16.12.83 KK-Theorie und C^*-Algebren

J. Cuntz (Marseille)

Für zwei C^*-Algebren A und B führen wir die Kasparov-Gruppe $KK(A,B)$ als die Gruppe der Homotopieklassen von verallgemeinerten Homomorphismen von A nach B ein.
Das Produkt $KK(A,B) \times KK(B,C) \to KK(A,C)$, das die Komposition von Homomorphismen verallgemeinert, bildet die Basis der meisten Berechnungen K-theoretischer Invarianten für nichtkommutative C^*-Algebren.
Zur Illustrierung zeigen wir, daß für eine große Klasse von diskreten Gruppen G die Quotientenabbildung der vollen C^*-Algebra $C^*(G)$ auf die reduzierte C^*-Algebra $C^*_{red}(G)$ ein Inverses auf dem Niveau von KK besitzt.
Dies reduziert die Berechnung der K-theoretischen Invarianten für $C^*_{red}(G)$ auf die ~~vo~~ für $C^*(G)$ welche für gewisse Gruppen einfach ist. Außerdem erhält man auf diese Weise Einblicke in topologische Eigenschaften der Darstellungen von G.

Cohomology and subgroup structure in finite groups

The following theorem which expresses the cohomology of a finite groups G in terms of that of certain subgroups is discussed. We fixe a prime p and put $\mathcal{C} = \{H \le G \mid H/O_p(H) \text{ is cyclic}\}$. Suppose G acts on a simplicial complex Δ such that
(1) for each simplex σ the isotropy group G_σ fixes σ pointwise

and (ii) for every $H \in \mathcal{L}$ with $O_p(H) \neq 1$ the fixed point complex Δ^H has Euler characteristic $\chi(\Delta^H) = 1$. Then:

<u>Theorem</u> For any $\mathbb{Z}G$-module M and integer n,

$$H^n(G,M)_p = \sum_{\sigma \in \Delta/G} (-1)^{\dim \sigma} H^n(G_\sigma, M)_p$$

Here the suffix p means the Sylow p-subgroup, the sum is taken over a set of representatives for the orbits of G on Δ, and is to be taken in the Grothendieck group of finite abelian groups with respect to direct sum decompositions. This is enough to determine the isomorphism type of the group on the left.

There are applications when Δ is obtained from the posets of non-trivial elementary abelian p-subgroups of G, and of all non-trivial p-subgroups of G, and also when Δ is the Tits building of a Chevalley group. The proof depends at one stage on the Conlon-Dress induction theorem in modular representation theory.

13.1.84

Peter Webb (Manchester)

Definite Gitter über Funktionenringen

Im Zusammenhang mit der ehemaligen „Serre'schen Vermutung" hat man quadratische Formen über Polynomringen $k[x_1, \dots, x_m]$ untersucht (Bass, Karoubi, Knus, Ojanguren, Parimala, Sridharan u.a.). Sei k ein reeller Körper und allgemeiner A eine nullteilerfreie affine k-Algebra, K ihr Quotientenkörper, mit reellen unendlichen Primdivisoren. Ist $q: V \to K$ eine definite quadratische Form und $M \subset V$ ein A-Gitter, so bilden diejenigen $v \in M$, für die $q(v)$ durch einen gegebenen unendlichen Divisor d beschränkt ist, einen endlich-dimensionalen k-Vektorraum $M(d)$. Anwendungen: 1) Eine kanonische Zerlegung $M = \perp M_i$, $O(M) = \prod O(M_i)$, $O(M_i)$ klassische orthogonale oder unitäre Gruppen über endlich-dimensionalen k-Divisionsalgebren. Ist k reell abgeschlossen, so gilt der Satz von Krull-Schmidt für orthogonale Zerlegungen. 2) Konstruktion von (unzerlegbaren, unimodularen) Gittern M mit einem vorgegebenen Gitter $AM(d)$ von maximalem Rang, insbesondere über Polynomringen ($n \geq 2$).

20. 1. 84 Heinz-Georg Quebbemann (Münster)

Die Picard-Gruppe des Burnside-Ringes.

Sei $A(G)$ der Burnside-Ring einer endlichen Gruppe G und $\mathrm{Pic}\,A(G)$ die Picard-Gruppe der projektiven $A(G)$-Moduln vom Rang 1. Die Betrachtung dieser Gruppe wird motiviert durch geometrische Betrachtungen: Es ist $\mathrm{Pic}\,A(G)$ isomorph zur Gruppe der $A(G)$-Moduln $\omega(X,Y)$, wenn X und Y Homotopiedarstellungen gleicher Dimensionsfunktion sind und ω die Menge der stabilen G-Homotopieklassen beschreibt. Die Gruppe $\mathrm{Pic}\,A(G)$ wird über eine orientierte Version $\mathrm{Inv}\,A(G)$ berechnet, die mit $\mathrm{Pic}\,A(G)$ durch eine exakte Folge $1 \to A(G)^* \to C(G)^* \to \mathrm{Inv}\,A(G) \to \mathrm{Pic}\,A(G) \to 1$ zusammenhängt, in welcher $C(G)$ der Ring aller Funktionen von Konjugationsklassen von Untergruppen nach $\mathbb{Z}$ bezeichnet und ein Stern die Einheitengruppe. Es ist $\mathrm{Inv}\,A(G)$ isomorph zu $\prod_{(H)} (\mathbb{Z}/|WH|)^*$, (H) durchläuft die Konjugationsklassen von Untergruppen H, $WH = NH/H$ die "Weyl-Gruppe" von H. Diese Berechnung von $\mathrm{Inv}\,A(G)$ geschieht über multiplikative Kongruenzen für die Einheitengruppe des p-adisch komplettierten Burnside-Ringes einer p-Gruppe, die aus analogen Kongruenzen für den rationalen Darstellungsring hergeleitet werden. Die Picard-Gruppe $\mathrm{Pic}\,A(G)$ ist ferner relevant für die Endlichkeitshindernisse und das Problem der exponentiellen Isomorphismen für den Burnside-Ring. Für p-Gruppen bzw. reguläre p-Gruppen versteht man die letzten beiden Probleme. Der kombinatorische

Aspekt der Kongruenzen und der Endlichkeitshindernisse (Möbius-Inversion im Untergruppenverband) versteht man besser durch Einführen eines multiplikativen Analogons zum Burnside-Ring.

