Ausnahmezahlen von quadratischen Formen

Sei f eine ganzzahlige quadratische Form in $n > 2$ Variablen. $m \in \mathbb{Z}$ heißt Ausnahme(zahl) für f, wenn $f(x) = m$ lösbar ist in $\mathbb{Z}_p$ für alle Primzahlen p und ∞, aber $f(x) = m$ in $\mathbb{Z}$ unlösbar. Es wird ein Überblick über die bekannten Ergebnisse über Ausnahmen gegeben. Insbesondere wird die effektive Bestimmung von Ausnahmen untersucht, besonders im Fall von definiten geraden unimodularen quadratischen Formen. Die Dimension n ist in diesem Fall ein Vielfaches von 8: die Fälle 8, 16, 24 sind bekannt, in den Dimensionen 32, 40, liegen vollständige Ergebnisse vor (nur 2 kann als Ausnahme auftreten!), die Dimensionen 48, 56, 64, 72 sind teilweise gelöst. Als Kuriosität sei vermerkt, daß es mehr als $7 \cdot 10^{51}$ Gitter in Dimension 40 gibt mit gleicher Thetareihe.

8.1.82

Meinhard Peters (Münster)

Real Abelian Varieties

Let X be a scheme over $\mathbb{C}$, smooth, projective, irreducible ....

We look at the following problems:

1) when $\exists\, Y/_{\mathbb{R}}$ such that $Y \times_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong X$

2) If $Y_1/_{\mathbb{R}}$ and $Y_2/_{\mathbb{R}}$ are such that $Y_1 \times_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong Y_2 \times_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ when do we have $Y_1 \cong Y_2$

3) classify the Y's such that $Y \times_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong X$ for a given X.

4) What are the relations between $Y(\mathbb{R})$ the set of $\mathbb{R}$-rational points of Y and Y.

pb. 1) has a positive answer if and only if there exists an antiholomorphic involution S on $X = \mathfrak{X}(\mathbb{C})$.

In this context pb. 2 can be reformulated:

pb. 2) has a positive answer if and only if for the corresponding S_1 and S_2 there $\exists\, \varphi \in \mathrm{Aut}(X)$ such that $S_2 = \varphi^{-1} . S_1 . \varphi$.

pb. 3 and pb. 4 have for the moment no general answer, but if we consider the group $G = \{1, S\}$ and its action on X, we get an invariant λ of (X, S) "the Comessatti char. of (X, S) such that:

$$\mathrm{Alb}(X) \cong \left(\mathbb{R}/\mathbb{Z}\right)^q \times H^1(G, H^1(X, \mathbb{Z})) \cong \left(\mathbb{R}/\mathbb{Z}\right)^q \times \left(\mathbb{Z}/2\right)^{q-\lambda}$$

Hence for an abelian variety we have that $\mathfrak{X}(\mathbb{R})$ is completely determined by:

1) the irregularity q ; 2) the Comessatti char. λ (~~[illegible]~~

For curves writing again $H^1(G, H^1(X, \mathbb{Z})) \cong (\mathbb{Z}/2)^{g-\lambda}$ (g the genus) we get that if $X_{\mathbb{R}} \neq \emptyset$ then $\lambda = g - r + 1$ where r is the nb. of connected components of $X_{\mathbb{R}}$.

if $X_{\mathbb{R}} = \emptyset$ $\quad \lambda = g$ (for g even) or $\lambda = g - 1$ (g odd).

This answers pb. 4) for curves and abelian varieties.

pb. 3) for abelian varieties has the following partial answers:

- There exists exactly $2^{q-\lambda}$ real structures of the form $(X, t_a S)$, t_a translation by $a \in X$, only one of which has real points.
- If X is simple and of CM-type there are exactly 2 real structures with real points.
- If X is simple and has multiplication algebra of type I the nb. of real structures with real points can be explicitly computed from the knowledge of $\mathrm{End}_0(X) = k$ and the action of S on $\mathrm{End}_0(X)$ in general we have that this nb. is $\leq 2^{q/2+1}$ $q = \dim X$ = the irregularity.

For curves we obtain a "Real Torelli Th." in terms of the invariants g, λ and an extra invariant ε (orthosymmetric or diasymmetric char. depending on whether X/G is orientable or non orientable).

Incidentally in terms of Abelian varieties this last invariant is an invariant of the polarisation and gives an answer to pb 3) for polarised Abelian varieties.

15. 1. 82 R. SILHOL (Regensburg)

Surgery and Fixed Point Free Group Actions

We pose and answer the following naive question about transformation groups: Let $\bar{\mu}$ denote a free action of the cyclic group $\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$ on S^n. Can one extend $\bar{\mu}$ to a free action μ of $\mathbb{Z}/hk\mathbb{Z}$ on S^n?

Each such action $\bar{\mu}$ has an invariant, $\tau(\bar{\mu})$, the Reidemeister torsion. Indeed for general actions of a finite group G on a simplicial complex X (with a mild condition) one has the invariant $\tau_G(X)$. It lives in $K_1(R_G \otimes \mathbb{Q})/(\pm G)$ where $R_G = \mathbb{Z}G/(\Sigma)$, Σ = the sum of the elements of G. If H is a subgroup of G we prove

Theorem 1: There is a map $tr : K_1(R_G)/(\pm G) \longrightarrow K_1(R_H/(\pm H))$ and a map $tr : K_1(R_G \otimes \mathbb{Q}/(\pm G)) \longrightarrow K_1(R_H \otimes \mathbb{Q}/\pm(H))$ such that these are natural with respect to coefficient change, and for X as above,

$$tr\ \tau_G(X) = \tau_H(X).$$

In case $G = \mathbb{Z}/hk\mathbb{Z}$, $H = \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$ one has a natural action μ_0 of G on S^{2n-1} by complex multiplication and of H too – call this action $\bar{\mu}_0$. Of course $tr\ \tau(\mu_0) = \tau(\bar{\mu}_0)$. Wall proved that for any free action $\bar{\mu}$ of $\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$ on S^{2n-1}, the quotient $\tau(\bar{\mu})/\tau(\bar{\mu}_0)$ is in the image of $K_1(R_H)/(\pm H) \xrightarrow{i} K_1(R_H \otimes \mathbb{Q})/(\pm H)$. Since this map is injective we write $\Delta(\bar{\mu})$ for that element such that $i\,\Delta(\bar{\mu}) = \tau(\bar{\mu})/\tau(\bar{\mu}_0)$

Theorem 2: Assume $n \neq 2$. A free action $\bar{\mu}$ of $\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$ on S^{2n-1} extend to a free action of $\mathbb{Z}/hk\mathbb{Z}$ on S^{2n-1} $\iff$ $\Delta(\bar{\mu})$ is in the image of $tr : K_1(R_{\mathbb{Z}/hk\mathbb{Z}})/(\pm G) \longrightarrow K_1(R_{\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}})/(\pm H)$.

The proof proceeds via surgery theory

Corollary 1: Let p be a prime. Every free $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ action on S^{2n-1}, $n \neq 2$ extends to a $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ action $\iff$ the norm map $N : \mathbb{Z}[\zeta_{p^2}]^\times \longrightarrow \mathbb{Z}[\zeta_p]^\times$ is onto. (It is a conjecture of Iwasawa, of long standing that N is indeed onto)

Corollary 2: Any free $\mathbb{Z}/h$ action on S^n, h odd, extends to a free $\mathbb{Z}/2h$ action

Corollary 3 (John Ewing): For each prime $p \geq 5$ and integer $k \geq 2$, with $n \neq 2$, there exists a $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ action on S^n which does not extend to a $\mathbb{Z}/p^{k+1}\mathbb{Z}$ action

22.1.82

Frank Connolly, University of Notre Dame (U.S.A.)
z.Zt in Bremen

Analytishe Theorie der metaplektischen Gruppen

Sei G eine einfach zusammenhängende lineare algebraische Gruppe definiert über einem Körper F. Es kann zentrale Erweiterungen $1 \to C \to \tilde{G}(F) \to G(F) \to 1$ geben. Solche Gruppen $\tilde{G}(F)$ heißen metaplektische Gruppen. Ist F lokal, $\mathrm{Card}(\mu_n(F)) = n$, kann man $C = \mu_n(F)$ wählen. Sei k ein globaler Körper, $\mathrm{Card}\, \mu_n(k) = n$. Die lokalen Erweiterungen liefern eine Erweiterung der adelschen Gruppe

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \mu_n(k) \arrow[r] & \tilde{G}_{/k}(\mathbb{A}) \arrow[r] & G_{/k}(\mathbb{A}) \arrow[r] & 1 \\ & & & G(k) \arrow[u] \arrow[ul, dashed] & \end{tikzcd}$$

Ausgezeichnet zerfällt diese Erweiterung über $G(k)$. Der Gegenstand des Vortrags ist die Theorie der automorphen Formen für $(\tilde{G}_{/k}(\mathbb{A}), G(k))$. Im Fall $G = GL_r$ haben Kazhdan und der Verfasser eine besonders „kleine" automorphe Darstellung konstruiert, die im Fall $r = n-1$ Anwendungen auf der Theorie Gaußscher Summen hat. Die volle arithmetische Bedeutung bleibt unklar (und interessant).

