  $n$  unitaries  $u_1, \dots, u_n$  which commute modulo the complex numbers. As one example one gets the commutative  $C^*$ -algebra of continuous functions on the usual  $n$ -torus, but in general a pseudo-torus is a simple  $C^*$ -algebra [Slawny, Comm. Math. Physics 24 (1972), 51-170].

It was shown by Powers that a pseudo-torus has many projections (if it is not commutative). The classification of these projections in the case of dimension 2 results from the work of Rieffel and of Pimsner and Voiculescu (in 1978-79). A similar classification of projections in a pseudo-torus of dimension  $\geq 3$  can be achieved by assembling all the pseudo-tori of fixed dimension into a bundle of  $C^*$ -algebras. One discovers that the order structure of  $K_0$  is reminiscent of the ring structure, that of the exterior algebra  $\Lambda^{\text{even}} \mathbb{Z}^n$ , that it has in the commutative case (where the order structure is uninteresting).

From the fact that the various pseudo-tori form a  $C^*$ -algebra bundle, one deduces also a certain continuity of the spectrum of Schrödinger operators with almost periodic potential. Presumably this can be used to show that, generically, the spectrum of such an operator is a Cantor set.

18. 12. 1981

George A. Elliott  
(Copenhagen)