30. Januar 1984 T. tom Dieck (Göttingen).

Gruppenringe endlicher Gruppen über ganzen p-adischen Zahlen

Der Gruppenring $\Lambda = RG$ einer endlichen Gruppe G über dem Ring der ganzen p-adischen Zahlen R wird eingebettet in eine graduierte Oberordnung Γ. Graduierte Ordnungen Γ werden über die Existenz hinreichend vieler idempotenter Elemente definiert und können durch wenige Invarianten beschrieben werden, die sich am Grothendieckring der endlichen Γ-Moduln interpretieren lassen. Für derartige Oberordnungen Γ von Λ wird eine Führerformel bewiesen. Diese läßt sich besonders gut in dem Fall anwenden, wo die Zerlegungszahlen von Λ 0 oder 1 sind. Als Anwendung wird eine Beschreibung des Gruppenringes der M_{11} über den 2-adischen Zahlen gegeben und der Hauptblöcke von $SL_2(q)$, $2 \nmid q$ ~~für~~ ebenfalls über den 2-adischen Zahlen.

3. 2. 84 W. Plesken (Aachen)

Kurven auf Hilbert'schen Modulflächen

Die Tate-Vermutung für eine singularitätenfreie projektive Fläche X über einem Zahlkörper K sagt die Gleichheit der Dimension des Invariantenraums unter der Galoisgruppe in der l-adischen Kohomologiegruppe $H^2(X \times_K \bar{K}, \mathbb{Q}_\ell)$, der Dimension des Unterraums, der von den Fundamentalklassen von K-rationalen algebraischen Zykeln der Dimension 1 dort erzeugt wird, und der Polordnung in $s = 2$ der Zetafunktion $Z(X/K, s)$ voraus. Im Vortrag habe ich erklärt, wie man die Vermutung im Fall der Hilbert'schen Modulflächen über einem Kreisteilungskörper löst (gemeinsame Arbeit mit Harder und Langlands). Die benötigten algebraischen Zykeln werden hier durch die einfache Konstruktion von Hirzebruch und Zagier geliefert (i. w. Transformierte der Diagonalen unter den Hecke-operatoren).

10. 2. 84 M. Rapoport (Heidelberg).

Some Problem in Geometric Complexity.

Several unsolved problems are mentioned, along with motivation from various fields (stochastic automata, spectrophotometry, etc.), and some details are provided concerning the recent solution of the problem of finding the smallest triangle containing a given convex n-gon. In connection with various packing and layout problems, one would like to do this as efficiently as possible. An $O(n \log^2 n)$ algorithm is obtained, and it actually finds all local minima. Surprisingly, perhaps, it computes no areas at all, but relies on a simple geometric characterization of the local minima. Related results in higher-dimensional spaces are also mentioned.

5.3.84 V. Klee (Seattle).

Entartungen von Darstellungen

Sei Q ein Köcher mit n Punkten und I ein Ideal von Relationen auf Q. Für $\underline{d} = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{N}^n$ betrachten wir die affine Varietät $\mathfrak{M}^{\underline{d}}$ der Darstellungen X

von (Q, I), für die der einer Ecke i zugeordnete Vektorraum $X(i)$ gleich k^{d_i} ist. Auf $\mathfrak{M}^d$ operiert die Gruppe $G^d = \prod GL(d_i)$ (durch Basiswechsel), und die G^d-Bahnen sind genau die Isomorphieklassen von Darstellungen. Liegen X und Y in $\mathfrak{M}^d$, so heisst Y eine Entartung von X, falls Y im Zariskiabschluss der G^d-Bahn durch X liegt.

Für eine Entartung Y von X gilt:

$$\dim_k \mathrm{Hom}_{(Q,I)}(U, X) \le \dim_k \mathrm{Hom}_{(Q,I)}(U, Y)$$

für alle Unzerlegbaren U. Besitzt (Q, I) bloss endlich viele Unzerlegbare, so impliziert diese Bedingung umgekehrt, dass es eine Darstellung Z gibt, so dass $X \oplus Z$ nach $Y \oplus Z$ entartet. Ist Q ein Dynkinköcher A_n oder D_n, so kann man kürzen, d.h. Y ist auch Entartung von X.

13. 4. 84 Ch. Riedtmann, Grenoble

A Global Analysis Approach to Teichmüller Theory

Let $\mathcal{A}$ be the space of almost complex (and hence complex) structures on an oriented compact surface M without boundary such that for each $X_x \in T_xM$ $(X_x, J_x X_x)$, $J \in \mathcal{A}$ is an oriented basis for T_xM. Teichmüller space is then defined as $\mathcal{A}/\mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_0$ = those C^∞ diffeomorphisms homotopic to the identity. One can show using only global analytic methods that $\mathcal{A}/\mathcal{D}_0$ is a C^∞ finite dimensional manifold of dimension $6(\text{genus } M) - 6$ which is diffeomorphic to Euclidean space. This is Teichmüller's theorem

27/4/84 A. J. Tromba

Über „große" H-Flächen

Ist Γ eine geschlossene, rektifizierbare Jordankurve in $\mathbb{R}^3$ und $H \neq 0$ eine reelle Zahl von hinreichend kleinem Betrag, so gibt es zwei über der Einheitskreisscheibe parametrisierte Flächen $\underline{x}$, $\bar{x}$ konstanter mittlerer Krümmung H mit Rand Γ, und zwar eine „kleine" und eine „große". Dies beweist eine Rellich zugeschriebene Vermutung. Der Beweis beruhte auf einem Ansatz von M. Struwe (der z. B. für ebene Γ funktioniert), den ich vervollständigen konnte. Physikalisch kann man solche „H-Flächen" durch Seifenblasen realisieren, die auf einem Rohr mit Rand Γ sitzen – bei gewissen sehr flachen Blasen und bei Blasen mit sehr großem Volumen hat man dieselbe konstante mittlere Krümmung H! (Inzwischen haben Brezis & Coron gezeigt, daß sogar für $0<|H|<(\text{Umkugelradius von } \Gamma)^{-1}$ stets zwei H-Flächen mit Rand Γ existieren – nicht nur für „hinreichend kleine $|H|$.)