(19. 1. 82) S. J. Patterson (Göttingen).

p - Normalteiler und $GF(p^n)$ - Moduln.

Ist W ein elementar-abelsches p-Normalteiler der endlichen Gruppe G, so wird definiert: $I_W(G) = \{ V \subseteq W \mid (i)\ [V, G] = V, (ii)$ Die auf $V / C_V(O^p(G))$ induzierte Darstellung ist irreduzibel $\}$.
Es wird die Struktur von $\langle I_W(G) \rangle$, der Elemente von $I_W(G)$ und der darauf induzierten Gruppen untersucht. Insbesondere erhält man Aussagen über $\mathrm{Hom}_{GF(p)G}(U)$, wobei U ein nichttrivialer irreduzibler Faktormodul eines Elementes aus $I_W(G)$ ist. Außerdem wurden Fragen der (I_n)-Stabilität von $GF(p)$ Darstellungen endlicher Gruppen betrachtet

5. 2. 82 Bernd Baumann (Gießen)

Über modulare Darstellungen endlicher Gruppen

R. Brauer hatte 1964 gezeigt, daß für jede Primzahl $p > 0$ und jede natürliche Zahl $a \geq 0$ es nur endlich viele Gruppen G der Ordnung $|G| = p^a q$, $(p,q) = 1$, gibt derart, daß der Hauptblock B_0 von G der einzige p-Block von G ist.

Es wurde über Möglichkeiten der Klassifikation dieser Gruppen G gesprochen und der Beweis des folgenden Ergebnisses skizziert

<u>Satz</u>. Sei G eine endliche Gruppe mit einer zyklischen Sylow p-Untergruppe $D \neq 1$. Genau dann ist B_0 der einzige p-Block von G, wenn $O_{p'}(G) = 1$ und $D \trianglelefteq G$.

<u>Folgerung 1</u>. Eine nicht-auflösbare Gruppe G mit zyklischer p-Sylowgruppe $D \neq 1$ besitzt mindestens 2 p-Blöcke.

<u>Folgerung 2</u>. Eine nicht-auflösbare Permutationsgruppe G vom Primzahlgrad $p \geq 5$ besitzt einen p-Block vom Defekt Null.

(12. 2. 82)

Gerhard Michler (Essen)

<u>Möbius transformations and cross-ratios in R^n.</u>

The group $M(\bar{R}^n)$ of Möbius transformations in R^n is generated by all similarities $fx = mx + b$, $b \in R^n$, $f'(x) = m = \lambda k$, $\lambda > 0$, $k \in O(n)$ together with the inversion $x^* = x/|x|^2$. It is noted that $(x^*)' = |x|^{-2}(I - 2Q(x))$ where I is the identity matrix and $Q(x)_{ij} = \dfrac{x_i x_j}{|x|^2}$.

All $f \in M(\bar{R}^n)$ have derivatives $f'(x) = |f'(x)| \cdot \dfrac{f'(x)}{|f'(x)|}$ where the norm $|f'(x)|$ is such that $\dfrac{f'(x)}{|f'(x)|} \in O(n)$.

The convenient formula $|fx-fy| = |f'(x)|^{1/2}|f'(y)|^{1/2}|x-y|$ proves the invariance of the <u>absolute cross-ratio</u> $|x,u,v,y| = \dfrac{|x-v||y-u|}{|x-y||u-v|}$.

There are two ways of constructing simple standard Möbius mappings which take u, v into $0, \infty$. They can differ only by multiplication with a conformal matrix λk. This leads to

$$(x^*-v^*)^*-(u^*-v^*)^* = \lambda k\left[(x-v)^*-(u-v)^*\right].$$

Comparison of absolute values and „arguments" shows that $\lambda = |v|^2$ and $k = I-2Q(v)$. The latter is seen by differentiation with respect to x and leads to the important identity

$$I-2Q(x^*-y^*) = (I-2Q(x))(I-2Q(x-y))(I-2Q(y))$$

and more generally

$$I-2Q(fx-fy) = \frac{f'(x)}{|f'(x)|}(I-2Q(x-y))\left(\frac{f'(y)}{|f'(y)|}\right)^{-1}.$$

As a consequence, the trace of the matrix

$$\Phi(x,y,u,v) = (I-2Q(x-u))(I-2Q(x-v))(I-2Q(y-v))(I-2Q(y-u))$$

is invariant. This is a counterpart of the absolute cross-ratio.

An easier, but less explicit way to construct a complex cross-ratio is to observe that any four x, u, v, y lie on an S^2 (which may degenerate to a plane). If σ is a conformal mapping $S^2 \to \mathbb{C}$ we may define $(x, u, v, y) = (\sigma x, \sigma u, \sigma v, \sigma y)$. The only catch is that the orientation of S^2 is in doubt so that (x, u, v, y) is determined only up to complex conjugation. It can be made unique by requiring $\operatorname{Im}(x, u, v, y) \geqq 0$.

The group $M(\bar{R}^n)$ extends trivially and isomorphically to the Möbius group of the upper half-space $M(H^{n+1})$. H^{n+1} comes equipped with the Poincaré metric. The geodesics are the lines and semi-circles orthogonal to R^n. A geodesic is determined by its end points x, y; denote it by $l(x,y)$. There is a simple formula for the shortest n.e. distance d between $l(x,y)$ and $l(u,v)$ is given by

$$\cosh d = |x, u, v, y| + |x, v, u, y| .$$

The shortest distance is of course along the common normal, and the formula is proved by choosing $(0, \infty)$ as the common normal. In the same way there is an angle φ between the geodesics obtained by parallel translation of $l(x,y)$ along the normal until it intersects $l(u,v)$. This angle is given by $\cos\varphi = |x, u, v, y| - |x, v, u, y|$.

Together, $\tau = d + i\varphi$ is known as the <u>complex distance</u> between the two geodesics, and it can be found directly by solving the equation

$$(x, u, v, y) = (-1, -e^{\tau}, e^{\tau}, 1).$$

The Möbius transformations can also be expressed in terms of Clifford numbers. Recall that the Clifford algebra Cl^n is generated by $n-1$ imaginary units $e_1, \ldots, e_{n-1}$ satisfying $e_i e_j = -e_j e_i$ for $i \neq j$ and $e_i^2 = -1$. The Clifford numbers are thus of the form

$$a = \sum a_I \, e_I \quad , \quad I = i_1 \ldots i_p \; (0 < i_1 < \ldots < i_p < n).$$

There are three different "conjugates"

$$a' = \sum (-1)^p \, a_I \, e_I$$

$$a^* = \sum (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} \, a_I \, e_I$$

$$\bar{a} = (a')^* = (a^*)'.$$

They satisfy $(ab)' = a'b'$, $(ab)^* = b^* a^*$, $\overline{(ab)} = \bar{b}\,\bar{a}$.

A subspace V is formed by all vectors $x = x_0 + x_1 e_1 + \ldots + x_{n-1} e_{n-1}$ and there is a multiplicative subgroup formed by the <u>regular elements</u> a characterized by $aV = Va'$. For regular elements $a\bar{a} = |a|^2 = \sum a_I^2$.

With regular elements a, b, c, d as coefficients one considers the matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ and forms

$$g x = (ax+b)(cx+d)^{-1}.$$

It turns out that g maps V on itself if $a^*c = c^*a$, $d^*b = b^*d$, $d^*a - b^*c = 1$. The matrices with this property form a group isomorphic to $M(\bar{R}^n)$.

Finally, if we write $z = x + y e_n$, $x \in V$, $y > 0$ then $M(H^{n+1})$ is formed by the mappings $g z = (az+b)(cz+d)^{-1}$.

In the third lecture the emphasis was on hyperbolic trigonometry modelled on a paper by W. Fenchel, which unfortunately has never been published.

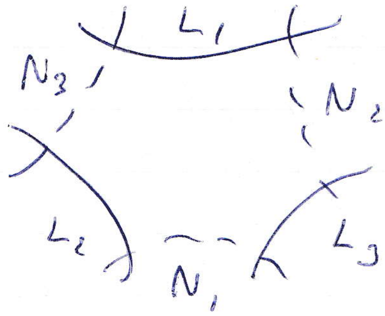
If the sides and angles of a triangle in H^n are a, b, c and A, B, C then the hyperbolic laws of sines and cosines are expressed by

$$\frac{\sin A}{\operatorname{sh} a} = \frac{\sin B}{\operatorname{sh} b} = \frac{\sin C}{\operatorname{sh} c}$$

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \cos C.$$

They are very easy to prove.

It is much more interesting to consider "triangles" whose sides do not meet, or, in projective parlance, whose sides meet beyond the absolute. The philosophy is that a set of lines with a common normal are regarded as passing through an „ideal point" which is then identified with the normal. In this sense any three non-intersecting lines ~~word~~ L_1, L_2, L_3 would determine a triangle with vertices N_1, N_2, N_3 (provided that they do not have a common normal)



The sides and angles are measured by complex distances. For instance, the size of L_1 is $\tau(N_2, N_3)$ and the size of the angle N_1 would be $\tau(L_2, L_3)$.

The history is not clear, but in 1881 Schilling announced, with a sketch of proof, that in the case of H^3 the trigonometrical formulas remain valid with this interpretation. Fenchel claims that Schilling's proof is insufficient and he gives his own.

