Exotische Strukturen auf kompakten 4-Mannigfaltigkeiten.

Bekanntlich trägt eine Mannigfaltigkeit der Dimension ≤ 3 genau eine differenzierbare ~~Str~~ Struktur, während es in höheren Dimensionen viele Beispiele für Mannigfaltigkeiten mit exotischer differenzierbarer Struktur gibt (erstes Beispiel: S^7 (Milnor ~ 1956)). Da die in den höheren Dimensionen angewandten Methoden in Dim 4 nur teilweise anwendbar sind, war es bis vor einem Jahr völlig offen, ob es Beispiele von 4-Mannigfaltigkeiten mit exotischer Struktur gibt. Durch die bahnbrechenden Methoden von Freedman bzw. Donaldson wurden im letzten Jahr die ersten Beispiele von exotischen Strukturen in der Dim 4 gefunden: $S^3 \times \mathbb{R}$ hat mindestens eine exotische diffb. Struktur (Freedman 1978/1982), dasselbe gilt sensationellerweise für $\mathbb{R}^4$ (Freedman – Donaldson 1982) (für $n \neq 4$ ist bekannt, daß $\mathbb{R}^n$ nur eine diffb. Struktur hat). Hintergrund dieser Beispiele sind die folgenden Sätze: a) Eine 1-zushgd. top. kompakte 4-Mannigfaltigkeit wird durch die Schnittform + Kirby-Siebenmann Invariante $k \in \mathbb{Z}_2$ klassifiziert und jede unimodulare symmetrische $\mathbb{Z}$-Bilinearform kommt als Schnittform vor (Freedman 1982). b) Dagegen gilt: Wenn M 1-zshgd diffb. kompakte 4-Mannigfaltigkeit ist und die Schnittform pos. def ist, so ist die Schnittform die standard Euklidische Form $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$, (Donaldson 1982).

In meinem Vortrag habe ich über die von mir vor kurzem konstruierten ersten Beispiele von kompakten 4-Mannigfaltigkeiten mit exotischer Struktur berichtet. Ich habe gezeigt, daß es zu jeder endlich erzeugten Gruppe π mit $H^1(\pi; \mathbb{Z}_2) \neq 0$ eine kompakte 4-Mannigfaltigkeit mit exotischer differenzierbarer Struktur gibt. Konkrete Beispiele sind: $\mathbb{RP}^4 \# 11(S^2 \times S^2)$, $F \times S^2 \# 11(S^2 \times S^2)$, wo F eine nicht-orientierbare Riemannsche Fläche mit gerader Eulercharakteristik ist.

Der Beweis beruht zum einen auf der folgenden Beobachtung: Sei K die Kummerfläche und M eine nicht-orientierbare 4-Mannigfaltigkeit. Dann sind $M \# K$ und $M \# 11(S^2 \times S^2)$ homöomorph. Dies folgt mittels eines einfachen Tricks aus dem oben unter a) zitierten Satz von Freedman.

Falls andererseits $M \# 11(S^2 \times S^2)$ und $M \# K$ nicht diffeomorph sind, hat $M \# 11(S^2 \times S^2)$ ~~kein~~ eine exotische differenzierbare Struktur. Ich habe eine modifizierte Surgery Methode entwickelt, die ich während des Vortrages kurz vorgestellt habe, mittels derer ich das in vielen Beispielen zeigen kann.

7. 1. 1983, im Eilzug zwischen Bielefeld und Dortmund.
Matthias Kreck (Mainz)

Singularitäten und Vektorfelder

Sind V, W zwei endlich-dimensionale reelle Vektorräume, so kann man vermittels des Rangs den Raum $\mathrm{Hom}(V, W)$ der linearen Abbildungen von V nach W stratifizieren. Sind α, β zwei Vektorbündel über einer geschlossenen, zusammenhängenden n-dimensionalen C^∞-Mannigfaltigkeit M, so gilt Entsprechendes für den Totalraum des Homomorphismenbündels $\underline{\mathrm{Hom}}(\alpha, \beta)$. Dieser Ansatz führt zu einer Hindernistheorie, wobei Singularitäten (mit zugehörigen sorgfältig registrierten Daten) das Hindernis zur Existenz von Vektorbündelhomomorphismen $\alpha \to \beta$ mit vorgegebenem Mindestrang messen. Anwendungen finden sich im Bereich von Rahmen-, Ebenenfeldern, Blätterungen, Immersionen u.s.w. Hier z.B. einige wenige Musterergebnisse zum erstgenannten Bereich.

<u>Satz</u>. Sei $n > 6$, $n \equiv 2(4)$. Dann gilt:
M erlaubt drei lin. unabh. Vektorfelder $\Longleftrightarrow$ $\chi(M) = 0$ und $w_{n-2}(M) = 0$.
(Unter Benutzung elliptischer Operatoren und deren Indextheorie wurde dies Ergebnis zuvor für <u>orientiertes</u> M von Atiyah und Dupont bewiesen.)

Satz. Sei M orientierbar, aber $w_2(M)^2 \neq 0$, $n \geq 11$, $n \equiv 3(4)$. Dann M erlaubt vier lin. unabh. Vektorfelder $\Leftrightarrow w_{n-3}(M)=0$

Satz. Sei $n \equiv 2(4)$, $n > 2k$, $1 \leq k \leq 6$; es gebe bereits k Vektorfelder, die höchstens in einem Punkt von M linear abhängig werden. Dann gibt es k linear unabh. (überall!) Vektorfelder auf M genau wenn die Euler-Zahl $\chi(M)$ verschwindet.

14. I. 1983 Ulrich Koschorke (Siegen)

Nichtlineare elliptische Systeme

Es werden vorwiegend nichtlineare elliptische Systeme vom Typ

$$-\partial_i(a^\nu_{ik}(x,u)\partial_k u^\nu) = F^\nu(x,u,Du)$$

betrachtet. Für die a^ν_{ik} wird eine gleichmäßige Elliptizitätsbedingung gefordert; die F^ν sollen quadratisch in Du wachsen. Systeme dieser Art treten (evtl. nach einer Transformation) in der Differentialgeometrie, und in der modernen Elementarteilchenphysik auf und werden auch in neuerer Zeit in Zusammenhang mit stochastischen Differentialspielen betrachtet. Zur Frage der Existenz- und Regularität von Lösungen bestehen bisher größere Schwierigkeiten bis zur erfolgreichen Behandlung, die auf das quadratische Wachstum von F^ν bzgl. Du zurückzuführen sind. I. A. lassen sich Gegenbeispiele angeben; wie im Vortrag skizziert wird, läßt sich das Existenz- u. Regularitätsproblem unter der Bedingung $|F^\nu(x,u,Du)| \leq K|Du_\nu||Du| + K\sum_{j<\nu}|Du_j|^2 + K_0$ vollständig lösen. (Bisher verfügt man im wesentlichen nur über Sätze mit einer Kleinheitsbedingung für K.

J. Frehse

21. 1. 83 (Bonn)

Partitions of structures and their applications

A structure $\mathcal{S}$ on a set X is a mapping $\varphi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow k$. X is allways assumed linearly ordered (and finite). Having definded substructures in a natural way, denote by $\binom{\mathcal{T}}{\mathcal{S}}$ the set of all substructures of $\mathcal{T}$ which are isomorphic to $\mathcal{S}$. Several results extending the Ramsey theorem to structures have been obtained jointly with V. Rödl. Sample results:

Theorem: Let $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ be structures. Then there exists a structure $\mathcal{U}$ such that for every partition $\binom{\mathcal{U}}{\mathcal{S}} = \mathcal{a}_1 \cup \mathcal{a}_2$ there exists $\mathcal{T}' \in \binom{\mathcal{U}}{\mathcal{T}}$ such that $\binom{\mathcal{T}'}{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{a}_i$ for either $i = 1$ or $i = 2$.