4.5.84 K. Steffen (Düsseldorf)

Erzeugbarkeit durch Elementarmatrizen und beschränkte Wortlänge in SL_2

Es sei A ein kommutativer Ring mit Eins, $E_2(A) = \mathrm{Erz}\left\{\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\a&1\end{pmatrix} \mid a \in A\right\} \subset SL_2(A)$ die von allen Elementarmatrizen erzeugte Untergruppe. Für folgende Fragen werden Beispiele behandelt:

1) Wie verhält sich $E_2(A)$ zu $SL_2(A)$? Gilt Gleichheit? Was läßt sich über den Index sagen? etc.
2) Sei für $\alpha \in E_2(A)$ $\nu(\alpha)$ = min. Anzahl elementarer Matrizen ε_i mit $\alpha = \prod \varepsilon_i$. Ist ν beschränkt?

Die Beispiele sind zum einen Polynom- und Laurentringe über Hauptidealbereichen, zum andern

arithmetische Dedekindringe.
Insbesondere wird berichtet, wie man im Fall arithmetischer Dedekindringe mit unendlicher Einheitengruppe wenigstens die Beschränktheit der Wortlängenfunktion ν zeigen kann ohne Verwendung verallgemeinerter Riemannscher Hypothesen (Cooke, Weinberger, 1975).

11.5.84 Bernhard Liehl

GENERALIZED HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS AND STATISTICAL DISTRIBUTIONS

Use has been made of Meijer's G-function in deriving the exact distribution of

(a) A criterion for testing the hypothesis that several normal populations are identical

(b) product/ratio of independent generalized gamma variates

A few special cases of interest are indicated in terms of Gauss's hypergeometric function ${}_2F_1$.

The results are also obtained in series forms suitable for computation using inverse Mellin transform, the calculus of Residues and properties of Psi and Riemann's Zeta functions. (Based on recent unpublished work of the author)

R. Rathie (CAMPINAS, BRAZIL & JAIPUR, INDIA)

16.5.84

Applications of Burgess inequality to automorphic function theory.

The Burgess' inequality concerns the estimation of sum of the real characters (Jacobi symbol): If an integer D is not a square, then

$$\sum_{1 \le r \le R} \left(\frac{D}{r}\right) \ll_\varepsilon R^{\frac{1}{2}} D^{\frac{3}{16}+\varepsilon} .$$

One of the applications is the theorem which I mentioned one year before (p. 232 of this volume) concerning the estimation of the number of exceptional eigenvalues of the hyperbolic Laplace operator connected with the Hecke congruence group $\Gamma_0(p)$, p being a prime number. The second application makes possible to improve the error term in the prime geodesic theorem for the modular group. We consider the counting function

$$\pi(x) = \mathrm{card}\{\{\gamma_0\} - \text{primitive hyperbolic classes with the norm } N\{\gamma_0\} \le x\}$$

Then it was known (due to Selberg) that

$$\pi(x) = \mathrm{li}\, x + O_\varepsilon(x^{\theta+\varepsilon}) \quad \text{with } \theta = \frac{3}{4}.$$

Recently using the Burgess inequality and the Kuznetsov summation formula Henryk Iwaniec was able to obtain the above theorem with $\theta = \frac{35}{48}$.

I would like to mention some open problems concerning the possible applications of the Burgess inequality.

First is the Lehner conjecture about non-vanishing of holomorphic Poincaré series $G_k(z, m)$ for the modular group. There is the classical result due of H. Petterson that the first k Poincaré series do not vanish identically. Nextly R. Rankin using the A. Weil estimation for Kloosterman sums and some estimations of Bessel functions proved that for large values of k the first k^2 ~~poi~~ Poincaré series $G_k(z; m)$ (it means for $m \le k^2$) do not vanish identically. I shall try to improve the Rankin result. The second question is connected with the hyperbolic circle problem. For $z_1, z_2 \in H$ (the upper half plane) we set

$$L(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - \bar{z}_2|^2}{(\operatorname{Im} z_1)(\operatorname{Im} z_2)}$$

and consider the function

$$N(x; z_1, z_2) = \operatorname{card}\{\gamma \in SL(2, \mathbb{Z});\ L(z_1, \gamma(z_2)) \le x\}.$$

It was proved by S. J. Patterson that

$$N(x; z_1, z_2) = \frac{\pi}{\operatorname{vol}(F)} x + O(x^{\frac{3}{4}})$$

vol(F) is the volume of the fundamental domain.

and nextly the error was improved to $O(x^{\frac{2}{3}})$ (Lax, Phillips, Good). The problem of investigating the error term is also connected with Kloosterman sums ~~x~~.

Janusz Szmidt (Warsaw, Poland)

18. 05. 1984.

TYPES IN THE λ-CALCULUS

The λ-calculus can be viewed as a primitive high-level programming-language, which is currently used by programming-theorists as a "test-bed" for trying out new ideas, developing them, & then applying them to practical languages such as LISP or PASCAL. However the λ-calculus was originally invented in the 1930-s (by Alonzo Church) as part of a program of expressing higher-order logic & mathematics in terms of "function" rather than "set".

λ-TERMS: Variables: $x, y, z, \ldots$. Applications: $X(Y)$. Abstractions $(\lambda x.M)$

λ-reduction: Axiom-schemas:

$$\begin{cases} (\alpha) & \lambda x.M \geq \lambda y.[y/x]M \quad \text{if } y \text{ not in } M \\ (\beta) & (\lambda x.M)N \geq [N/x]M. \\ (\rho) & M \geq M \end{cases}$$

Rules: Transitivity and replacement.

λ-conversion: Same as reduction but including symmetry rule.

TYPES: (H. B. Curry) Type-variables: $a, b, c, \ldots$ Type-Constants: $N, \ldots$ Function-Types $(\alpha \to \beta)$

STATEMENTS: "$X \in \alpha$".

TYPE-ASSIGNMENT RULES:

$$(1)\ \frac{X \in (\alpha \to \beta) \quad Y \in \alpha}{X(Y) \in \beta} \qquad (2)\ \frac{\begin{matrix}[x \in \alpha] \\ \vdots \\ M \in \beta\end{matrix}}{(\lambda x.M) \in (\alpha \to \beta)}$$

In (2), "x" must not occur in any other assumption (e.g. $x \in \beta$, $\beta \not\equiv \alpha$)

DEF X is Stratified iff $(\exists \alpha)\ \vdash$ "$X \in \alpha$". ("$\vdash$" means "It can be proved that")

CHURCH-ROSSER THM If X converts to Y then $(\exists Z)$ $X \geq Z$ & $Y \geq Z$.