Very briefly, it goes as follows:

Every line $L \in H^3$ can be identified with a <u>line matrix</u> $L \in SL_2(\mathbb{C})$ with trace 0 whose fixed points are the end points of the line. The corresponding Möbius transformation is a 180° rotation about the line L.

The lines L and M intersect at right angles if and only if $\operatorname{tr} LM = 0$ and this is equivalent to $LM = -ML$. Moreover, for any L, M $\operatorname{tr} LM = -2 \operatorname{ch} \tau(L, M)$, and if N is the common normal of L and M, then $\operatorname{tr} LNM = -2i \operatorname{sh} \tau(L, M)$.

Because of this the law of sines translates to

$$(*) \quad \operatorname{tr} N_2 L_1 N_3 \cdot \operatorname{tr} L_3 N_2 L_1 = \operatorname{tr} N_3 L_2 N_1 \cdot \operatorname{tr} L_2 N_1 L_3 .$$

However, any two unimodular matrices A, B satisfy $\operatorname{tr} AB + \operatorname{tr} A^{-1} B = \operatorname{tr} A \cdot \operatorname{tr} B$. Hence

$$\operatorname{tr} N_2 L_1 N_3 \cdot \operatorname{tr} L_3 N_2 L_1 = \operatorname{tr} N_2 L_1 N_3 L_3 N_2 L_1 -$$

$$\operatorname{tr} N_2 L_1 N_3 L_1 N_2 L_3$$

and by use of $N_2 L_1 = -L_1 N_2$ and $L_1^2 = N_2^2 = -I$ this reduces to $-2 \operatorname{tr} N_3 L_3$. The right hand member of (*) is found to have the same value, and the law of sines follows. The proof of the law of cosines is similar but requires more work.

1.–5. 4. 1982 Lars V. Ahlfors

Zur Lösung schwieriger kombinatorischer Optimierungsprobleme

Bekanntlich kann man die kombinatorischen Optimierungsprobleme grob in zwei Klassen einteilen: die einfachen (polynomial lösbaren) und die schwierigen (NP-vollständigen) Probleme. Falls P≠NP, wird es niemals möglich sein Algorithmen zu entwickeln, die schwierige Probleme praxisrelevanter Größenordnungen in polynomialer Zeit lösen; genauer, die alle Probleme dieser Art lösen können. Da jedoch fast alle kombinatorischen Probleme, die in der Realität auftreten, NP-vollständig sind, ist es notwendig, Verfahren zu entwickeln, die entweder bestimmte Spezialfälle effizient lösen oder "im Durchschnitt" vernünftige Laufzeiten haben.
In diesem Vortrage werden Ansätze skizziert, die auf polyedertheoretischen, graphentheoretischen und zahlentheoretischen Überlegungen basieren und z.T. Hilfsmittel aus der Topologie, der kommutativen Algebra oder Matroidtheorie benutzen. Hierzu sind LP-Schnittebenenverfahren entwickelt worden, die auf Computern implementiert wurden und zu sehr guten Rechenergebnissen geführt haben. Die Dimensionen der in der Praxis lösbaren Probleme konnte z.T um 50% bis 300% verbessert werden.

Martin Grötschel (Bonn)

(28.4.82)

Leopoldt's conjecture and algebraic groups.

Let α_{ij}, $(1 \le i \le d, 1 \le j \le \ell)$ be algebraic numbers all different from zero, τ an embedding of $\overline{\mathbb{Q}}$ into $\mathbb{C}$, and for a prime p, τ_p an embedding of $\overline{\mathbb{Q}}$ into a p-adic field $\mathbb{C}_p$. Assume that the numbers $\tau_p \alpha_{ij}$ are p-adic units. Denote by r_p the rank of the matrix $(\log_p \tau_p \alpha_{ij})$, and by r^0 the rank of the real matrix $(\log |\tau \alpha_{ij}|)$. We conjecture that r_p does not depend on p, and that $r_p \geqslant r^0$. This is a consequence of classical conjectures on the algebraic independence of (p-adic) logarithms of algebraic numbers, and a consequence would be an affirmative answer to a conjecture of Leopoldt on the p-adic rank of the units of an algebraic number field.

A partial answer is given, namely $r_p \geqslant r^0/2$ and $r_{p_1} \geqslant r_{p_2}/2$, using a generalisation of Schneider's method to several variables, together with a zero-estimates due to D. W. Masser.

We generalize this problem to a connected commutative algebraic group G over $\overline{\mathbb{Q}}$ as follows. Let Γ be a finitely generated subgroup of $G(\overline{\mathbb{Q}})$. Let v be a finite place of a (sufficiently large) number field K such that there exists a subgroup Γ' of finite index of Γ contained in a compact subgroup of $G(K_v)$. Then $r_v(\Gamma)$ is defined as the dimension of the K_v vector space generated in the tangent space $T_G(K_v)$ ~~par~~ by $\log_v \Gamma'$. There is a similar definition for an archimedian place v. Then the conjecture is : r_v is independent of v, and the result is : $r_{v_1} \geqslant r_{v_2}/3$. The main tool, beside Schneider's method in several variables, is a zero estimate on group varieties due to Masser and Wüstholz.

Coming back to the exponential case $(G = \mathbb{G}_m^d)$, the following open problem arises : to give a description of the rank of a matrix $(L_{ij}(X_1, \dots, X_n))$, where $L_{ij} = K X_1 + \dots + K X_n$ are homogeneous linear forms over a field K of characteristic 0.

30 Avril 1982.

Michel Waldschmidt (Paris)

Periodic homeomorphisms of 3-manifolds.

Let M be a closed, orientable, irreducible sufficiently large 3-manifold. Denote by $\mathcal{H}(M)$ the group of all PL homeomorphisms $M \to M$. We discuss the problem of classifying the finite cyclic subgroups of $\mathcal{H}(M)$ in terms of the natural representation $\Psi : \mathcal{H}(M) \longrightarrow \mathrm{Out}\,\pi_1(M) = \mathrm{Aut}\,\pi_1(M) / \mathrm{Inn}\,\pi_1(M)$.

Suppose G is a finite cyclic subgroup of $\mathrm{Out}\,\pi$.
We view the problem in terms of the following diagram:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{H}(M) \arrow[d, "\Psi"] \\ G \arrow[ur, dashed, "\hat{\varphi}"] \arrow[r, hook, "\varphi"] & \mathrm{Out}\,\pi_1(M) \end{tikzcd}$$

If $\hat{\varphi}$ is a homomorphism making the diagram commute then we say $\hat{\varphi}(G) \subset \mathcal{H}(M)$ is a <u>geometric</u> <u>representation</u> for G.

There are three parts to the classification problem in this setting:

1) <u>Existence</u> – Does there exist a lifting $\hat{\varphi}$?
2) <u>Uniqueness</u> – If $\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2$ are both liftings of φ, how are the groups $\hat{\varphi}_1(G)$ and $\hat{\varphi}_2(G)$ related?
3) <u>Computation</u> of $\mathrm{Out}\,\pi_1(M)$.

The Existence problem has been solved by B. Zimmermann (1981) for <u>any</u> finite group $G \subset \mathrm{Out}\,\pi$: a lifting exists $\Longleftrightarrow \exists$ a group extension $1 \to \pi_1(M) \to E \to G \to 1$ corresponding to $\varphi : G \hookrightarrow \mathrm{Out}\,\pi_1(M)$.

For the uniqueness problem, we have the

<u>Conjecture</u>: Let $g, h \in \mathcal{H}(M)$ each have period p. Suppose $\Psi(g) = \Psi(h)$.

(A) If $\pi_1(M)$ is centerless then $\exists\ \alpha \simeq 1$ ($\alpha \in \mathcal{H}(M)$) such that $\alpha g \alpha^{-1} = h$.

(B) If $\pi_1(M)$ has nontrivial center, then $\exists\ \beta$ embedded in an action of $SO(2)$ on M such that $\beta^p = 1$, $\beta g \beta^{-1} = g$ and $\exists\ \alpha \simeq 1$ in $\mathcal{H}(M)$ such that $\alpha g \beta \alpha^{-1} = h$ (possibly $\beta = id$).

<u>Theorem</u>. This conjecture is true in the following cases:

(1) $p = 2$ and $H_1(M; \mathbb{Z})$ infinite
(2) $p \geq 2$ and prime when M is a graph manifold
(3) $p \geq 2$ and prime when $\exists$ an h-equivariant hierarchy for M.

Jeffrey L. Tollefson (Connecticut)

7 May 1982

Versuchspläne mit maximaler Information.

In linearen statistischen Modellen gewinnt man optimale Versuchspläne als Lösungen des Problems:

Maximiere $j(C(M))$ für $M \in \mathfrak{M}$.

Dabei ist $\mathfrak{M}$ eine kompakte, konvexe Menge nichtnegativ definiter $k \times k$ Matrizen, $C(M) = (K'M^{-}K)^{-1}$ ist die Informationsmatrix für die s (von k) zu untersuchenden Parameter $K'\beta$ und j ist eine positive, konkave, positiv homogene Funktion.