Theorem: For every positive integer k and graphs G there exists a graph H with the following property: For every partition (colouring) $c : \binom{V(H)}{2} \longrightarrow \{1, \dots, k\}$ there exists a subgraph $G' \subseteq H$ and ~~and~~ isomorphism $\varphi : G \to G'$ such that φ is distance preserving and $c(\varphi(x), \varphi(y))$ depends only on the distance of $\varphi(x)$ and $\varphi(y)$ (in $H \equiv$ in G').

These theorems are ~~st~~ related to several number-theoretical problems.

28.1.83

J. Nešetřil
Karls Universität, Prague

K_2, the Brauer group and algebraic cycles.

Merkurjev and Suslin proved recently a remarkable result on simple algebras. Let F be a field containing the group μ_n of n-th roots of unity ($1/n \in F$), and let Λ be a central simple algebra over F. Then Λ is similar to a tensor product of cyclic algebras, i.e. algebras generated over F by X and Y satisfying: $X^n = a \in F^*$, $Y^n = b \in F^*$, $XY = \xi YX$, $\xi^n = 1$.

Their method uses algebraic K-theory, and the above assertion is the surjectivity part of the following

Theorem: the Galois symbol $K_2(F)/n K_2(F) \longrightarrow H^2(F, \mu_n^{\otimes 2})$ is an isomorphism.

This theorem has other consequences. One of them is that given $X/_{\mathbb{C}}$ an irreducible algebraic variety, $\alpha \in H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/n)$

a cohomology class with $\mathbb{Z}/n$- coefficients and $m \geq 1$ an integer, there exists ~~an~~ Zariski open $\phi \neq U \subset X$ such that the restriction of α to $H^2(U(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/n)$ is in the image of $H^2(U(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/mn) \longrightarrow H^2(U(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/n)$.

Another consequence, whose proof combines Merkurjev-Suslin's theorem with the proof of Weil conjectures by Deligne, states that when X is a smooth geometrically irreducible projective variety over a finite field, the group $CH^2(X)$ of cycles on X of codimension 2 modulo linear equivalence is such that its torsion subgroup is finite.

4/2/83

C. Soulé
C. SOULÉ Paris VII

Über die Spektrallücken bei quasi-periodischen Potentialen.

Wir betrachten das Eigenwertproblem

$$-\left(\frac{d}{dx}\right)^2 y + q(x)\, y = \lambda y$$

auf der reellen Achse, wobei $q(x)$ eine reelle quasi-periodische Funktion ist, d.h. sie läßt sich in der Form $q(x) = Q(\omega_1 x, \omega_2 x, \dots, \omega_d x)$ darstellen wobei $Q(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d)$ eine reell-analytische Funktion auf dem Torus $T^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ und $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_d$ rational unabhängige Zahlen sind. Darüberhinaus nehmen wir noch an, daß die $\omega_1, \dots, \omega_d$ den Ungleichungen

$$\left| \sum_{\nu=1}^{d} j_\nu \omega_\nu \right|^{-1} \leq c\, |j|^{\tau} \quad \forall\, j \in \mathbb{Z}^d \setminus (0)$$

genügen. Für fast alle $\omega \in \mathbb{R}^d$ gibt es solche c, τ.

Es ist wohl bekannt, daß im periodischen Falle ($d = 1$) das Spektrum aus (im allgemeinen) unendlich vielen Intervallen besteht (Bandenspektrum). Die dazwischenliegenden Lücken lassen sich durch ganze Zahlen numerieren, da die sogenannte Rotationszahl $\alpha = \alpha(\lambda)$ dort ganze Werte annimmt, falls die Periode zu π normiert ist.

Ähnlich ist $\cancel{\alpha}$ im quasi-periodischen Fall die Rotationszahl konstant in jeder Lücke, und zwar wird $2\alpha = (j, \omega) = \sum_{\nu=1}^{d} j_\nu \omega_\nu$, $j \in \mathbb{Z}^d$. Es stellt sich die Frage, ob für jede Zahl $\mu = (j, \omega) > 0$ im Frequenzmodul von q die Menge

$$I(\mu) = \{ \lambda \in \mathbb{R} \; ; \; 2\alpha(\lambda) = \mu = (j, \omega) \}$$

eine Lücke des Spektrums bildet. Das ist nicht der Fall wenn $I(\mu)$ zu einem Punkt entartet. Wir (Jürgen Pöschel und der Sprecher) untersuchen nun die Frage, ob wenigstens für generische $q(x)$ die obigen $I(\mu)$ Lücken bilden. Die Antwort ist positiv für alle hinreichend großen μ der Menge

$$M_1 = \{ \mu = (j, \omega) \; / \; |(j - k, \omega)|^{-1} \leq c' |k|^{\tau'}, \; \forall k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{j\} \}$$

Diese Menge häuft sich bei ∞ und zwar so, daß der Abstand für große μ kleiner als $\mu^{-\alpha}$ ($\alpha > 0$) ist. Tatsächlich wird mehr über die Lücken bewiesen. Insbesondere gibt es für λ am Rande einer solchen Lücke genau eine beschränkte Lösung, die quasi-periodisch ist und deren Quadrat die Frequenzen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_d$ besitzt.

9. Febr. 1983

Jürgen Moser.
(Zürich)

11. 2. 83:

J. Tits (Paris)
„Über die Griesssche Konstruktion der sporadischen Gruppe von Fischer-Griess."

Fixpunktindizes iterierter Abbildungen.

Es werden alle universellen Relationen bestimmt, die zwischen den Fixpunktindizes $\{I(f^\nu)\}_{\nu=1,2,\dots}$ der Iterierten einer (stet.) Abbildung $f: V \to Y$ bestehen. Dabei ist $V \subset Y$ offen, $\mathrm{Fix}(f^\nu)$ kompakt (für alle relevanten ν) und Y ein euklid. Umgebungsretrakt ($f^\nu = f \circ f^{\nu-1} : (f^{\nu-1})^{-1} V \to Y$); I = Hopf-Index

Satz 1: Für jedes $n > 1$ ist

$$I_n(f) = \sum_{\tau \subset P(n)} (-1)^{|\tau|} I(f^{n:\tau}) \equiv 0 \mod n$$

($P(n)$ = Menge aller Primteiler von n, $(n:\tau) = n\left(\prod_{p\in\tau} p\right)^{-1}$, $|\tau| = \mathrm{Kard}(\tau)$)

z.B. ($n = p$ prim) ist $I(f^p) \equiv I(f) \mod p$ (Satz von Zabreiko-Krasnoselskii), oder $I(f^{12}) - I(f^6) - I(f^4) + I(f^2) \equiv 0 \mod 12$.

Sei $s: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ eine Folge von ganzen Zahlen und $M_s(n) = \sum_{\tau \subset P(n)} (-1)^{|\tau|} s(n:\tau)$ („Möbius Inversion")

Satz 2. Ist $M_s(n) \equiv 0 \mod n$ für alle n dann gibt es ein (2-dimensionales, zusammenhängendes) Polyeder Y und eine stetige Abbildung $f: Y \to Y$ derart daß $s(\nu) = I(f^\nu)$ ist für alle ν.

I.a. kann man kein kompaktes Y finden (in Satz 2); für kompakte Y liefert nämlich der Satz von Lefschetz-Hopf eine zusätzliche notwendige Bedingung, die sich auch als hinreichend herausstellt, ~~nämlich~~ also

Satz 2'. Y (in Satz 2) kann genau dann kompakt gewählt werden, wenn die Potenzreihe
$\exp\left(\sum_\nu \frac{I(f^\nu)}{\nu} t^\nu\right)$ eine rationale Funktion
(mit ganzzahligen Koeffizienten ist).