NORMALIZATION THM If X is Stratified then there are no infinite reductions $X \geq\ \geq\ \geq \cdots$

P.T.S. THM If X is Stratified then $(\exists \alpha_0)$ ($\vdash$ "$X \in \alpha_0$" and every other type of X can be obtained from α_0 by substitution

The normalization theorem makes this system (or more precisely, various extensions of this system) useful in making up consistency-proofs in logic, e.g. Gödel's 1958 proof of the consistency of arithmetic.

Other extensions of the system are used as a basis for introducing types into programming languages.

References:

1. Curry & Feys "Combinatory Logic" Chapters 7, 8, North-Holland Co. 1958.
2. Hindley "The completeness Theorem for Typing λ-terms", in Theoretical Computer Science 22 (1983), 1-17 & references in its bibliography

(Swansea) J. R. Hindley 21-5-1984.

Rational Singularities and almost split sequences

Let $\mathbb{C}$ be the complex numbers and $G \subset GL(2,\mathbb{C})$ a finite group. Then G acts as a group of $\mathbb{C}$-algebra automorphisms on $S = \mathbb{C}[[X_1, X_2]]$ by the action of G on the 2 dimensional $\mathbb{C}$-subspace spanned by X_1 and X_2 given by the inclusion $G \subset GL(2,\mathbb{C})$. Then $R = S^G$, the fixed point ring of S under G, is a rational singularity provided G has no pseudo-reflections, an assumption we make throughout. We give a very intimate relationship between the reflexive R-modules and the complex representations of G. One consequence is showing that the MacKay graph defined for the embedding of G in $GL(2,\mathbb{C})$ is the same thing as the underlying graph of the Auslander-Reiten quiver for the reflexive R-modules given by the structure of the almost split sequences for reflexive R-modules.

M. Auslander 25/5/84 (Brandeis)

Applications of a van Kampen theorem for diagrams of spaces

(Report on joint work with J.-L. Loday (Strasbourg))

In homotopy theory there are a number of results which are satisfactory for simply-connected spaces, but for which formulations in general have been lacking, particularly if some non-abelian group is to be described. This talk mainly describes some new constructions and applications which have arisen from a van Kampen theorem for n-cubes of maps.

Let M, N be normal subgroups of a group P, so that P acts on both M and N by conjugation: ${}^{y}x = yxy^{-1}$. We define the (non-abelian) tensor product $M \otimes N$ as the group generated by symbols $m \otimes n$, $m \in M$, $n \in N$ with the relations

$$mm' \otimes n = {}^{m}(m' \otimes n)\ (m \otimes n),$$
$$m \otimes nn' = (m \otimes n)\ {}^{n}(m \otimes n'),$$
where ${}^{p}(m \otimes n) = {}^{p}m \otimes {}^{p}n$, for all $m, m' \in M$, $n, n' \in N$, $p \in P$.
(All that is needed here is that M, N act on each other.)

We also define
$$M \tilde{\wedge} N = (M \otimes N) / \{(m \otimes n)(n \otimes m) = 1 \ : \ m, n \in M \cap N\},$$
$$M \wedge N = (M \otimes N) / \{m \otimes m = 1 \ : \ m \in M \cap N\},$$
so that we have quotients
$$M \otimes N \to M \tilde{\wedge} N \to M \wedge N.$$
We have a commutator map $c : M \wedge N \to P$, $m \wedge n \mapsto [m, n]$.

In general, $M \otimes M \to [M, M]$ is a central extension, which is universal if and only if M is perfect. If M is finite, then $M \otimes M$ is finite.

The main applications are as follows.

<u>Th: 1</u> Let X be a connected space. Then there are exact sequences
$$\pi_2 X \xrightarrow{E} \pi_3 SX \xrightarrow{H} \pi_1 X \otimes \pi_1 X \xrightarrow{[\,,\,]} (\pi_1 X) \to (\pi_1 X)^{ab} \to 1$$
$$\pi_2 X \xrightarrow{E^2} \pi_4 S^2 X \xrightarrow{H^2} \pi_1 X \tilde{\wedge} \pi_1 X \xrightarrow{[\,,\,]} \pi_1 X \to (\pi_1 X)^{ab} \to 1$$
where H, H^2 are "Hopf invariants".

<u>Thm 2</u> Suppose given a homotopy pushout
$$\begin{array}{ccc} K(P,1) & \xrightarrow{i} & K(Q,1) \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & \downarrow \\ K(R,1) & \longrightarrow & X \end{array}$$
and exact sequences $1 \to M \to P \xrightarrow{i_*} Q \to 1$, $1 \to N \to P \xrightarrow{j_*} R \to 1$.
Then $\pi_1 X = Q *_P R$ (as is well-known),
$$\pi_2 X = (M \cap N) / [M, N],$$
$$\pi_3 X = \mathrm{Ker}(M \otimes N \to P)$$
$$H_3 \tilde{X} = \mathrm{Ker}(M \wedge N \to P).$$

Thm 2 leads to useful exact sequences in the homology of discrete groups.

The proofs involve a van Kampen theorem for a functor

$$\Pi : (n\text{-cube groups}) \longrightarrow (\mathrm{cat}^n\text{-groups}).$$

Here cat^0-groups are just groups, cat^1-groups are equivalent to crossed modules, and there are equivalences

cat^2-groups $\sim$ crossed squares, (Guin-Waléry & Loday)

cat^3-groups $\sim$ crossed cubes. (G.J. Ellis)

These equivalences lead to explicit constructions of colimits, and so to presentations of groups.

Ronald Brown (Bangor, N. Wales) 1/6/84

Mannigfaltichkeiten mit positiver Skalarkrümmung

Sei M^n eine kompakte, zussamenhängende, C^∞ Mannigfaltigkeit ohne Rand [und für Einfachheit, auch orientierbar]. Ich möchte das folgendes Problem betrachten: wann gibt es eine Riemannsche Metrik auf M, sodaß die Skalarkümmungsfunktion κ am jedem Punkt positiv ist? Wann n ($=\mathrm{Dim.}\,M$) $= 2$, zeigt der Satz von Gauß-Bonnet, daß $\kappa > 0$ möglich ist, genau wann $\chi(M) > 0$, also wann $M \cong S^2$. Für die andere Fläche, $\pi_1(M)$ ist unendlich, $\tilde{M}$ (die Universalüberlagung von M) ist zs.-ziehbar, und $\kappa > 0$ ist umöglich. Wann $n \geq 3$, weiß man, daß $\kappa < 0$ immer möglich ist [Aubin, Kazdan-Warner], aber gibt es noch Mannigfaltigkeiten, daß keine Metrik mit $\kappa > 0$ haben.