Im Vortrag wird gezeigt, wie sich mit Methoden der konvexen Analysis die optimalen Lösungen beschreiben lassen. Diese Herleitungen stützen sich wesentlich auf das Zusammenspiel mit einem zugehörigen dualen Optimierungsproblem. Insbesondere werden damit auch die bisher offenen Fälle erfaßt, Optimalität von singulären Matrizen M bzw. Optimalität bei nicht-differenzierbaren Zielfunktionen j zu charakterisieren.

Die allgemeine Theorie wird verdeutlicht einerseits am klassischen Beispiel polynomialer Regression über $[-1,+1]$ und andererseits am Beispiel balanzierter unvollständiger Blockpläne (= BUB) für v Behandlungen in b Blöcken. Bisher sind BUB's fast ausschließlich mit kombinatorischen Mitteln untersucht worden.

12. Mai 1982

Friedrich Pukelsheim
(Freiburg im Breisgau)

Markoffsche Felder und Martingalkonvergenz

In der Theorie stochastischer Prozesse mit mehrdimensionalem Index haben Markoffsche Felder einerseits und Martingale mit mehrdimensionalem Parameter andererseits eine besonders aktive Rolle in der Forschung der letzten zehn Jahre gespielt. Es hat allerdings bisher zwischen diesen beiden Arbeitsrichtungen sehr wenig Interaktion gegeben, u.a. deswegen nicht, weil die bisherigen Resultate über Martingale mit mehrdimensionalem Parameter auf Annahmen über bedingte Unabhängigkeiten beruhen, die für Markoffsche Felder typischerweise nicht erfüllt sind.
Im Vortrag wird gezeigt, daß sich mithilfe der Dobrushin'schen Kontraktionstechnik diese Barriere beseitigen lässt; zum Beispiel impliziert $c < \frac{1}{2}$ (c = Dobrushin's Interaktionsparameter), dass beschränkte Martingale $X_{n,m}$ für $n,m \uparrow \infty$ fast sicher konvergieren.

14. Mai 1982

Hans Föllmer, ETH Zürich

Grenzwertverhalten bei funktionalen Grenzwertsätzen

Eine Klasse von Anpassungstests ist in der Statistik schon lange benutzt. Es ist dies die Klasse der Cramér-von Mises tests, d. h. Tests für das Vorliegen einer Verteilung F von der Form

$$w_n = n \int_0^1 (F_n(t) - F(t))^2 \, dF(t),$$

wo $F_n(t)$ die empirische Verteilungsfunktion einer Stichprobe $x_1, \ldots, x_n$ ist.
Das Problem ist die Genauigkeit mit der man die Limesverteilung χ für festes n approximiert, d. h. die Konvergenzrate γ in

$$\sup_r |P(w_n > r) - \chi(r)| = O(n^{-\gamma}).$$

Hier ist nun $\gamma = 1$ exakt und es gelten asymptotische Entwicklungen für $P(w_n > r)$ (in Potenzen von n^{-1}).
Das Problem kann allgemein für Statistiken der Form

$$w_n = n^{-1} \sum_{j,k=1}^{n} h(x_j, x_k),$$

wo $E(h(X_1, X_2) \mid X_2) = 0 \quad X_2$-f.ü.

in ähnlicher Weise gelöst werden.
Zusammenhänge bestehen mit dem zentralen Grenzwertsatz in Banachräumen. Für gewisse Funktionale des empirischen Prozesses erreicht man eine Konvergenzrate $O(n^{-1/2})$.

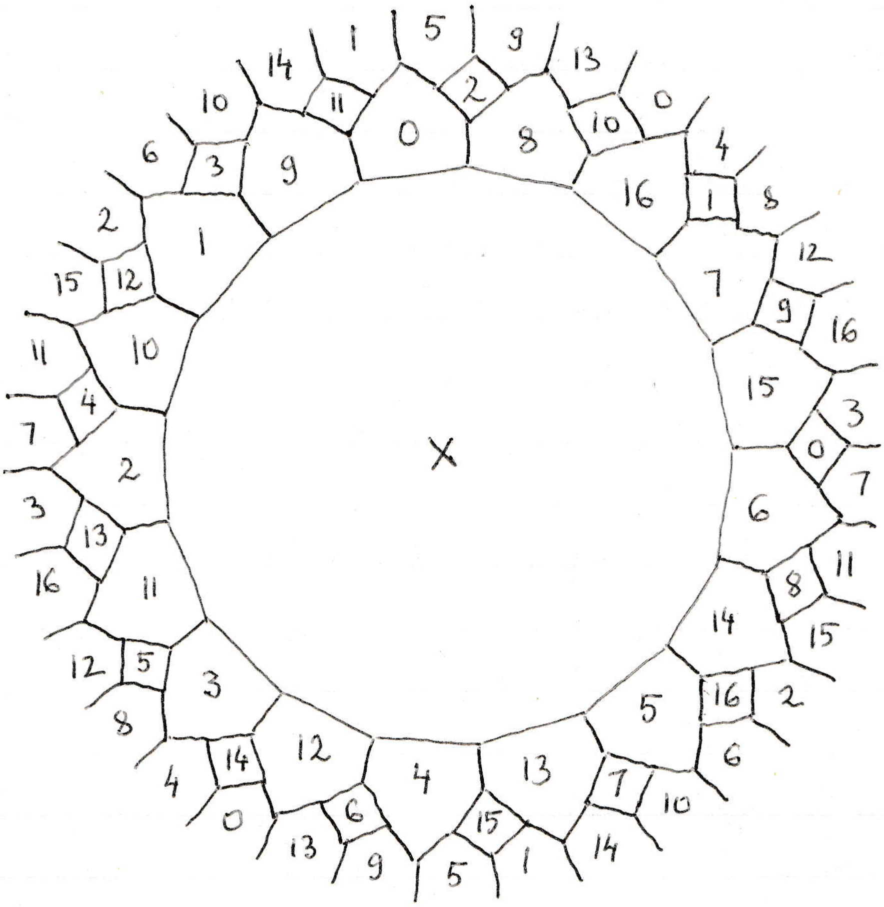
21. Mai 1982

Friedrich Götze

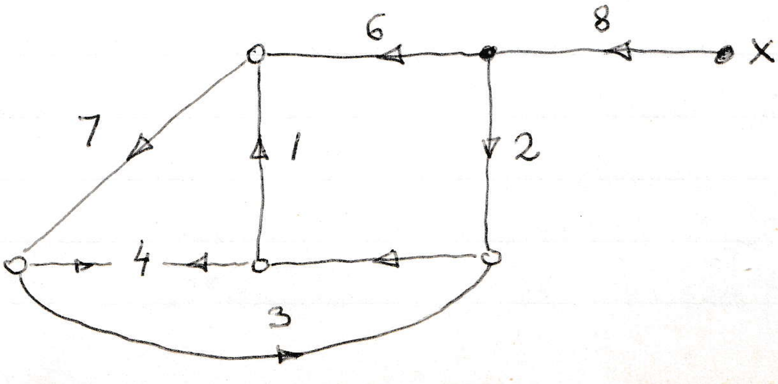
[Friedrich Götze]

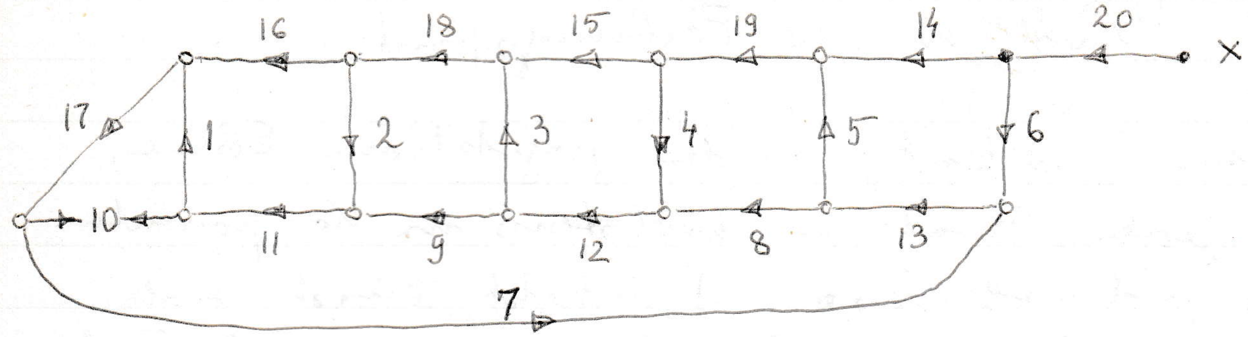
Neues von der Färbungsfront.

Eine Landkarte auf der projektiven Ebene, bei der jeder Staat aus höchstens m Komponenten (Mutterland und Kolonien) besteht, läßt sich immer mit $6m$ Farben färben. So viele Farben sind auch manchmal nötig. Es gibt nämlich in der projektiven Ebene $6m$ Staaten, die paarweise benachbart sind, und jeder aus höchstens m Komponenten besteht. Siehe Beispiel $m=3$:



Konstruktionsmittel sind „current graphs". Siehe Beispiel $m=3$ auf dieser Seite und $m=7$ auf der nächsten.





28. Mai 1982

Gerhard Ringel
Santa Cruz California

On the centres of mapping class groups of surfaces.