29. 4. 83 Albrecht Dold (DOLD)
(Heidelberg)

Kloosterman sums on average and applications to analytic number theory.

In order to get an asymptotic expression for the number of representations of an integer by a diagonal quadratic form in 4 variables (i.e. getting a non-trivial majorization for the Fourier coefficient of a modular cusp form), Kloosterman introduced in 1926 the sums $S(m,n;c) := \sum^*_{d \bmod c} e^{2\pi i \frac{m\bar{d}+nd}{c}}$, where $d\bar{d} \equiv 1 [c]$, and proved a non-trivial upper-bound for them. Six years later, Petersson showed the clean formula (where τ is defined p. 121*)
$\tau(n) = K n^{\frac{11}{2}} \sum_c S(1,n;c)\, J_{11}\left(\frac{4\pi\sqrt{n}}{c}\right)$, J_{11} being a Bessel function. Weil individual upper-bound (in the forties) for Kloosterman sums and trivial treatment of the Petersson formula lead to $\tau(n) \ll_\varepsilon n^{\frac{11}{2}+\frac{1}{4}+\varepsilon}$, whereas it had been conjectured (Ramanujan-Petersson conjecture, now Deligne theorem) that the exponent $\frac{1}{4}$ might be dropped, i.e. cancellations in the sum do occur. It had even been conjectured (in the sixties) by Linnik and Selberg that one has $\sum_{c<T} \frac{1}{c} S(m,n;c) \ll_{m,n,\varepsilon} T^\varepsilon$.

It is not possible to combine Bessel functions of integral order to approximate the characteristic function of an interval, but it had been noticed in the last years by

* of this volume.

.../...

Kuznecov and Bruggeman that one may use instead, the Petersson formula that occurs in the context of the Maass-Selberg theory of automorphic forms; they could show that cancellation between Kloosterman sums indeed happens when they are weighted by smooth weights.

Motivated by arithmetical applications, H. Iwaniec and I were lead to evaluate expressions like $\sum'_{c\le T} \frac{1}{c} S(m,n;cq)$ and it turned out that the work of Kuznetsov had to be rewritten for the congruence subgroups $\Gamma_0(q)$, and there, a major difficulty arose: the localisation of the eigenvalues λ_n of the laplacian acting on $L^2(\Gamma_0(q)\backslash \mathfrak{h})$ (cf. p. 50)*, the ones with $0<\lambda_n\le\frac{1}{4}$ being responsible for a main term in the expected majorization. However, and this is one of the main points in Iwaniec & Deshouillers Inv. Math. 70, 219-288, it turns out that on average over q, one can reduce the contribution of the (hypothetical) exceptionnal eigenvalues, this being powerful enough to deduce non-trivial applications to different problems, like

- square mean value for the zeta function weighted by short Dirichlet-polynomials on the critical line (cf. p. 209*),
- minorization for the greatest prime factor of $\prod_{n\le x}(n^2+1)$
- Brun-Titchmarsh theorem on average over the level
- estimation, with error-term of some divisor-functions

* loc. cit.

5 V 83 Jean-Marc Deshouillers (Bordeaux. F)

Konstruktion von Galoisdarstellungen

Sei k ein Zahlkörper, $\bar{k}$ ein algebraischer Abschluß von k und $G_k = Gal(\bar{k}/k)$ die absolute Galoisgruppe von k. Eine Galoisdarstellung von k ist ein Homomorphismus $D: G_k \to GL(n, \mathbb{C})$ mit der Eigenschaft $G_k : Ker(D) < \infty$. Die Klassifikation aller Galoisdarstellungen eines Zahlkörpers und die Berechnung ihrer Artinschen L-Reihen ist ein Hauptanliegen der algebraischen Zahlentheorie. Das Problem für ein=dimensionale Galoisdarstellungen wird durch die Abelsche Klassenkörper=theorie gelöst. Wie eine Lösung des allgemeinen Problems vermutlich auszusehen hätte beantwortet in natürlicher Verallgemeinerung der eindimensionalen Theorie die sogenannte Langlands-Theorie (Vermutung) In meinem Vortrag wird ein einfaches Verfahren angegeben, mit dem man aus über k definierten algebraischen Varietäten, insbesondere aus elliptischen Kurven, Galoisdarstellungen von k konstruieren kann. Anschließend werden diese Darstellungen in Spezialfällen (Dimension 3) cuspidalen automorphen Darstellungen zugeordnet und somit in das Langlands-Schema eingebaut.

13.5.1983, Hans Opolka, Münster

Elementare Neubegründung der lokalen Klassenkörpertheorie

Sie geht so: Sei $L|K$ eine galoissche Erweiterung lokaler Körper und $\sigma \in G(L|K)$. Eine ~~Frobeniuslöfung~~ Frobeniuslösung ist eine Fortsetzung ~~von~~ $\hat\sigma$ von σ auf L^{nr}, sodaß $\hat\sigma|_{K^{nr}} = \varphi_K^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$.

Durch diese Definition wird jeder Automorphismus σ in einen Frobeniusautomorphismus verwandelt. Es gilt nämlich: Ist Σ der Fixkörper von $\hat\sigma$, so ist
$$\hat\sigma = \varphi_\Sigma .$$

Definition: Die Reziprozitätsabbildung

$$r_{L|K} : G(L|K) \longrightarrow K^*/N_{L|K}L^\times$$

wird definiert durch

$$r_{L|K}(\sigma) = N_{\Sigma|K}(\pi_\Sigma) \bmod N_{L|K}L^\times ,$$

wobei π_Σ ein Primelement des Fixkörpers Σ von $\hat\sigma$ ist.

Aufgrund dieser Definition beweist man auf elementare und direkte Weise das

Lokale Reziprozitätsgesetz: Ist $L|K$ abelsch, so ist

$$r_{L|K} : G(L|K) \longrightarrow K^*/N_{L|K}L^\times$$

ein Isomorphismus.

20. 5. 83 Jürgen Neukirch (Regensburg)

Selberg's eigenvalue conjecture.

The aim of this note is to present some recent results concerning the estimate of the first eigenvalue of the Laplace-Beltrami operator on non-compact Riemann surfaces. Let H be the upper half plane equipped with the non-euclidean structure, Γ a congruence group and Δ the Laplacian associated with the metric and acting on $L^2(\Gamma \backslash H)$. In 1965 Selberg conjectured the the first non-zero eigenvalue is bounded from below

$$\lambda_1 \geqslant \frac{1}{4}.$$

In the same paper (Proc. Symp. Pure Math. vol 8 AMS) he proved the estimate

$$\lambda_1 \geqslant \frac{3}{16}$$

which follows from the André Weil estimate of the Kloosterman sums. Werner Müller announced the following <u>theorem</u>:

Let $\Gamma \subset PSL(2,\mathbb{R})$ be a Fuchsian group of the first class (the fundamental domain of finite volume) and suppose that the scattering matrix $C(s)$ associated with the Eisenstein series with respect to Γ has no poles in $(\frac{1}{2}, 1)$. Let $0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \frac{1}{4}$ be exceptional eigenvalues of Δ, we set $\lambda_i = s_i(1-s_i)$ with $s_i \in (\frac{1}{2}, 1)$. Then $C(s)$ has poles in the points $1-s_1, \ldots, 1-s_n$.

This theorem implies the bound $\lambda_1 \geq \frac{1}{4}$ for the Hecke congruence groups $\Gamma_0(q)$ with q being square free. To obtain this it is used the explicit formula for the scattering matrix $C(s)$ of these groups. The case of arbitrary q can not be treated, up to now, by the Müller theorem (for example for groups $\Gamma_0(p^2)$, p prime number, we meet then the problem of the existence of the real zeros of L-series). But some kind of statistical information can be obtained in the case of $\Gamma_0(q)$ with q being arbitrary natural number, up to know we have proved that for $\Gamma_0(p)$ with p being a prime number.