Als Folgesatz des Indexsätzes von Atiyah-Singer, zeigte Lichnerowicz, daß wann $w_2(M) = 0$ in $H^2(M, \mathbb{Z}_2)$ (sodaß M eine [nicht notwendigerweise einzige] Spinstruktur hat) und auch M positive Skalarkümmung hat, muß auch $\hat{A}(M)$ [$= \langle \hat{A}(M), [M] \rangle$, wo $\hat{A}$ ein Polynom in den Pontryagischen Klassen von M is] $= 0$. Z.B., hat eine K3-Fläche (von komplexer Dimension 2) keine Metrik mit $\kappa > 0$.

Die Basis den Beweis von Lichnerowicz ist die Gleichung $D^*D = \nabla^*\nabla + \frac{\kappa}{4}$, wo D der Diracoperator über eine Spin-Mannigfaltigkeit ist. Dann wann $\kappa > 0$ ist das Spektrum ~~s~~ von D^*D (und, nach Symmetrie, auch ~~s~~ von DD^*) stark positiv, sodaß $\operatorname{ind}(D) = 0$.

Man kann denselben Beweis benutzen, mit D_V, der Diracoperator mit Koefizienten in einem flaches Bundel V, statt D. Es folgt, daß auch $\langle \hat{A}(M) \cdot ch[V], [M] \rangle = 0$. Hier muß V flach sein, sodaß eis keine Berichtigung von der Krümmung von V gibt [in der Formel von Lichnerowicz]. Aber nach Chern-Weil-Theorie, die charakteristischen Klassen (über $\mathbb{Q}$) von flachen Bundeln null sind! Auflösung: Bundeln mit unendlich-dimensionalen Fasern zu benutzen! Es gibt eine Indextheorie, und einer Indexsatz (von Miščenko-Fomenko), für elliptische Operatoren mit Koefizienten in einer C^*-Algebra (als $C^*(\pi_1(M))$). Mit Hilfe dieser Idee, kann man den folgendem Satz beweisen:

<u>Veralgem. Satz von Lichnerowicz</u> Sei M^n eine kompakte Manigfaltigkeit mit eine Spin-Struktur s (sodaß $w_2(M) = 0$) und einer "guten" Fundamentalgruppe π und einer Metrik mit $\kappa > 0$. Dann ist $[M, s, f] = 0$ in $KO_n(B\pi)$, wo $[M, s, f]$ ~~ist~~ das Abbild von dem Kobordismusklasse von $(M, s) \xrightarrow{f} B\pi$ ~~ist~~, und f die Klassifizierungsabbildung $M \to B\pi = K(\pi, 1)$ ist.

<u>Korollar</u> Sei M "unsphärisch" ($\pi_j(M) = 0$ für $j > 0$) mit einer "guten" Fundalenentalgruppe. Dann hat M keine Metrik mit positiver Skalarkrümmung.

(Wann $n = 2$, dies ist unserer Korollar von Gauß-Bonnet!)

Jonathan Rosenberg, den 8/6/84
(Maryland und I.H.E.S.)

8.6.84

Small Unitary Representations of Classical Groups

By studying the restriction of unitary representations to certain unipotent subgroups, one can give a partial description of the unitary dual of classical groups. The basic ideas will be illustrated in the case of $Sp_{2n}(\mathbb{R})$, the real symplectic group in $2n$ dimensions.

Let X be a real vector space and set

$$W = X \oplus X^*$$

where X^* is the dual space to X. Define on W an antisymmetric bilinear form $\langle\, ,\rangle$ by the recipe

$$\langle (x,\lambda),(x',\lambda')\rangle = \lambda'(x) - \lambda(x') \qquad x,x' \in X;\ \lambda,\lambda' \in X^*$$

Then $Sp(W) = Sp$ is the isometry group of the form $\langle\, ,\rangle$.

Let $P \subseteq Sp$ be the subgroup which stabilizes X. There is the obvious restriction homomorphism

$$r: P \to GL(X),$$

which is surjective, and the kernel of r is an abelian group N. We have

$$N \simeq S^2(X),$$

the second symmetric tensor power of X.

Consider a unitary representation ρ of P, and consider the restriction $\rho|N$. According to general principles, $\rho|N$ is described by a "spectral measure", a projection-valued measure on $\hat{N}$, the Pontryagin dual of N. Since this measure arises by restriction of a representation of P, it must allow $GL(X)$ as a group of automorphisms. Thus the spectral measure

i) will be absolutely continuous with respect to the standard (Lebesgue) measure class on each orbit.

ii) will have constant multiplicity on each orbit

Thus $\rho|N$ is completely described by a collection of numbers $m_{\mathcal{O}}$, $0 \le m_{\mathcal{O}} \le \infty$, one for each $GL(X)$ orbit $\mathcal{O} \subseteq \hat{N}$, giving the multiplicity of the spectral measure on that orbit. Since

$$\hat{N} \simeq (S^2(X))^* \simeq S^{2*}(X)$$

is just the space of symmetric bilinear forms (possibly degenerate) on X, there are only a finite number of orbits in $\hat{N}$, with representatives

$$\beta_{r,s} = \left[\begin{array}{ccc} 1 \ddots 1 & & \\ & -1 \ddots -1 & \\ & & 0 \ddots 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\, r \\ \}\, s \\ \}\, n-r-s \end{array}$$

The rank of $\beta_{r,s}$ is $r+s$.

Thus the behavior of $\rho|N$ is very limited, and suggests the following definitions.

a) A representation ρ of P has N-rank $\leq k$, if $m_{\mathcal{O}} = 0$ for all orbits $\mathcal{O}$ consisting of forms of rank $> k$.

b) A representation ρ of P has pure N-rank k if $m_{\mathcal{O}} = 0$ except when $\mathcal{O}$ consists of forms of rank k.

c) A representation ρ of P has N-spectral type $\mathcal{O}$ if $m_{\mathcal{O}'} = 0$ for $\mathcal{O}' \neq \mathcal{O}$.