The centres of mapping class groups of surfaces, orientable, compact with distinguished sets of points are almost all trivial, the exceptions, occurring for low genera and numbers of points, having order 2.

For compact surfaces without distinguished points, this result appears to be "known" but, as far as I know, for genus ≥ 3 is not in the literature. The purpose of the lecture is to give a proof which uses some of the rich structure which is available when one considers the mapping class group acting on the corresponding ~~surf~~ Teichmüller space. The structure of fixed point sets in Teichmüller space is closely related to supergroups of the corresponding Fuchsian groups. This is exploited to show that if an element lies in the centre of the mapping class group, it must lie in the centre of every finite subgroup. Now a finite subgroup is chosen in the mapping class group which effectively has no centre. This is possible for $g \geq 3$.

The extended result to surfaces with distinguished points is obtained by using results of Birman relating these groups to the mapping class group without distinguished points and to braid groups.

4th June 1982 C Maclachlan

Intersection homology and L^2-cohomology of certain arithmetic varieties. June 11th, 1982

The classical Hodge theory on a compact Riemannian manifold X allows one to identify the ith complex cohomology group $H^i(X; \mathbb{C})$ with the space $\mathcal{H}^i$ of harmonic forms of degree i. If X is Kählerian, there is moreover the decomposition in (p,q)-types, and with respect to the multiplication by the Kähler form

("Hard Lefschetz"). This lecture was mainly devoted to some partial extensions of (and conjectures about) of such results to certain types of singular spaces, in particular those which have a Whitney stratification, e.g. complex analytic spaces.

On the topological side one uses the intersection (co)homology grps $IH^*(X)$ of Goresky - MacPherson. For simplicity, I recalled the (simplicial) definition only of the middle intersection coh., defined when the strata are even-dimensional, and which satisfies Poincaré duality.

On the analytic side one uses L^2-cohomology $H_{(2)}$ and L^2-harmonic forms $\mathcal{H}_{(2)}$ on a non-compact Riemannian manifold. The hoped for connection would then take the form (X being compact)

$$IH^*(X) = H_{(2)}(X-\Sigma)$$

where Σ contains all singularities, and $X-\Sigma$ is endowed with a suitable Riemannian metric. This has been considered in two main cases:

(a) conical singularities and conical metric (Cheeger). This is also extended to the case of simplicial metrics for certain simplicial complexes. Here the metric used on $X-\Sigma$ is not complete.

(b) let $Y = D/\Gamma$ be the quotient of a bounded symmetric domain by a (torsion free for simplicity) arithmetic group Γ ("an" arithmetic variety or Shimura variety) and let X be its minimal canonical compactification which is a projective variety. Then Zucker has

~~"Hard Lefschetz"~~) conjectured that

$$IH^*(X) = H_{(2)}(Y)$$

where, on the right hand, the natural invariant metric is used. It is complete and so this case is very different from the 1st one from the analytic point of view. I described some cases where this has been checked, the most extensive one to date being the $\mathbb{Q}$-rank 1 case. To conclude, I indicated some reasons why this should be important to compute the Hasse-Weil zeta fction of the corresponding Shimura varieties. ~~This has been~~ This program has been realized by Brylinski and Labesse for Hilbert-Blumenthal varieties of arbitrary dimensions.

A Borel

The Institute for advanced study, Princeton

Multiplicative structure of the division algebras over number fields.

Let G be a simple linear algebraic group defined over a field K of algebraic numbers, and let G(K) be the group of K-rational points of G. In my talk at the Congress in Vancouver I formulated the following conjecture: the group G(K) is projectively simple if and only if for all non-archimedean valuations v of K the local groups $G(K_v)$ are projectively simple. It is not hard to show that this is actually equivalent the following conjecture: if G is a simple and simply connected, and if G is K_v-isotropic for all non-archimedean valuations v, then G(K) is projectively simple.

The basic purpose of my talk is to tell about new results on the structure of G(K) for the case when $G(K) = SL(1, D)$, where D

→ p. 205

Aus der Abzählungstheorie

Es werden einige Beispiele vorgeführt zum Zusammenspiel kombinatorischer Abzählungstheorie ("Pólya-Theorie") und der Darstellungstheorie endlicher Gruppen: Aus drei Versionen des Lemmas von Cauchy-Frobenius (konstante Form, Anzahl der Bahnen vorgeschriebener Länge, gewichtete Form) ergeben sich Hinweise zu

a) einer systematischen Untersuchung zahlentheoretischer Kongruenzen (Fermat, Wilson etc.) anhand geeigneter Operationen von Gruppen; für P, Q Permutationsgruppen gilt $\sum_{(\pi,g)\in P\times Q} \prod_k a_1(\pi^k)^{a_k(g)} \equiv 0 \ (|P|\,|Q|)$

b) allgemeineren Sätzen über die Unimodalität ($a_1 \leq \dots \leq \ \geq \dots \geq$) von Anzahlfolgen;

<u>Satz:</u> Ist $u(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k$ reziprok-unimodal ($a_{i-1} \leq a_i$, $i \leq k/2$ sowie $a_{k-i} = a_i$) mit nicht negativen a_ν, Q eine Permutationsgruppe in S_n, χ^D ein Charakter von Q über $\mathbb{C}$, so ist auch

$$Z(Q, D \mid u(x)) := \frac{1}{|Q|} \sum_{g\in Q} \chi^D(g^{-1}) \prod_k u(x^k)^{a_k(g)}$$

reziprok-unimodal

Folgerung z.B.: Die Gaußpolynome $Z(S_m \wr S_n, 1 \mid 1+x)$ sind reziprok-unimodal

c) Mit Hilfe der Tatsache daß für Charaktere χ^D von G und irreduzible Charaktere ζ^i von G der Ausdruck

$$\frac{1}{|G|} \sum_g \zeta^i(g^{-1}) \prod_k \chi^D(g^k)^{a_k(g)} =: \chi^{D \Delta_n D_i}(g)$$

Wert eines Charakters von S_n auf g ist, lassen sich weitere Teilbarkeitsfragen lösen;

<u>Satz:</u> C eine Konjugiertenkl., $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2 \Rightarrow$

$\#(g_1, \dots, g_k)$ mit $g_1^{n_1} \cdots g_k^{n_k} \in C = |G| \sum_i \left(\frac{|G|}{f^i}\right)^{k-2} \prod_j \chi^{D_i \Delta_{n_j} D_i}((1-n_j))\, \zeta^i(g^{-1})$

also durch $|G|\, \mathrm{ggT}\left(\frac{|G|}{f^i}\right)^{k-2}$ teilbar

(18.6.82)

A. Kerber, Bayreuth

is finite dimensional division algebra over K, $[D:K]=n^2$ and $SL(1,D)=D^{(1)}=\{a\in D \mid Nrd_{D/K}(a)=1\}$. Let V_f be a set of non-archimedean valuations of K, $T=\{v\in V_f \mid D_v=D\otimes_K K_v$ is a division algebra$\}$. For groups G of A_n-type there is a natural generalization of conjecture stated above: for every noncentral normal subgroup $W\subset \prod_{v\in T} D_v^{(1)}$ such that $N=D^{(1)}\cap W$, in particular, the group $D^{(1)}=SL(1,D)$ is projectively simple for $T=\emptyset$. For $[D:K]=4$ this conjecture was stated by Kneser (1956) in a somewhat different form. In this case the conjecture was proved Платонов-Рапинчук and Margulis. Here we consider a general situation.

Theorem 1. Let D be a division algebra of index n, and $\forall v\in T$ $v(n)=0$. Then the commutant $[D^{(1)},D^{(1)}]=D^{(1)}\cap\prod_{v\in T}[D_v^{(1)},D_v^{(1)}]$, in particular, $D^{(1)}=[D^{(1)},D^{(1)}]$ for $T=\emptyset$.

For the proof of the theorem 1 generalization of the Hasse's principle for some non-normal extensions is essential. To be more precise, we need to solve the following problem: given a finite set $S\subset V_f$, find a class of fields for which validity of Hasse's principle depends upon their local behaviour in points of S. The next theorem is obtained in the collaboration with Rapincuk.

Theorem 2. Let $S=\{v_1,v_2\}\subset V_f$. Then for every $n>1$ there exists the extension $L=L(S)$ of K of the degree n with the property: if $M\supset K$ and $M\otimes_K K_{v_i}\overset{K_{v_i}}{\cong} L\otimes_K K_{v_i}$ $(i=1,2)$, then Hasse's principle holds for M.

One can reformulate the theorem 2 in another way. Let $G=SL(n,\mathbb{C})$ and let $\mathcal{T}$ be the variety of maximal tori of G. Then for any $S=\{v_1,v_2\}\subset V_f$ there exists an open subset $W\subset \mathcal{T}_S=\prod_{v\in S}\mathcal{T}(K_v)$ such that for any torus $R\subset\mathcal{T}(K)\cap W$ the Shafarevich-Tate group Ш$(R)=0$.

V. P. Platonov,
Mathematical Institute, Minsk.
June 28, 1982

K-theoretical questions on the representation theory of finite dimensional algebras.