<u>Theorem</u> (H. Iwaniec, J. Szmidt)

$$\sum_{\lambda_j \in (0, \frac{1}{4})} q^{2t_j} \ll q^{1+\varepsilon}$$

where $\lambda_j = \frac{1}{4} - t_j^2$ and the constant implied in the $\ll$ symbol depending on ε only.

27. 5. 1983 Janusz Szmidt (Warsch…

It has appeared after that there is a mistake in Müller's proof (only some general theorems of him are true) but we ~~do~~ still do not know ~~wth~~ whether $\lambda_1 \geq \frac{1}{4}$ for the Hecke groups $\Gamma_0(p)$ ~~p pri~~ p being a prime number

16. 5. 1984 J. Szmidt.

K-theory of non-compact spaces

Let X be a topological space, A the ring of all continious real-valued functions on X, A_0 the subring of bounded functions, $SL_n A$ the ring of $n \times n$ matrices over A with $\det = 1$, $E_n A$ the subgroup generated by all elementary matrices $I_n + e_{ij}(y)$, where I_n the identity matrix, $i \neq j$, $y \in A$.

Theorem. If X is compact, then $SL_n A / E_n A = \pi_0 SL_n A = [X, SL_n \mathbb{R}]$, the homotopy classes of continious mapping $X \to SL_n \mathbb{R}$.

Theorem. For any X, $SL_n A / E_n A = SL_n A_0 / E_n A_0$ and this group does not depend on n when $n \geq \dim(X) + 1$.

Theorem. For connected simply connected X, $SL_2 A / E_2 A = A / A_0$

Theorem. For $X = \mathbb{R}$, $SL_n A / E_n A = 1$ when $n \geq 3$.

Problem. Compute $SL_n A / E_n A$ in the case of Eucledian space $X = R^d$, $d \geq 2$.

~~1983~~

May 30, 1983

L. VASERSTEIN
Penn State University

Skew field extensions of different but finite left and right dimensions.

In an extension of commutative fields, $L \supset K$ there is no distinction between the left and right structure of L as a vector space over K. Consequently, the left and right dimensions of L over K are the same. This changes when we consider extensions of skew fields. Cohn has previously constructed extensions of skew fields, e.g. $E \supset F$ such that the dimension of E over F on the left is finite, but on the right, the dimension is infinite. It was therefore of some interest to investigate what could happen if both dimensions are known to be finite. This question gained more interest when Ringel and Simson discovered that the existence of new types of ~~ati~~ hereditary artinian rings, corresponding to Coxeter diagrams in a similar way to the standard correspondence with Dynkin diagrams ~~the~~ for hereditary artinian algebras of finite representation type, ~~the~~ required extensions of skew fields, e.g $E \supset F$, such that the left and right dimensions of E over F are both finite.

It turns out that one may construct extensions of skew fields of the sort required: there is the following theorem:

Theorem 1 Let s and t be integers greater than 1 and let $C \supset D$ be an extension of skew fields; then there exists an extension of skew fields $\bar{C} \supset \bar{D}$ such that $\bar{C} \supset C$, $C \cap \bar{D} = D$, and the left dimension of $\bar{C}$ over $\bar{D}$ is s, whilst the right dimension of $\bar{C}$ over $\bar{D}$ is t.

By using an extension of this theorem, it is possible to construct an hereditary artinian ring of finite representation type corresponding to the Coxeter diagram $I_2(5)$.

2.6.83 Aidan Schofield, Trinity College, Cambridge

Über das Spektrum schwach fastperiodischer Funktionen.

Ist G eine Gruppe und B ein Banachraum, so heißt ein $f: G \to B$ schwach fastperiodisch, wenn $y \circ f$ fastperiodisch ist für jedes lineare stetige Funktional $y \in B'$; das schwache Spektrum solcher f ist definiert durch $\sigma_w(f) := \bigcup_{y \in B'} \sigma(y \circ f)$, wo $\sigma(g) := \{\omega :$ Fourierkomponente zu ω von f ist $\neq 0\}$, ω = Äquivalenzklasse irreduzibler unitärer komplexer endlich dimensionaler Darstellungen von G. Amerio zeigte 1960 (im Zusammenhang mit der Fastperiodizität von Lösungen der inhomogenen Wellengleichung) für G = additive Gruppe R der reellen Zahlen, daß $\sigma_w(f)$ abzählbar ist, wenn B schwach folgenvollständig ist. Erst 1980 konnten Kadec und Kürsten mit einem Resultat von Stegall (über die Existenz schwacher Borelmaße in nicht-separablen B') zeigen, daß für $G = R$ bei beliebigem B das $\sigma_w(f)$ stets abzählbar ist. Das läßt sich verallgemeinern zu:

Satz A: Ist $f: G \to B$ schwach f.p., so ist $\sigma_w(f)$ abzählbar genau dann, wenn $f(G)$ separabel ist.

Satz B: Für $B = \ell^p(I, \mathbb{C})$, $1 \leq p < \infty$, ist $\sigma_w(f)$ stets abzählbar, bei beliebiger Indexmenge I.

Man kann Beispiele konstruieren, die zeigen, daß "schwach f.p.", "schwach-folgen-f.p.", "schwach f.p. mit abzählbarem schwachen Spektrum" jeweils echte Teilklassen der vorangehenden darstellen – schon für abelsche Gruppen.

10. Juni 1983 Hans Günzler, Kiel

24. 6. 83.

E. Friedlander: Forgetting topology on topological groups.

Chirurgie und Bordismusvarietät
(Surgery and Bordism varieties)

Subject of the talk is a nonsimply-connected version of the "generalized Kervaire-invariant" of E.H. Brown and W. Browder.

Suppose given

— a discrete group G and homomorphism $w: G \to \mathbb{Z}_2$
— a space X and vector bundle γ on X
— a principal G-bundle α on X, and a identification j of double cover of X,

$$j : w_*(\alpha) \cong \text{orientation cover of } \gamma .$$

The Kervaire-Browder-Brown's work suggests the following question: Is there a simple relationship between the n-th homotopy group of the Thom spectrum $M(X,\gamma)$,

$$\pi_n(M(X,\gamma)) = \text{Bordism group of certain manifolds}$$

and

$$L_n(G,\omega) = \text{Wall group} \; ?$$

There is indeed; it can be obtained by means of a giant "functor" from the geometric world (in which the bordism group $\pi_n(\Omega(X,\gamma))$ lives) to the world of chain complexes (over the group ring $\mathbb{Z}[G]$, say; $L_n(G,\omega)$ lives in this world, cf. Ranicki's paper in L.M.S. Proceedings 1980).

The "functor" has the following effect:

(1) space $\longmapsto$ chain complex;

(2) manifold $\longmapsto$ symmetric algebraic Poincaré complex (Ranicki, Miščenko)

(3) vector bundle on a space $\longmapsto$ chain bundle on a chain complex.

Only (3) is new. The functor leads to the construction of "algebraic bordism groups" $L^n(C(\tilde{X}), c(\gamma))$ which mimick the geometric bordism groups $\pi_n(\Omega(X,\gamma))$. There are homomorphisms

$$\text{flexible signature} : \pi_n(\Omega(X,\gamma)) \longrightarrow L^n(C(\tilde{X}), c(\gamma))$$

and

$$\text{release} : L_n(G,\omega) \longrightarrow L^n(C(\tilde{X}), c(\gamma))$$

giving the desired relationship.

So much for concepts.