By the Mackey theory of induced representations, an irreducible representation of P will have N-spectral type $\mathcal{O}$ for some orbit $\mathcal{O} \subseteq \hat{N}$. Since representations of Sp are not necessarily reducible when restricted to P, the following result is perhaps unexpected. $\tilde{\tilde{S}}p$ = universal cover of Sp

__Theorem:__ a) Given $\rho \in (\tilde{\tilde{S}}p)^\wedge$ (the unitary dual of $\tilde{\tilde{S}}p$), there is an integer k, $0 \leq k \leq n$ such that $\rho|N$ has pure N-rank k.

b) If $k < n$, then ρ has N-spectral type $\mathcal{O}$ for some orbit $\mathcal{O}$ (of rank k).

c) Also if $k<n$, then ρ factors to $\tilde{S}p$, the 2-fold cover of Sp, and factors to Sp if and only if k is even.

From this theorem we deduce a decomposition

$$(\tilde{\tilde{S}}p)^\wedge = \bigcup_{k \leq n} (\tilde{\tilde{S}}p)^\wedge_k = (\tilde{\tilde{S}}p)^\wedge_n \bigcup_{k<n} \Big(\bigcup_{\text{rank } \beta = k} (\tilde{S}p)^\wedge_\beta$$

where $(\tilde{\tilde{S}}p)^\wedge_k$ is the subset of $(\tilde{\tilde{S}}p)^\wedge_k$ consisting of representations of pure ~~spectral type~~ N-rank k, and $(\tilde{S}p)^\wedge_\beta$ consists of representations of N spectral type β.

Theorem: Let $X_1 \subseteq X$ have dimension k, and let P_1 be the stabilizer of X_1 in Sp. $\tilde{P}_1$ is the inverse image of P_1 in $\tilde{S}p$

a) The restriction of $\rho \in (\tilde{S}p)^\wedge_k$ to $\tilde{P}_1$ is irreducible

b) If $\rho_1, \rho_2 \in (\tilde{S}p)^\wedge_k$ and $\rho_1|\tilde{P}_1 \simeq \rho_2|\tilde{P}_2$, then $\rho_1 \simeq \rho_2$.

From this theorem, we deduce an injection

$$(\tilde{S}p)^\wedge_k \hookrightarrow \hat{P}_1$$

Combining this map with Mackey's theory of representations of group extensions, and keeping in mind that we are working with representations of rank k, one can deduce an injective map, for each β

$$\delta: (\tilde{S}p)^\wedge_\beta \hookrightarrow \hat{O}_\beta$$

where $\underline{O_\beta}$ is the orthogonal group of the inner product of type β

Theorem: For rank $\beta \le n-2$, the map δ above is surjective, hence bijective.

This theorem should also hold for rank $\beta = n-1$, but the proof is harder.

Also, it seems possible that alternate versions of the notion of rank should lead to a finer decomposition of $(\tilde{S}_p)^\wedge$, which would in particular give a finer structure to $(\tilde{S}_p)^\wedge_n$.

(13.6.84) (Roger Howe, Yale)

Über die Brauer-Vermutung für A-Sylowturmgruppen.

Die von R. Brauer 1965 im Harvard Problem Book aufgeworfene Frage ob $\mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}H \Rightarrow G \simeq H$ (G, H endliche Gruppen) findet bejahende Antwort für Gruppen G mit Sylowturm: $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \dots \triangleright G_s = 1$, $G_{i-1} : G_i = p_i^{\nu_i}$ ($\nu_i \in \mathbb{Z}^{>0}$) ($1 \le i \le s$), $p_1, \dots, p_s$ verschiedene Primzahlen, mit lauter abelschen Sylowgruppen: $(G_{i-1}, G_{i-1}) \le G_i$ ($1 \le i \le s$). Der Beweis wird ermöglicht durch die zusätzliche Behauptung, dass jeder Automorphismus α von $\mathbb{Z}G$ ~~da~~ die Gruppe G in eine $U(\mathbb{Q}_\alpha G)$-Konjugierte überführt wird. Die auf D. G. Higman's Thesis aufgebaute Induktion führt zu dem folgenden Kernsatz: Sei $G = A \rtimes B$, $|A| = p^n > 0$, $p \nmid |B|$, p Primzahl, A abelsch, α Automorphismus von $\mathbb{Z}_pG$ über $\mathbb{Z}_p$ ($\mathbb{Z}_p$ = p-adischer Ganzheitsbereich), $\alpha(b) = b$ ($b \in B$), $\alpha(a) \equiv a \,(W_p)$ ($W_p = \Delta_{\mathbb{Z}_p}B\,\Delta_{\mathbb{Z}_p}A \dotplus \Delta^2_{\mathbb{Z}_p}A$ Whitcomb ideal von $\mathbb{Z}_pG$) ($a \in A$), α permutiert die Klassensummen. Dann ist $\alpha(C) = C$ für $C \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_pG)$.

Für den (nicht ganz leichten Beweis) erweist sich Einbettung von G in $\bar{G} = \bar{A} \times \bar{B}$ ($\bar{B} = B \times B'$, $\bar{A} = A \times A'$, Aktion von B' auf A' kontragredient zu Aktion von A auf B im Sinne der Maranda-Theorie + Einbettung von $\mathbb{Z}_p\bar{G}$ in Maximalordnung $\mathfrak{o}(\mathbb{Z}_p\bar{A})\mathbb{Z}_p\bar{B}$ ($\mathfrak{o}(\mathbb{Z}_p\bar{A}) = \mathbb{Z}_p$-Maximalordnung von $\mathbb{Q}_pA$) als entscheidendes Hilfsmittel.

Hans Zassenhaus

(Columbus)

(15.6.84)

Nichtlineare Optimierung.