In this talk I surveyed some recently established connections between algebraic K-theory and the representations of a finite dimensional algebra Λ over a field, k. Let $G_n(\Lambda)$, $\Gamma_n(\Lambda)$, $K_n(\Lambda)$ $(n \geq 0)$ be the K-groups of the exact categories $(\mathrm{mod}\,\Lambda, \mathrm{Ext}^1_\Lambda)$, $(\mathrm{mod}\,\Lambda, \underline{0})$, $(\mathrm{pmod}\,\Lambda, \underline{0})$ in the sense of Quillen — where $\mathrm{mod}\,\Lambda$ is the category of finitely generated Λ-modules and $\mathrm{pmod}\,\Lambda$ the subcategory of projectives. There are maps $K_n(\Lambda) \longrightarrow \Gamma_n(\Lambda) \xrightarrow{\iota_n} K_n(\Lambda)$, of which ι_n is a split epi. I first discussed the Benson, Parker, Webb construction, using Auslander Reiter sequences, of a "basis" dual to the canonical basis of $\Gamma_0(\Lambda)$ consisting of the indecomposables, this approach giving a brief elementary proof that, for Λ of finite representation type, the relations from Auslander Reiter sequences span $\mathrm{Ker}\,\iota_0$.

Let $\mathcal{H}$ be the category of finitely presented contravariant k-linear functors from $\mathrm{mod}\,\Lambda$ to $\mathrm{mod}\,k$, and $\mathcal{H}_0$ the Serre subcategory of functors vanishing on projectives. Evaluation at Λ gives a localising sequence $\mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H} \xrightarrow{e} \mathrm{mod}\,\Lambda$, and since $K_n(\mathcal{H}, \mathrm{Ext}_{\mathcal{H}}) \xleftarrow{\sim} \Gamma_n(\Lambda)$ and $e_n \simeq \iota_n$, there are split exact sequences $0 \to K_n(\mathcal{H}_0, \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{H}_0}) \longrightarrow \Gamma_n(\Lambda) \longrightarrow G_n(\Lambda) \to 0$. This gives an alternative and rich view of $\mathrm{Ker}\,\iota_0$ and leads one to consider various categories of functors, especially categories of functors of finite composition length, and the short exact sequences associated with their minimal projective resolutions.

Lastly the formula $\mathrm{Ker}\,\iota_0 = K_0(\mathcal{H}_0, \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{H}_0})$ has been shown by Auslander and Reiter to lead to some strange interpretations, by means of short exact sequential statements, of certain properties about the kernel and cokernel of the Cartan homomorphism $c_0 : K_0(\Lambda) \to G_0(\Lambda)$.

Michael C R Butler
Liverpool, England

July 2, 1982

Harmonic maps from the Minkowski plane

Let $R^{1,1}$ be the Minkowski plane and N be a complete riemannian manifold. A map $\phi: R^{1,1} \to N$ is called harmonic if it is ~~the~~ a critical point of the action functional

$$A(\phi) = \int e * 1$$

where e is the energy density which can be expressed as

$$e(\phi) = g^{ij} \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \phi^\beta}{\partial x^j} g_{\alpha\beta} .$$

Here g^{ij} & $g_{\alpha\beta}$ are metric tensors of $R^{1,1}$ and N respectively. The Euler equations of the functional ~~are~~

$$g^{ij} \phi^\alpha_{;ij} = g^{ij} \left(\frac{\partial^2 \phi^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{\partial \phi^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial \phi^\gamma}{\partial x^j} \right) = 0 .$$

We have the following theorem

Theorem: For any given initial datum, the Cauchy problem to the harmonic maps from $R^{1,1}$ to N ~~exists~~ admits a global solution.

The physical meaning is that the chiral field over $R^{1,1}$ is a field free of singularities.

If N is replaced by the standard sphere with indefinite metric $S^{1,1}$, the Cauchy problem is reduced ~~the~~ to the Cauchy problems of the following equations

a) Sinh-Gordon $\alpha_{tt} - \alpha_{xx} = \sinh \alpha$

b) Negative sinh-Gordon $\alpha_{tt} - \alpha_{xx} = -\sinh \alpha$

c) Cosh-Gordon $\alpha_{tt} - \alpha_{xx} = \cosh \alpha$

according to a certain classification of the initial datum. In the case b) the solution exists globally. In cases a) and c) the solution may blow up at finite time

Gu Chaohao (C.H. Gu)
Fudan Univ. (Shanghai)

July 5, 1982

"Über die Differenz aufeinanderfolgenden Primzahlen"

Es ist eine alte Vermutung in der Zahlentheorie, daß zwischen zwei ~~Prim~~ benachbarten Quadratzahlen stets mindestens eine Primzahl liegt. Von der berühmten Riemannschen Vermutung folgt auch nur (Cramér) $p_{n+1} - p_n \ll \sqrt{p_n} \log p_n$ ($p_1, p_2, \dots$ sind die Primzahlen), was noch etwas schwächer ist. Andererseits kann man aufgrund von heuristischen Argumenten (falls wir die Verteilung der Primzahlen als "zufallsmäßig" betrachten) $p_{n+1} - p_n \ll \log^2 p_n$ vermuten. ($f \ll g$ bedeutet $f \leq C g$ mit einer absoluten positiven Konstante C). Fall das Supremum der reellen Teilen der Nullstellen der Zetafunktion Θ ist, gilt für die Anzahl $\pi(x)$ der Primzahlen unter x, die Formel $\pi(x) = \mathrm{li}\, x + O\left(\frac{x^\Theta}{\log x}\right) \Rightarrow p_{n+1} - p_n \ll p_n^\Theta$, was im jetzigen Stand der Wissenschaft noch nichts gibt, da die sogenannte quasi-Riemannsche Vermutung $\Leftrightarrow \Theta < 1$ noch hoffnungslos schwer scheint. Im Jahre 1930 konnte Hoheisel jedoch aufgrund Dichtigkeitssätzen für die Nullstellen der Zetafunktion

(*) $p_{n+1} - p_n \ll p_n^\Theta$ für $\Theta > 1 - \frac{1}{33\,000}$

beweisen. Der Wert von Θ wurde von Ingham (1940) auf $\Theta = \frac{5}{8} + \varepsilon$, von Montgomery (1970) auf $\Theta = \frac{3}{5} + \varepsilon$ und von Huxley (1972) auf $\Theta = \frac{7}{12} + \varepsilon$ verbessert (mit verbesserten Dichtigkeitssätzen). Im 1979 hatten Jutila und Iwaniec mit der Kombinierung von analytischen und Siebmethoden $\Theta = \frac{13}{23}$ bewiesen und das wurde von Heath-Brown und Iwaniec auf $\Theta = \frac{11}{20}$ verbessert (1979). Der Vortragender (und unabhängig von ihm Iwaniec) hat $\Theta = \frac{17}{31} = 0.5483\ldots$ erreicht. Der Beweis stützt sehr wesentlich auf tiefen Ergebnissen von Deshouillers und Iwaniec betreffend Potenzmomente der Zetafunktion (präziser auf Mittelwerte von Funktion der ~~Form~~ $|\zeta^4(\tfrac{1}{2}+it)| \, |\sum_{n\le A} \frac{a_n}{n^{1/2+it}}|^2$), welche wieder Konsequenzen von Abschätzungen von Kloostermannschen Summen sind.

9. 7. 1982. János Pintz (Budapest)

Erweiterung von Chernov-Savage Sätzen

Wir betrachten das Zwei-Stichprobenproblem und zeigen die asymptotische Normalität einer linearen Rangstatistik vom Chernov-Savage Typ. Diese Statistik ist von der Form

$$T_N(k) = \sqrt{N}\int_0^1 k\left(\tfrac{N}{N+1}\hat{H}_N(t)\right) d\hat{F}_n(t) - \sqrt{N}\int_0^1 k(H_N(t))\, dF(t).$$

Dabei sind $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$, $n+m=N$, Zufallsvariable, $\hat{F}_n, \hat{G}_m, \hat{H}_N$ die empirischen Verteilungsfunktionen für die X, Y bzw X und Y Beobachtungen. $H_N = \frac{n}{N}F + \frac{m}{N}G$, wobei die X_i Verteilung F, die Y_i Verteilung G haben. Die Beweisidee ist eine Approximationsmethode. Für "schöne glatte" Funktionen konvergiert T_N gegen die Normal-verteilung. Für $h:(0,1)\to\mathbb{R}$ aus einem geeigneten Raum zeigen wir $T_N(h) = T_N(g) + T_N(h-g)$, wobei $T_N(h-g)$ klein wird, genauer $E|T_N(h-g)| \le \text{const}\ \|h-g\|_g$, $\|\cdot\|_g$ eine Norm. Hiermit lassen sich Chernov-Sätze auf eine große Klasse von h ausdehnen.

Ein weiterer Vorteil der Methode ist, daß an Bedingungen für F_n, G_m nur zweite Momente benötigt werden:

$$E\left(\left(\sqrt{N}(F_n(t) - F(t))\right)^2\right) = O\left((F(t)(1-F(t)))^{1-\eta}\right)$$
$$E\left(\left(\sqrt{N}(G_m(t) - G(t))\right)^2\right) = O\left((G(t)(1-G(t)))^{1-\eta}\right)$$

gleichmäßig in $t\in[0,1]$ für ein $\eta\ge 0$. Dies läßt sich in der Regel einfach verifizieren.