There is a "main theorem" to the effect that all computations in the theory are easy" modulo computations in ordinary L-theory. That is, there is a long exact sequence

$$\cdots\cdots\ ?_{n+1} \longrightarrow L_n(G,\omega) \xrightarrow{\text{release}} L^n(C(\tilde{X}), c(\gamma)) \longrightarrow ?_n$$

$$\longrightarrow L_{n-1}(G,\omega) \xrightarrow{\text{release}} \cdots$$

in which the third term $?_n$ are easy-to-compute homological objects.

1. 7. 83, Michael Weiss, IHES.

Die Vermutungen von Tate und Mordell

Es wurde der Beweis dieser Vermutungen skizziert. Der Beweis der Tate-Vermutung folgt den in der algebraischen Geometrie von Tate und Zarhin entwickelten Methoden. Wichtiger technischer Gesichtspunkt ist dabei die Bestimmung der Höhe des Punktes im Modulraum, der zu einer abelschen Varietät gehört. Außerdem gibt es eine einfache Formel für die Änderung der Höhe bei einer Isogenie.
Mit ähnlichen Methoden folgt auch die Shafarevich-Vermutung, aus der sich bekanntlich die Mordell-Vermutung ableitet.
Nähere Einzelheiten in "Le Monde", "Der Spiegel", u.s.w.

8. 7. 83 Gerd Faltings
Wuppertal

JULY 8, 1983

UNIV. BIELEFELD

George Gasper

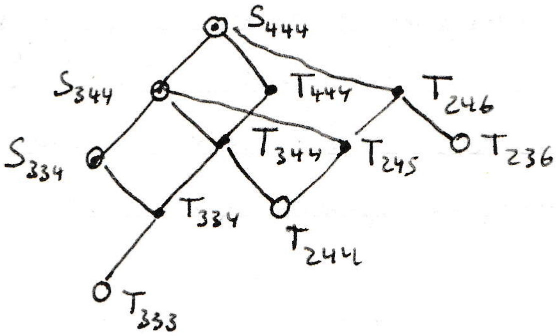
NORTHWESTERN, UNIV.

Radial Fourier Multipliers

A bounded function m on $\mathbb{R}^n$ is called a Fourier multiplier of $L^p(\mathbb{R}^n)$, notation $m \in M_p(\mathbb{R}^n)$, if the operator T defined initially on $\mathcal{S}$, the class of rapidly decreasing $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ functions, by $(Tf)^\wedge(\xi) = m(\xi)\hat{f}(\xi)$ has a bounded extension to $L^p(\mathbb{R}^n)$. Multiplier results of Herz, Hörmander C. Fefferman, and Carleson-Sjölin are discussed. It is shown how, in joint work with A. Carbery and W. Trebels, the Carleson-Sjolin theorem that $m_\delta(\xi) := (1-|\xi|^2)_+^\delta \in M_p(\mathbb{R}^2)$ when $\delta > 0$, $1 < p < \infty$, and $|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}(\delta + \frac{1}{2})$, is cast into a more general setting for radial m by establishing a multiplier theorem for a class of functions of which the Bochner-Riesz multipliers m_δ are prototypical members.

Über die Milnorgitter der exzeptionellen Singularitäten.

V.I. Arnold hat bekanntlich u.a. alle isolierten Singularitäten von komplex-analytischen Funktionen klassifiziert, für welche die Zahl der Moduln ≤ 2 ist. Für Zahl der Moduln $= 0$ ergeben sich die einfachen Singularitäten A_k, D_k, E_6, E_7, E_8, für Modularität 1 die einfach elliptischen Singularitäten $\tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$, (auch $T_{333}, T_{244}, T_{236}$ genannt), ~~und~~ die Spitzensingularitäten T_{pqr} ($\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1$) und 14 exzeptionelle Singularitäten S_{pqr} ($(p,q,r)=(2,3,7),\ldots$ $\ldots(4,4,4)$). Die Deformationsrelationen zwischen diesen Singularitäten kann man z.Zt. nur "mit der bloßen Hand" berechnen. Sie werden durch Diagramme beschrieben, z.B.:



Hieraus abstrahiere ich ein vergröbertes Diagramm:

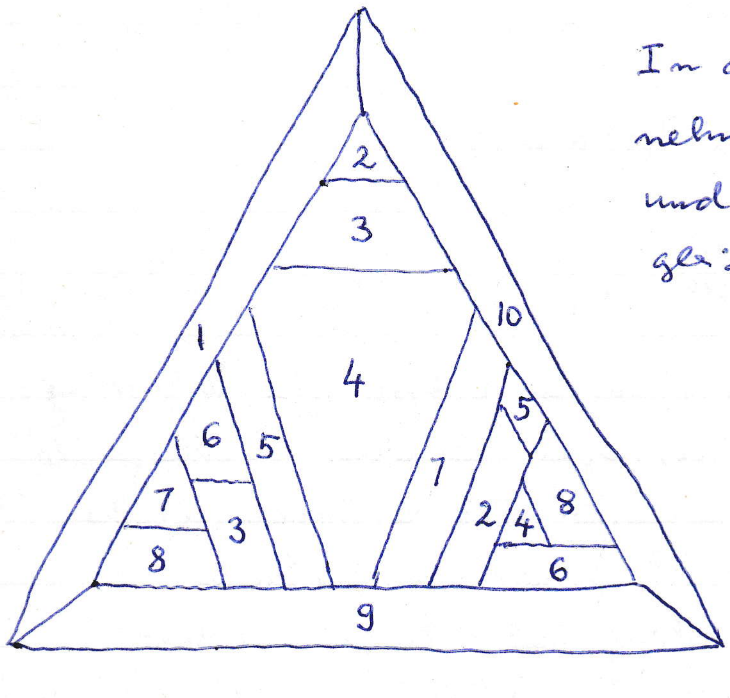
Für dieses vergröberte Diagramm gibt es eine rein arithmetische Beschreibung: Es ist gleich dem Quotienten $\mathcal{F}(L)/O(L)$, wo $O(L)$ die orthogonale Gruppe und $\mathcal{F}(L)$ der Isotropiefahnenkomplex des Homologiegitters L der Milnorfaser der betreffenden Singularität ist. Der Beweis erfolgt durch die umfangreiche Berechnung aller 14 Diagramme und Vergleich mit den analytisch berechneten Deformationsdiagrammen

15.7.83

E. Brieskorn (Bonn)

Wie verkauft man Graphentheorie in der Praxis und Heawood's Empire Problem

Ein Graph heißt plättbar oder planar, wenn er sich ohne Überschneidung der Kanten in die Ebene einbetten läßt. Die Kreuzungszahl, die Dicke und die Spaltungszahl eines Graphen G sind Maßzahlen, die angeben, wie weit G von der Plättbarkeit „entfernt" ist. Diese drei Parameter werden anhand von Eisenbahnnetzen discutiert und über den neuesten Stand der Theorie berichtet. Die Spaltungszahl wurde erst kürzlich vom Vortragenden vorgeschlagen. Sie ist wie folgt definiert: $\sigma(G)$ ist die kleinste Zahl k derart, daß G aus einem passenden plättbaren Graphen H durch k Eckenidentifizierungen gewonnen werden kann.



In der nebenstehenden Zeichnung nehme man das duale Polyeder und identifiziere Ecken mit gleicher Zahl. Es folgt $\sigma(K_{10}) \leq 7$.

Die Spaltungszahl hängt eng zusammen mit einem alten Problem von Heawood (1890). Er vermutete, daß es für jedes $M \geq 2$ in der Ebene eine Landkarte mit 6M paarweise benachbarten Staaten gibt, wobei jeder Staat aus höchstens M Ländern (Zusammenhangskomponenten) besteht. Dies konnte der Vortragende zusammen mit B. Jackson unlängst beweisen.