Einteilung von Optimierungsaufgaben; finite, semiinfinite und infinite Optimierung. Verallgemeinerungen der Konvexität, insbesondere quasikonvexe Optimierung. Potentiale in der Physik als quasikonvexe Funktionen. Anwendungen auf Travelling salesman-Probleme, das Kellerproblem, Zerschneideaufgaben, Cluster-Analysis u. a.. — Eine der wichtigsten Anwendungen der Optimierungsprobleme tritt bei der numerischen Behandlung gewöhnlicher u. partieller linearer u. nichtlinearer Differentialgleichungen, bei Integralgleichungen u. Funktionalgleichungen auf. Wenn man (punktweise) Monotonie beweisen kann, kann man gewöhnlich auch die gesuchte Lösung in Schranken einschliessen, die man (punktweise) garantieren kann. Zur Erzielung brauchbarer Schranken verwendet man die Optimierungsverfahren. Häufig sind die Optimierungsmethoden die einzigen numerischen Verfahren, die garantierbare Schranken für den Absolutbetrag des Fehlers einer Näherungslösung liefern. Dies wird an verschiedenen Beispielen numerisch vorgeführt: Finite Element-Methode beim Torsionsproblem eines -Trägers, Randwertaufgabe eines Pipeline-Models mit 3 verschiedenen Typen von Singularitäten (Sprünge in den Randwerten, Logarithmen, Pole), Temperaturverteilung im Raum mit <u>dreidi</u>mensionaler Singularität (Kante), freie Randwertaufgabe u. a.

Lothar Collatz, 20.6.1984
(Hamburg)

Die minimale Anzahl definierender Gleichungen für projektive Varietäten.
Diese Thematik geht auf L. Kronecker zurück, der in der „Kummer-Festschrift" 1882 bewies, daß jede algebraische Varietät im n-dimensionalen Raum der Schnitt von (n+1) Hyperflächen ist. Diese Schranke wurde 1973 von Eisenbud und Evans um „1" verbessert. Die Vermutung ist aber, daß jede zusammenhängende (z. B. irreduzible) Varietät ein Schnitt von (n-1) Hyperflächen ist. Offenbar stehen wir z. Z. dieser Frage ziemlich hilflos gegenüber. Wir wollen daher die algebraische-

geometrischen ~~[illegible]~~ Methoden hinsichtlich der konstruktiven Seite verfeinern, um alte und neue Gegenbeispiele zu Vermutungen und Problemen von Hartshorne bzw. Robbiano-Valla zu konstruieren. Hier ist mein Lieblingsproblem: Sei C die Kurve im 3-dimensionalen projektiven Raum mit der allgemeinen Nullstelle $\{s^4, s^3t, st^3, t^4\}$ über $\mathbb{C}$. Ist C mengentheoretisch der Durchschnitt von 2 Hyperflächen? Eine Vermutung von Hartshorne aus dem Jahre 1970 besagt: NEIN ~~[illegible]~~
(Vgl. auch die Arbeiten von Perron aus ≈ 1940)
Meine Vermutung: Ja!
Meine Belohnung für eine explizite Angabe der beiden Gleichungen ist:
10 Flaschen vom Saale-Unstrut Wein.

W. Vogel, 22.6.1984

(W. VOGEL, MARTIN-LUTHER-UNIVERSITÄT
4020 HALLE, DDR)

Identities in groupoids derived from Semigroups

By A. C. Kim
Department of Mathematics
Busan National University
Pusan 607, Korea

Suppose that $\mathcal{G}$ is an arbitrary Semigroup with Carrier $\mathcal{G}$ and the operation "+". If α and β are endomorphisms of $\mathcal{G}$, then we define a binary operation μ on $\mathcal{G}$ as following:

$$\forall x, y \in \mathcal{G}, \quad xy\mu = \alpha x + \beta y$$

Thus $\mathcal{G}$ becomes a Carrier of a groupoid, denoted by $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$. The natural questions would be given: 1) What is a basis of $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$? 2) Are they finitely based?

3) How about the Commutativity for α and β of $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$?

If $\mathcal{G}$ is Commutative with $\alpha\beta = \beta\alpha$, then $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ has a law of the form

$$uv\mu u'v'\mu\mu = uu'\mu vv'\mu\mu$$

and its Consequences, where u, v, u', v' words.

And if L is a finite set of identities of $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$, then there is a law of $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ which is not a consequences of L. Thus $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ is not finitely based.

(9. 8. 84)

Die Kombinatorik der darstellungsendlichen Algebren, P. Gabriel, 12.10.84

Es sei k ein alg. abgeschloss. Körper. Zur Beschreibung der endlichdimensionalen k-Algebren mit endlich vielen Unzerlegbaren wird der folgende "kombinatorische" Begriff benötigt: Eine Strahlenkategorie ist eine Kategorie P mit Nullmorphismen derart, dass: a) Verschiedene Objekte sind nicht isomorph; b) Als Halbgruppe hat $P(x,x)$ für jedes $x \in P$ die Gestalt $\{1_x, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n_x-1}, 0\}$; c) für $x \neq y$ ist $P(x,y)$ als Menge mit Operatorenhalbgruppen $P(x,x)$ und $P(y,y)$ zyklisch von links oder von rechts; d) Für jedes x ist $P(x,y) = 0 = P(z,x)$ für fast alle y, z; e) die Morphismen genügen der Kürzungsregel $\mu\nu = \mu\pi \neq 0 \Rightarrow \nu = \pi$ und $\mu\nu = \lambda\nu \neq 0 \Rightarrow \mu = \lambda$. Eine Strahlenkategorie kann aufgefasst werden als Restklassenkategorie der Wegekategorie (mit Nullen) ihres Köchers Q. Dabei wird Q gebildet von den Objekten von P und den irreduziblen Morphismen.

Die Linearisierung $k(P)$ von P hat dieselben Objekte wie P. Ihre Morphismenräume werden definiert als $k(P)(x,y) = \Sigma k P(x,y) / k\,{}_x0_y$ (dabei ist $\Sigma k P(x,y)$ der von $P(x,y)$ frei erzeugte Vektorraum, und ${}_x0_y \in P(x,y)$ ist der Nullmorphismus). Es gilt der Satz: Jede darstellungsendliche endlichdimensionale Algebra ist isomorph der Matrizenalgebra $\bigoplus_{i,j} k(P)(x_i, x_j)$ für eine wohlbestimmte endliche Strahlenkategorie P und eine ausschöpfende Folge von Objekten (x_i); dabei wird char $k \neq 2$ vorausgesetzt. Der Satz gilt auch, diesmal ohne Einschränkung (Bongartz), für minimal darstellungsunendliche Algebren.