Als Konsequenz ergibt sich, daß der Test T_N relativ robust gegen Abhängigkeit der X_i, Y_j ist. Es wird keine Unabhängigkeit, sondern nur asymptotische Unabh. der $(X_i),(Y_j)$ benötigt.

Weiterhin darf h auch abzählbar viele Sprungstellen haben, was für die Praxis interessant ist.

Monte-Carlo Methoden für ϕ-mischende Prozesse zeigen, daß die Resultate nicht nur asymptotisch, d.h. für große N, sondern bereits für kleine n (≥ 100) relativ gut sind.

14. 7. 82

Uwe Rösler, Göttingen

Finally, we collect some results on $[n\to t]$ groups of exponent 4, partially known already, in:

Theorem 3 (i) $[G^2,G^2]=1 \Leftrightarrow G$ is $[2\to 3] \Leftrightarrow G$ is $[n\to n+1]$, $\forall n\ge 2$

G is $[3\to 4] \Rightarrow G$ is $[n\to n+2]$, $\forall n\ge 2$

(ii) G is solvable $\Leftrightarrow \exists$ integers N and k such that G is $[n\to n+k]$ for all $n\ge N$.

16-7-1982

Seán Tobin Galway. (z.Zt. Würzburg)

On the Descending Central Series in Groups with Exponent Four.

If G is a group with exponent 4, and $\gamma_1 G = G$, $\gamma_{i+1} G = [\gamma_i G, G]$ represents the descending central chain, it is known that (i) $(\gamma_r G)^2 \leq \gamma_{r+2} G$, $r \geq 2$ where for any group H the subgroup generated by all the squares of elements in H is H^2. (In fact, for any group H with exponent n, if n is even and prime to 3 one has $(\gamma_k H)^2 \leq \gamma_{k+2} H$ when $k \geq n/2$). Let $B(n)$ and $\tilde{B}$ respectively be the free groups of rank n and rank ∞ in the Burnside variety of exponent 4. Then $(\gamma_2 B(2))^2 \not\leq \gamma_5 B(2)$ and $(\gamma_3 B(2))^2 \not\leq \gamma_6 B(2)$; but it is known that (ii) $(\gamma_k G)^2 \leq \gamma_{k+4} G$ whenever $k \geq 4$. We now have a precise result

<u>Theorem 1</u> If G has exponent 4, $(\gamma_n G)^2 = [\gamma_n G, \gamma_n G]$ for all $n \geq 4$; this is best possible in the sense that $(\gamma_n \tilde{B})^2 \not\leq \gamma_{2n+1} \tilde{B}$ for any n.

The proof depends on (a) commutator identities derived from the Bayes, Kautsky, Wamsley presentation for $B(3)$ and (b) the non-solvability of $\tilde{B}$.

Say that a group H is $[n \to t]$ if every n-generator subgroup of H has class at most t. It is known that if G has exponent 4 and either $[\gamma_2 G, \gamma_2 G] = 1$ <u>or</u> $[\gamma_3 G, \gamma_2 G] = 1$ then (a) G is $[2 \to 4]$, $[3 \to 5]$, and $[n \to n+1]$ for all $n \geq 4$ and (b) $(\gamma_3 G)^2 = 1$ and moreover these results are best possible. We can give a generalization:

<u>Theorem 2</u> If G has exponent 4, $[\gamma_k G, \gamma_2 G] = 1$ implies that (a) G is $[n \to n+1]$ when $n \geq 2k-3$; for smaller n G is $[n \to t]$ with $t \leq \min(2k-2, n+k-1, 3n-2)$, $k \geq 3$, $n \geq 2$. (b) $(\gamma_k G)^2 = 1$ $(k \geq 3)$.

The $[n \to n+1]$ bound in (a) is of course best possible; but (b) is for $k \geq 4$ a consequence of the (in general) weaker condition $[\gamma_k G, \gamma_k G] = 1$ and so perhaps is not best possible.

Ultraproducts and group representations.

This is an account of joint work with G. Fendler; the key ideas are already to be found in his Diplomarbeit (Heidelberg, 1981).

Let A be a Banach algebra, and Π a representation of A as ~~isometries~~ on a Banach space X. The problem is to describe the linear functionals on A such that

$$|f(a)| \leq C \|\Pi(a)\| \qquad \forall a \in A.$$

This problem includes the question of representation of linear functionals on a C^*-algebra (Gelfand-Naimark-Segal theorem) and some questions in L^p multiplier theory (C. Herz, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 1973).

THEOREM: There exists a representation of A, $\tilde{\pi}$, on a space $\tilde{X}$, such that, for appropriate vectors ξ, η in $\tilde{X}$, $\tilde{X}^*$

$$f(a) = \langle \tilde{\Pi}(a)\xi, \eta \rangle \qquad \forall a \in A$$
$$\|f\| = \|\xi\|\|\eta\|.$$

The space $\tilde{X}$ is an ultraproduct of spaces $l^p(X)$. In particular, if X is an L^p-space, so is $\tilde{X}$, and if X is Hilbert, so is $\tilde{X}$.

There are obvious applications to group representation theory, where A is taken to be $L^1(G)$.

(20. 7. 82) Michael Cowling (Genua; zu z. Heidelberg).

Linear Groups of Finite Cohomological Dimension

Let A be a finitely generated ring of characteristic zero and fraction field F. Let K be the algebraic closure of $\mathbb{Q}$ in F. Then there are finitely many discrete valuations of F $v_1, \dots, v_m$ so that

$$A \cap \bigcap_{i=1}^{m} \mathcal{O}_{v_i} \subset \mathcal{O}$$

where $\mathcal{O}_{v_i}$ are the valuation rings and $\mathcal{O}$

is the ring of integers in K.

Using this and Tits' buildings associated to the valuations any group $\Gamma \subset GL_n(A)$ can be broken down into pieces Γ_α, $\alpha \in \mathcal{A}$ so that the characteristic polynomial of each element of Γ_α has coefficients in $\mathcal{O}$. In this way the virtual cohomological dimension

$$\mathrm{vcd}(\Gamma) \leq (n-1)m + \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathrm{vcd}\, \Gamma_\alpha$$

Now furthermore we can decompose each Γ_α into a unipotent part U_α and a product of groups of integral ($\mathcal{O}$) characteristic (polynomial) Γ_α^i. By Wedderburn theory we can assume the Γ_α^i are realized as linear groups over an extension L of K of degree $\leq n$ which behave (cohomologically) the same as arithmetic groups i.e.

$$\mathrm{vcd}\, \Gamma_\alpha^i \leq [K:\mathbb{Q}]\, n^3$$

Thus for $\Gamma \subset GL_n(A)$

$$\mathrm{vcd}(\Gamma) \leq (n-1)m + [K;\mathbb{Q}]\, n^4 + c_A + \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathrm{vcd}\, U_\alpha .$$

where c_A is a constant depending only on A.

Reference: R.C. Alperin, P.B. Shalen, Inventiones Mathematicae 66, 89-98 (1982)

Roger Alperin July 22, 1982

Das Poisson disorder Problem: Ein Problem des statistischen Schätzens von stochastischen dynamischen Systemen.

Das folgende scheinbar simple Problem des Schätzens des Zeitpunkts, wann ein Poisson-Prozeß seinen Parameter ändert von λ_0 zu λ_1, wurde mit Mitteln der stochastischen Systemtheorie teilweise gelöst. Die so erlangten Ergebnisse verallgemeinern die Resultate von Galtchuk und Rozovskii (1971): Das Ausgangsproblem wurde formal in ein partiell beobachtbares Kontrollproblem überführt, an dem wir das Separationsprinzip der Theorie der stochastischen Systeme erläuterten; das partiell beobachtete System wurde also überführt in ein Filterproblem und ein zu dem Ausgangssystem äquivalentes vollständig beobachtbares Kontrollproblem. Für dieses läßt sich in Spezialfällen eine optimale Lösung finden, die hergeleitet wurde.

Ich hoffe, hiermit die großen Möglichkeiten aufgewiesen zu haben, die die Theorie der stochastischen dynamischen Systeme für praktische statistische Probleme liefert, und dabei einige Prinzipien der stochastischen Systemtheorie verdeutlicht zu haben.

20/10/82 Michael Kohlmann
Universität Hamburg

Characters of solvable Lie groups.

The talk gave an account of the theory of characters of solvable Lie groups, taking as a starting point the Kirillov character formula for nilpotent Lie groups. The main new results concerned <u>exponential</u> solvable Lie groups: After having fixed a Jordan-Hölder basis in the complexified Lie algebra of the Lie algebra of the group in question, it is possible to write down a very explicit Kirillov-type character formula for each irreducible representation of the group. The formula(e) looks like this:

$$\mathrm{Tr}(\pi(u_e * \varphi)) = \int_{O} (\alpha_e \cdot \varphi \circ \exp)^\wedge(\ell)\, Q_e(\ell)\, d\beta_O(\ell),$$

where we shall not go into details about the ingredients entering the formula, except for the fact that e runs through a finite set. It was discussed how this formula could be used to pair off orbits and representations.