31. Aug. 1983 G. Ringel (Santa Cruz)

Modellbildung in der linearen Kontrolltheorie

$$u \to \overset{v\,\downarrow}{\boxed{\text{System}}} \to y$$

Eine der grundlegenden Fragestellungen der Kontrolltheorie wird durch das Diagramm (s.o.) beschrieben. Gegeben ist ein System mit Eingang u (= Steuerung), Störung v und Ausgang y (= zu kontrollierende Grösse). Gesucht ist eine Strategie, welche den Einfluss von v auf y eliminiert und auf Beobachtungen von y in der Vergangenheit beruht ($u(t)$ hängt nur von $y(s)$ für $s \leq t$ ab). Für Systeme, die durch gewöhnliche linear Differentialgleichungen beschrieben werden, ist dieser Strategiebegriff gleichwertig mit dem wesentlich engeren Begriff des "feedback-processors".
Das Problem des Regler-Entwurfes ist mathematisch gesehen nichts anderes als das Problem der Konstruktion eines solchen feedback-processors.
Es wird über die zwei wesentlichen Klassen von Problemen berichtet, bei denen die Konstruktion des feedback processors mit den bisherigen Methoden gelöst ist. 1.) Theorie der optimalen Steuerungen, bei denen man mit einem stochastischen Störungsmodell arbeitet und die Eindeutigkeit der Lösung des Entwurfsproblemes mit Hilfe einer Optimalitätsbedingung (quadratisches Kostenfunktional) erzwingt. 2) Der Fall einer deterministischen Störung, bei der man ein dynamisches Modell der Störung zugrundelegt und die Wirkung der Störung auf den Ausgang zum Verschwinden bringen möchte. Der auf Wonham zurückgehende Ansatz (Prinzip der inneren Modellierung), seine Grenzen und Tragweite werden diskutiert.

12. Oktober 83

H.W. Knobloch (Würzburg)

Komposition von quaternären quadratischen Formen

Eine Komposition von quadratischen Moduln (M_1, q_1), (M_2, q_2) und (M, q) ist eine bilineare Abbildung

$$\mu: M_1 \times M_2 \longrightarrow M$$

mit $q(\mu(x_1, x_2)) = q_1(x_1) \cdot q_2(x_2)$ für alle $x_i \in M_i$, $i = 1.2$.
Kompositionen für binäre Formen über $\mathbb{Z}$ gehen auf Gauss zurück. Kürzlich gab Kneser (J. Number Theory 15, 406-413, (1982)) eine sehr elegante Darstellung, welche für beliebige Ringe gilt. In diesem Vortrag wird eine Theorie der Kompositionen von quaternären Formen über beliebigen Integritätsbereichen präsentiert, welche wesentlich von der Arbeit von Kneser inspiriert wurde. Diese Theorie ermöglicht neue Beweise und Verallgemeinerungen von Resultaten von Brandt aus den zwanziger Jahren.
Die Arbeit ist gemeinsam mit M. Ojanguren entstanden und benützt Korrespondenz mit Kneser, Parimala & Sridharan

21. Oktober 1983 M.-A. Knus, ETH, Zürich

Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie auf kombinatorische Probleme und einige meiner Lieblings Probleme in der Kombinatorik.

Es sei $r(u, v)$ die kleinste Zahl n so dass wenn man Kanten von $K(n)$ mit zwei Farben färbt es entweder ein $K(u)$ in der Farbe I oder ein $K(v)$ in der Farbe II existiert.

$$c\, n\, 2^{n/2} < r(n, n) < c\, 4^{n}/\sqrt{n}$$

ist bekannt, die untere Grenze braucht einfache Wahrscheinlichkeitstheoretische Überlegungen. Wahrscheinlich existiert

$$\lim_{n \to \infty} r(n, n)^{1/n}$$

aber dies ist noch offen.

$$\cancel{r(3, n) <}\ c_1 n^2/(\log n)^2 < r(3, n) < \frac{c\, n^2}{\log n}$$

die untere Grenze stammt von mir die obere von Graver-Yackel und Ajtai-Komlós-Szemerédi, diese Sätze brauchen auch Wahrscheinlichkeitsrechnung. $r(4, n) > n^{3-\varepsilon}$ ist sehr wahrscheinlich aber noch offen.

Vor mehr als 10 Jahren vermuteten Faber, Lovász und ich dass wenn $G_1, \dots G_n$ n vollständige Graphen der Grösse n sind, G_i und G_j haben keine Kante gemeinsam dann ist die chromatische Zahl von $\bigcup_{i=1}^{n} G_i$ auch nur n. Ich zahle 500 Dollar für einen Beweis oder Widerlegung

P. Erdős 1983 X 27.

On the topology of group representations

Let G be a finite group and $\rho_1, \rho_2 : G \to O(n)$ two orthogonal representations. We call ρ_1 and ρ_2 topological equivalent ($\rho_1 \sim_{top} \rho_2$) if there exists a homeomorphism $\varphi : S^{n-1} \to S^{n-1}$ with $\varphi \rho_1 \varphi^{-1} = \rho_2$. Similarly, be restricting φ to be a diffeomorphism or an isometry we have $\rho_1 \sim_{diff} \rho_2$ and the usual $\rho_1 \sim_{lin} \rho_2$ (often written $\rho_1 = \rho_2$).

In 1964 de Rham used the Reidemeister torsion invariant to show that differentiable equivalence implies linear equivalence. The Reidemeister torsion associates to a representation ρ an element $\Delta(\rho) \in \prod \mathbb{Q}[G/H]^*$ where H varies over the isotropy subgroups of the action of G on S^{n-1} given by ρ (We assume here that G is cyclic) The Reidemeister torsion is a diffeomorphism invariant: $\rho_1 \sim_{diff} \rho_2 \Rightarrow \Delta(\rho_1) = \Delta(\rho_2)$, but it is <u>not</u> in general a topological invariant if the actions are not free. It follows from direct calculations and from Franz' independance lemma that $\Delta(\rho_1) = \Delta(\rho_2) \Rightarrow \rho_1 \sim_{lin} \rho_2$ and one obtains the conclusion $\rho_1 \sim_{diff} \rho_2 \Rightarrow \rho_1 \sim_{lin} \rho_2$. What remained after de Rham's 1964-paper was the

<u>Question</u>: Does topological equivalence imply linear equivalence?

Here are some results about this

1975: R. Schultz, D. Sullivan : $\rho_1 \sim_{top} \rho_2 \Rightarrow \rho_1 \sim_{lin} \rho_2$, $|G| = p^a$ or $2p^a$, p an odd prime

1980 S. Cappell, J. Shaneson : Constructed a large family of counterexamples when $|G| = 4n$, $n > 1$

1982 W.C. Hsiang & W. Pardon, I. Madsen & M. Rothenberg : $\rho_1 \sim_{top} \rho_2 \Rightarrow \rho_1 \sim_{lin} \rho_2$ if $|G|$ is odd

In the Madsen-Rothenberg approach the result for odd order groups is based upon constructing a Thom class for topological G-bundles w.r.t. the functor $K_G(\ )\otimes\mathbb{Z}[1/2]$, similar to D. Sullivan's construction in the case $G=1$. The new geometric information is stable transversality theorems in the equivariant topological and PL categories for odd order (cyclic) groups G.

<u>Theorem</u> For ξ a topological G-bundle (locally linear) and G cyclic of odd order, there is a natural isomorphism

$$\Phi_\xi : K_G(X)\otimes\mathbb{Z}[1/2] \longrightarrow K_G(\xi)\otimes\mathbb{Z}[1/2]$$

The naturality refers to the following situation. If $\hat{f}:\xi\to\eta$ is a map of G-bundles over X (a homeomorphism on each fibre) then the diagram

$$\begin{tikzcd} K_G(\eta) \arrow[rr, "\hat{f}^*"] & & K_G(\xi) \\ & K_G(X) \arrow[ul, "\Phi"] \arrow[ur, "\Phi"'] & \end{tikzcd}$$

is commutative. Define now the characteristic class $\Theta^k(\xi)\in K_G(X)\otimes\mathbb{Z}[1/2]$ by the formula

$$\Phi_\xi(\Theta^k(\xi)) = \psi^k\,\Phi_\xi(1)$$

where ψ^k denotes the Adams operation. Then $\Theta^k(\xi)$ is an invariant of the topological type of ξ. For $X=\mathrm{pt}$. Θ^k becomes a topological invariant of a representation. It can be calculated by the formula: Let $\rho=\sum\chi_i$, χ_i linear characters. Then

$$\Theta^k(\rho) = \prod \frac{\chi_i^k-1}{\chi_i-1}\cdot\frac{\chi_i+1}{\chi_i^k+1}$$

The Franz' independence lemma shows that $\Theta^k(\rho_1)=\Theta^k(\rho_2)\Rightarrow\rho_1\sim_{lin}\rho_2$, whence gives the conclusion $\rho_1\sim_{top}\rho_2\Rightarrow\rho_1\sim_{lin}\rho_2$.

November 5, Ib Madsen (Aarhus)

Infinite-dimensional groups and the KdV.

The simplest highest weight representation of the group $GL_\infty = \{(\delta_{ij} + a_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}$, all but a finite number of a_{ij} are $0\}$ has two remarkable realizations. For the first, bosonic, the vector space is $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$, for the second, fermionic it is the infinite "wedge" $\Lambda^\infty \mathbb{C}^\infty$, whose basis is formed by elements $e_{i_0} \wedge e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots$, where $i_0 > i_1 > i_2 > \dots$ and $e_{i_k} = -k$ for $k \gg 0$. An isomorphism between these two realizations is given by:

$$(*) \qquad e_{i_0} \wedge e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \longmapsto S_{i_0,\, i_1+1,\, i_2+2, \dots},$$

where $S_{a_1, a_2, \dots}$ denotes the Schur function associated to the partition $a_1 \geq a_2 \geq \dots$ (Kac-Peterson).

Using ideas of the Kyoto school one easily deduces from the isomorphism $(*)$ the following

Theorem. Consider the KdV hierarchy of PDE:

$$(**) \qquad u_{x_3} = \tfrac{3}{2} u u_{x_1} + \tfrac{1}{4} u_{x_1 x_1 x_1}, \quad \dots \quad (\text{here } u_x \text{ means } \partial u/\partial x).$$

All rational solutions of $(**)$ which $= 0$ at ∞ are as follows:

$$u(x_1, x_2, \dots) = 2\left(\log S_{k, k-1, \dots, 1}(x_1 + c_1, x_2 + c_2, \dots)\right)_{x_1 x_1},$$

where $c_1, c_2, \dots$ are arbitrary constants.

Geometrically, this corresponds to the canonical cellular decomposition of the flag variety of the group $SL_2(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$.

Another corollary is due to Sato - Sato, that all Schur functions are "τ-functions" for the KP-hierarchy. I will also explain how Date - Jimbo - Kashiwara - Miwa use the bosonic realization to construct the soliton solutions, which one observes in a narrow channel.

November 11, 83

Victor Kac (MIT - Paris 6)

Über neue Ergebnisse von Suslin und anderer in der Algebra.

~~Im~~ diesem Vortrag gebe ich die neuesten Ergebnisse von verschiedenen Mathematikern u.a. Suslin, Quillen, A. Connes im Bereich der algebraische K-Theorie und der Lie-Algebren.

Gehen wir von einer komplexen oder reellen Lie Gruppe G aus. Diese hat einen klassifizierenden Raum BG, dessen Homologie schon länger bekannt ist. Jetzt kann man die Topologie auf G vergessen und sie als diskrete Gruppe betrachten. Schreiben wir G für die diskrete Gruppe und G^{top} für die andere.

Vermutung: $H_*(BG, \mathbb{Z}/m) \longrightarrow H_*(BG^{top}, \mathbb{Z}/m)$ ist ein Isomorphismus wenn die Koeffizienten endlich sind.

Die Vermutung wurde von Milnor für lösbare Gruppen bewiesen.

Suslin hat folgendes bewiesen:

Satz A (Suslin) $H_i(BG, \mathbb{Z}/m) \xrightarrow{\cong} H_i(BG^{top}, \mathbb{Z}/m)$ für $G = GL_n(\mathbb{R})$ oder $GL_n(\mathbb{C})$ und $n \geq i \geq 1$.

Der Beweis benutzt algebraische K-Theorie. Er beweist zuerst eine Stabilitätssatz, das alles auf $GL = \varinjlim GL_n$ reduziert

Satz A1 (Suslin) a) $H_i(BGL_n(F), \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_i(BGL_{n+1}(F), \mathbb{Z})$ wenn $n \geq i$

b) $\mathrm{Coker}\,(H_n(BGL_{n-1}(F), \mathbb{Z}) \longrightarrow H_n(BGL_n(F), \mathbb{Z})) \cong K_n^M F$ ist eine Gruppe der Milnorschen K-Theorie,

~~wobei~~ F ein unendlicher Körper ist.

Satz A2 (Suslin) Sei F ein algebraisch abgeschlossener Körper der Characteristic 0 und F' ein algebraisch abgeschlossener Körper der Characteristic $p > 0$, dann

$$H_*(GL(F), \mathbb{Z}/m) \cong H_*(GL(F'), \mathbb{Z}/m) \quad \text{für } m \text{ koprim zu } p.$$

Dann kann er sich auf die von Quillen gerechnete Homologie $H_*(GL_n(\overline{\mathbb{F}}_p))$ reduzieren, wo $\overline{\mathbb{F}}_p$ die algebraische Abgeschlossenheit des endlichen Körpers $\mathbb{F}_p$ ist.

Jetzt kann man die ähnlichen Probleme für Lie Algebren betrachten.

Gegeben ein Körper F ~~und~~ eine F-Algebra A und eine Lie Algebra $\mathfrak{g}$ definiert über F, kann man die Homologie von $\mathfrak{g} \otimes_F A$ berechnen?

<u>Satz B1</u> (Kassel) Sei $\mathfrak{g}$ eine einfache Lie Algebra und F der Characteristic $p \neq 2$ (auch $p \neq 3$ wenn $\mathfrak{g}$ vom Typ G_2 ist). Dann

$H_1(\mathfrak{g} \otimes A, F) = 0$ und $H_2(\mathfrak{g} \otimes A, F) \cong \Omega^1_{A/F} / dA$.

Man hat auch einen Stabilitätssatz:

<u>Satz B2</u> (Loday-Quillen) Sei F der Charakteristik 0 und $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$. Dann

a) $H_i(\mathfrak{gl}_n(A), F) \xrightarrow{\cong} H_i(\mathfrak{gl}_{n+1}(A), F)$ wenn $n \geq i$

b) $\mathrm{Coker}\,(H_n(\mathfrak{gl}_{n-1}(A), F) \to H_n(\mathfrak{gl}_n(A), F)) \cong \Omega^{n-1}_{A/F} / d\Omega^{n-2}_{A/F}$

So ist man auf $\mathfrak{gl}(A) = \varinjlim_n \mathfrak{gl}_n(A)$ reduziert. Wie kann man die Homologie von $\mathfrak{gl}(A)$ berechnen? Hier muß man eine neue Homologietheorie, die zyklische Homologie einführen, die von A. Connes für die Zwecke seiner nicht-~~kom~~kommutativen Differentialgeometrie kürzlich aufgebaut wurde. Die zyklische Homologie-Gruppen $HC_*(A)$ sind eine Verfeinerung von der Hochschildschen Homologie.