October 29, 1982

Niels Vigand Pedersen,
The Technical University,
Copenhagen

Es ist möglich, bezüglich eines positiven linearen Funktionals mit einer gewissen Stetigkeitseigenschaft auch dann zu integrieren, wenn der zugrundeliegende Funktionenraum nicht notwendig ein Verband ist. Eine Anwendung: ein neuer Beweis des Plancherelschen Satzes.

5.11.82

H. Leinert (Heidelberg)

Darstellung von Zahlen durch ganzzahlige quadratische Formen

Ist V ein n-dimensionaler $\mathbb{Q}$-Vektorraum mit quadratischer Form q und L ein $\mathbb{Z}$-Gitter auf V mit $q(L) \subseteq \mathbb{Z}$, so folgt bekanntlich aus $a \in \bigcap_{p,\infty} q(L_p)$ nicht, daß auch $a \in q(L)$ gilt. Jedoch gibt der Satz von Siegel ~~für~~ eine genaue Formel für ein gewichtetes Mittel der Darstellungsanzahlen bzw. der Darstellungsmaße von a für die Klassen im Geschlecht des Gitters, dieses Mittel ergibt sich als Produkt der lokalen Darstellungsdichten. Für indefinite Formen und $\dim V \geq 5$ (sowie für $\dim V = 4$ mit einem Ausnahmefall) haben Siegel mit funktionentheoretischen Methoden und Kneser mit Methoden des Haarschen Maßes gezeigt, daß man auch das Darstellungsmaß für die einzelne Klasse als Produkt lokaler Dichten gewinnen kann, die Darstellungsmaße sind dann nämlich für alle Klassen im Geschlecht gleich. Für $\dim V = 3$ hingegen kann man endlich viele Quadratklassen bestimmen, so daß für Zahlen aus diesen Quadratklassen verschiedene Klassen aus dem Geschlecht verschiedene Darstellungsmaße haben können, für alle Zahlen, die keiner dieser Quadratklassen angehören sind hingegen die Darstellungsmaße für alle Formen im Geschlecht gleich. Der Vortragende hat die Darstellungsmaße für die Zahlen aus den Ausnahmequadratklassen untersucht. Es ergibt sich, daß für alle Zahlen, die durch die Stufe der Form teilbar sind, das Darstellungsmaß für alle Klassen im Geschlecht gleich ist, ist ~~p~~ a durch den p-Anteil der Stufe teilbar, so gilt für die ~~Di~~ Differenz der Darstellungsmaße von a durch zwei Klassen L, M

$$r(ap^2, L) - r(ap^2, M) = p \cdot \left(\frac{-2a \cdot \operatorname{disc} L}{p}\right) \cdot \left(r(a, L) - r(a, M)\right)$$

Für definite Formen ergeben sich Aussagen über das gewichtete Mittel der Darstellungsanzahlen der Klassen in einem Spinorgeschlecht. Die Ergebnisse lassen sich auf algebraische Zahlkörper verallgemeinern.

19. 11. 1982 R. Schulze-Pillot, Göttingen

Gaussche Summen und zentral einfache Algebren.

Es ist ein Übersichtsvortrag: Ausgangspunkt ist die klassische explizite Beschreibung der lokalen Abelschen Wurzelzahl durch Gaussche Summen – aufgefasst als Skalar Produkte eines multiplikativen und eines additiven Charakters. Verallgemeinerung in einer Richtung: Wenn man Charaktere lokaler Körper als Charaktere von Galois Gruppen auffasst so kommt man auf „Galois Gaussche Summen" für allgemeinere nicht Abelsche Darstellungen. Zusammenhang mit der Galois Modul Struktur ganzer algebraischer Zahlen. In einer anderen Richtung betrachtet man sogen. „Hauptordnungen" $\mathfrak{A}$ in einer zentral einfachen Algebra A über einem lokalen Körper F, und die dazu gehörigen multiplikativen Gruppen $G = G(\mathfrak{A})$ – $G(\mathfrak{A})$ ist der Normalisator von $\mathfrak{A}$ in A^*. Dieser Ansatz führt wieder zu Gausschen Summen $\tau(\rho)$, die den irreduziblen zulässigen Darstellungen von G zugeordnet sind. Man kann „häufig" ~~fast~~ (wahrscheinlich allgemein) die „epsilon Faktoren" für die Funktionalgleichungen von „supercuspidal" Darstellungen von A^* explizit bestimmen. Andererseits erörtert man den Zusammenhang mit den Galois Gausschen Summen.

26.11.82 A. Fröhlich (London)

Einige kombinatorische Strukturen in der Darstellungstheorie symmetrischer Gruppen

Der Polynomring $K[\underline{n} \times \mathbb{N}] := K[X_{ij} \,/\, i \in \underline{n} := \{1,2,..,n\},\ j \in \mathbb{N} := \{1,2,...\}]$ wird zu einer S_n-Algebra vermöge $\sigma X_{ij} := X_{\sigma(i)j}$; K sei ein Körper der Charakteristik $p \geq 0$.

Der Polynomring kann aufgrund der Doppelindizierung wie folgt zerlegt werden:

$$K[\underline{n}\times\mathbb{N}] = \bigoplus_{\substack{k \\ \uparrow \\ \text{totaler Grad}}} \bigoplus_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\models k \\ \beta=(\beta_1,\beta_2,\dots)\models k}} K_{\alpha\beta} ,$$

wobei $K_{\alpha\beta} := \langle\!\langle$ Monome vom Inhalt $(\alpha,\beta)\rangle\!\rangle_K$.
Diese Räume $K_{\alpha\beta}$ können darstellungstheoretisch interpretiert werden als Verkettungsräume zwischen gewissen induzierten Darstellungen: $K_{\alpha\beta} \simeq \mathrm{Hom}_{KS_k}(KS_k \otimes_{KS_\alpha} K, KS_k \otimes_{KS_\beta} K)$.

Der Verkettungssatz von Mackey legt es nun nahe, nach einer weiteren K-Basis von $K_{\alpha\beta}$ zu suchen, die "darstellungstheoretisch relevant" ist. Eine solche Basis wurde von Doubilet, Rota, Stein gefunden:
<u>Satz</u> $K_{\alpha\beta} = \langle\!\langle$ standard Bideterminanten vom Inhalt $(\alpha,\beta)\rangle\!\rangle$

Bei der Darstellung einer bel. Bideterminante als Linearkombination von standard Bideterminanten treten kombinatorische Strukturen auf, die eine zentrale Rolle in der Darstellungstheorie symmetrischer Gruppen spielen. Mit Hilfe dieser Begriffe lassen sich nun leicht die gewöhnlichen irreduziblen KS_n-Moduln angeben. Schließlich wurde mit Hilfe von symmetrisierten Bideterminanten eine "charakteristik-freie" Beschreibung aller Klassen irreduzibler KS_n-Moduln angedeutet und auf einen Algorithmus zur Berechnung der modular irreduziblen KS_n-Moduln hingewiesen.

3. 12. 1982

Michael Clausen
(Bayreuth)

Ganze Funktionen auf nuklearen lokalkonvexen Räumen

Ist F ein lokalkonvexer Raum über $\mathbb{C}$, so nennt man $f: F \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion, falls f Gâteaux-analytisch und stetig ist. Für einen abgeschlossenen linearen Teilraum E von F bezeichne $\rho_{F,E}: H(F) \to H(E)$ die Restriktionsabbildung zwischen den Räumen der ganzen Funktionen auf F bzw. E. Die Frage nach der Surjektivität von $\rho_{F,E}$ ist sowohl aus funktionalanalytischer als auch aus funktionentheoretischer Sicht von Interesse. Boland zeigte 1974 die Surjektivität von $\rho_{F,E}$ für alle (DFN)-Räume F und alle abgeschlossenen linearen Teilräume E von F. Für (FN)-Räume ist ein entsprechendes Ergebnis nicht richtig, wie der folgende Satz zeigt:

<u>Satz</u> Sei F ein unendlich dimensionaler (FN)-Raum, $F \not\cong \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Dann gibt es einen abgeschlossenen linearen Teilraum E von F, für den $\rho_{F,E}$ nicht surjektiv ist.

Der Beweis beruht auf einer elementaren Bemerkung und Resultaten aus der Strukturtheorie der nuklearen Frécheträume. Eine Variation der Fragestellung führt zu dem folgenden Ergebnis:

<u>Satz</u>. Für einen (FN)-Raum E sind äquivalent

(1) Für jeden lokalkonvexen Raum F, der E als topologischen linearen Teilraum enthält und der ein fundamentales Halbnormensystem aus Hilbert-Halbnormen besitzt, ist $\rho_{F,E}$ surjektiv.

(2) $H(E) = H_{nb}(E) := \{ f \in H(E) \mid$ es existiert eine Nullumgebung U, so daß f auf $r \cdot U$ beschränkt ist für alle $r > 0 \}$.

Für die Eigenschaft (2) wurden eine notwendige und eine hinreichende Bedingung angegeben. Die hinreichende Bedingung ($\tilde{\Omega}$) charakterisiert diejenigen (FN)-Räume, in denen es eine kompakte Teilmenge gibt, welche nicht polar ist.

(Die vorgetragenen Ergebnisse entstanden durch gemeinsame Untersuchungen des Vortragenden mit S. Dineen (Dublin) und D. Vogt (Wuppertal))

17. 12. 1982

R. Meise
(Düsseldorf)