<u>Satz B</u> (Loday-Quillen / Trigan) Sei F der Charakteristic 0. Dann ist $H_*(\mathfrak{gl}(A), F)$ eine Hopf Algebra, dessen Primitiven die zyklische Homologie ist.

Die zyklische Homologie von A. Connes ist ein Feld in voller und schneller Entwicklung mit Anwendung in verschiedenen Bereichen wie homologische Algebra, Lie Algebra, Invariantentheorie, Differenzialtopologie, algebraische K-Theorie....

18. November 1983, Christian Kassel, Straßburg (Frankreich).

Eine allgemeine Konstruktion von Ju. P. Razmyslov in der Theorie der p-Gruppen.

Es wird über eine allgemeine Methode berichtet, die Razmyslov zur Erledigung zweier Hauptprobleme in der Gruppentheorie verwendet hat. Ziel der Methode ist die Konstruktion gewisser assoziativen Algebren Δ über einem endlichen Körper. Der Weg dazu führt jedoch über die klassischen Liealgebren.

Sei L eine einfache Liealgebra über $\mathbb{C}$, die in der vollen Matrizenalgebra $M_n(\mathbb{C})$ irreduzibel eingebettet wird. Wählen wir eine Basis $E_1, \dots, E_m$ von L, die orthonormal bezüglich der Spurform ist: $Sp(E_\lambda E_\mu) = \delta_{\lambda\mu}$. Dem Körper $\mathbb{C}$ adjungieren wir kommutierende Symbole ~~der~~ $x_{i\lambda}$ $(i=1,2,\dots;\ \lambda=1,\dots,m)$, die den quadratischen Relationen $x_{i\lambda}x_{i\mu} = \delta_{\lambda\mu}x_{i1}^2$ $(i=1,2,\dots;\ \lambda,\mu=1,\dots,m)$ genügen. Dann sind die Matrizen $X_i = \sum_\lambda x_{i\lambda}E_\lambda$ $(i=1,2,\dots)$ als "allgemeine Elemente von L" zu betrachten.

Sei Γ die assoziative Algebra über $\mathbb{C}$, die durch die X_i erzeugt wird. Dann hat Γ die folgenden Eigenschaften.

① $X_i P X_i Q X_i$ $(P, Q \in \Gamma)$

② $[X_i, X_j] P X_i + X_i P [X_i, X_j] = 0$ $(P \in \Gamma)$.

Def. Ein Polynom in $X_1, \dots, X_r$ heißt k-Wort, falls jedes auftretende Monomial den Grad k in jedem X_i besitzt. Bezeichnen wir mit M_r und T_r die durch die 1- und 2-Wörter in $X_1, \dots, X_r$ gebildeten Unterräume von Γ. (Nach ① sind für $k > 2$ alle k-Wörter Null.)

③ Jedes $U \in T_r$ läßt sich eindeutig in der Form $U = \alpha(U) X_1^2 \cdots X_r^2$ $(\alpha(U) \in \mathbb{C})$ schreiben.

④ Durch $\beta_r(V, V') = \alpha(VV')$ $(V, V' \in M_r)$ wird eine nichtsinguläre, symmetrische Bilinearform β_r auf M_r definiert.

Wichtig bei den Anwendungen sind die Algebren Δ über einem beliebigen Körper K, die man nach dem Muster von Γ konstruiert. Ein solches Δ läßt sich durch Symbole $X_1, X_2, \dots$ erzeugen, die ①, ② und weiteren algebraischen Relationen ~~erzeugen~~ genügen. Diese weiteren Relationen sind so zu wählen, daß auch ③, ④ gelten.

Anwendung. Im Falle $L = \underline{sl}_2(\mathbb{C})$, bilden $E_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ bis auf einen skalaren Faktor eine orthonormale Basis von L. Deuten wir nun diese Matrizen als Elemente von $M_2(\mathbb{F}_{p^2})$ (p Primzahl ≥ 5) statt $M_2(\mathbb{C})$, und bilden wir wie früher die X_i und die entsprechende Algebra Γ_p (über $\mathbb{F}_{p^2}$). In Γ_p können die Bilinearformen β_r ~~singuläre~~ singulär sein; ist aber I das Ideal, die durch die Radikale der β_r erzeugt wird, dann werden ①-④ in $\Delta = \Gamma_p / I$ erfüllt. Sei x_i das Bild von X_i in Δ und bezeichnen wir mit G die multiplikative Untergruppe von Δ, die durch die (invertierbaren!) Elemente $1 + x_i$ erzeugt wird. Satz. (Razmyslov) Die Gruppe G ist (für $p \geq 5$) lokalendlich, nichtauflösbar und vom Exponenten p.

Schwerer ist der Beweis des zweiten Satzes von Razmyslov: Es existiert eine nichtauflösbare Gruppe vom Exponenten 4.

25 November, 1983. G.E. Wall (Sydney)

Differentialgeometrie komplexer projektiver Raumkurven

Es wird berichtet über Formeln für Bogenlänge, Krümmung und Torsion von analytischen Kurven in $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$, sowie über einen Starrheitssatz.

2. Dezember 1983 Gerd Fischer (Düsseldorf)

december 1983 Erik Kjær Pedersen (Odense)

Semifree group actions on spheres.

(joint work with Doug. Anderson): We study the following problem: How does one construct semifree groupactions on a sphere $S^{n+k+1} = S^k * S^n$ fixing a standard sphere S^k. Given such an action it is obvious how to suspend the action so there is the opposite question: does such an action always desuspend. It turns out that the question of existence reduces to a surgery problem involving $L^{(-i)}$-groups, and that up to isotopy, such an action always desuspends down to an action on S^{n+1+1} fixing S^1 and that there is an obstruction in $K_{-1}(G)$ to further desuspending. Here actions are considered isotopic if there exists a semifree action on $S^{n+1+k} \times I$ fixing $S^k \times I$ which is level preserving in the I-factor.

16.12.83 KK-Theorie und C^*-Algebren

J. Cuntz (Marseille)

Für zwei C^*-Algebren A und B führen wir die Kasparov-Gruppe KK(A, B) als die Gruppe der Homotopieklassen von verallgemeinerten Homomorphismen von A nach B ein.
Das Produkt $KK(A,B) \times KK(B,C) \to KK(A,C)$, das die Komposition von Homomorphismen verallgemeinert, bildet die Basis der meisten Berechnungen K-theoretischer Invarianten für nichtkommutative C^*-Algebren.
Zur Illustrierung zeigen wir, daß für eine große Klasse von diskreten Gruppen G die Quotientenabbildung der vollen C^*-Algebra $C^*(G)$ auf die reduzierte C^*-Algebra $C^*_{red}(G)$ ein Inverses auf dem Niveau von KK besitzt.
Dies reduziert die Berechnung der K-theoretischen Invarianten für $C^*_{red}(G)$ auf die ~~vo~~ für $C^*(G)$ welche für gewisse Gruppen einfach ist. Außerdem erhält man auf diese Weise Einblicke in topologische Eigenschaften der Darstellungen von G.

Cohomology and subgroup structure in finite groups

The following theorem which expresses the cohomology of a finite group G in terms of that of certain subgroups is discussed. We fix a prime p and put $\mathcal{C} = \{ H \leq G \mid H/O_p(H) \text{ is cyclic} \}$. Suppose G acts on a simplicial complex Δ such that
(1) for each simplex σ the isotropy group G_σ fixes σ pointwise