Ein Funktor $F: P' \to P$ zwischen 2 Strahlenkategorien ist eine Überlagerung, wenn gilt: a) $F\mu = 0 \Leftrightarrow \mu = 0$; b) für alle $\mu \in P(x,y) \setminus \{0\}$ und jedes $x' \in P'$ mit $Fx' = x$ existiert genau ein $\mu' \in P'(x', y')$ mit $F\mu' = \mu$; c) dual zu b). Eine Kette von P ist eine Folge von Morphismen $\neq 0$ $\nearrow\searrow\nearrow\searrow\nearrow\cdots$ derart, dass keines der auftretenden Dreiecke kommutativ ergänzbar ist. Es gelten die Sätze: Fischbacher: Hat P keine unendlichen Ketten, so ist die "universelle" Überlagerung $\tilde{P}$ intervallendlich (und insbesondere zykelfrei), und die Fundamentalgruppe von P ist frei (nicht kommutativ). Bongartz: Gegeben P, so ist $\bigoplus_{i,j} k(P)(x_i, x_j)$ genau dann darstellungsendlich, wenn P keine unendlichen Ketten hat und $\tilde{P}$ keine volle Unterkategorie der Bongartz-Happel-Vossieck-Liste enthält. Daraus folgt ein neuer Beweis eines schwierigen Satzes von Nazarova-Roiter (Brauer-Thrall II).

Literatur: Bautista-Gabriel-Roiter-Salmeron, representation-finite algebras and multiplicative bases (Inv. math., 1985). Bautista: A new proof of the Brauer-Thrall II conjecture (preprint, Mexico, 1983).

Spectra of Compact Quotients and High Frequency Asymptotics of Spherical Functions

Johan A.C. Kolk (RU Utrecht) 19-10-1984

Let X be a compact locally symmetric space with nonpositive curvature, i.e. $X = \Gamma\backslash G/K$, with G a noncompact connected semisimple Lie group $/\mathbb{R}$ with finite center, $K \subset G$ a maximal compact subgroup, and $\Gamma \subset G$ a discrete subgroup such that $\Gamma\backslash G$ is compact and Γ acts freely from the left on $S = G/K$.

Let $G = KAN$ be an Iwasawa decomposition of G. Then the notion of a spectrum Λ for X can be introduced in a natural fashion, and it turns out to be contained in $\mathfrak{a}_c^*$, the dual of the complexification of $\mathfrak{a}$, the Lie algebra of A.

In analogy with Euclidean Fourier Analysis one expects $\Lambda \cap i\mathfrak{a}^*$ to be the principal part of this spectrum, but the complementary part, $\Lambda \setminus i\mathfrak{a}^*$, turns out to be nonempty. Nevertheless the complementary part gives a lower order contribution to the asymptotics, while asymptotically the principal spectrum satisfies:

$$\sum_{\lambda \in \Lambda \cap \Omega_t} 1 = \frac{\mathrm{vol}(X)}{|\text{finite group}|} \cdot \int_{\Omega_t} \beta(\nu)\,d\nu + O(t^{n-1}), \quad t \to \infty.$$

Here β denotes the Plancherel measure for the symmetric space G/K, $n = \dim G/K$, while $(\Omega_t)_{t>0}$ is an expanding family of sets in $i\mathfrak{a}^*$.

In order to improve the error term, which is not sharp, one studies the eigenfunction expansions of the kernels of suitably chosen integral operators. This necessitates to study the elementary spherical functions of Harish-Chandra:

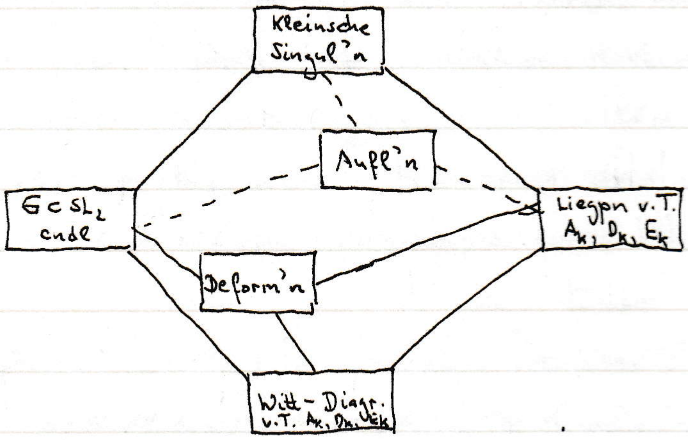
$$\varphi_\lambda(a) = \int_K e^{(\lambda-\rho)(H(ak))}\,dk \qquad (\lambda \in i\mathfrak{a}^*,\ a \in A),$$

when the frequency variable λ goes to infinity. These functions actually are decaying in λ, in a fashion which can be made completely explicit.

Deformationen Kleinscher Singularitäten und Invariantentheorie binärer Polyedergruppen

O. Riemenschneider (Hamburg) 26. 10. 1984

Es wurde berichtet über verschiedene Beziehungen zwischen den endlichen Untergruppen $G \subset SL(2, \mathbb{C})$ und den einfach zshgd., einfachen Liegruppen / $\mathbb{C}$ vom Typ A_k, D_k, E_k, die vermittelt werden durch die Kleinschen Singularitäten $X = X_G \cong \mathbb{C}^2/G$, an Hand des folgenden Diagramms



Besonders ausgeführt wurde eine Berechnung des Vektorraumes T^1 der infinitesimalen Deformationen von X_G (gemeinsame Arbeit mit K. Behnke, C. Kahn und H. Knörrer), die auch allgemeiner für endliche Untergruppen von $GL(2, \mathbb{C})$ gültig ist und zu einer einheitlichen Formel von $\dim T^1$ führt. Für die binären Polyedergruppen ergibt sich eine kanonische Isomorphie

$$(T^1)^* \cong S^G / \text{Ideal erzeugt von allen Jacobischen } J(P_j, P_k)$$

(wobei $S = \mathbb{C}[u, v]$ ist und die P_j ein Erzeugendensystem des Invariantenringes S^G bilden).

PHASENÜBERGÄNGE & JULIA-MENGEN

2. NOV. 1984

P. Richter, BREMEN

Als die Phasenübergänge noch nicht verstanden waren, suchten Yang, Lee u. andere den Schlüssel in der komplexen Temperaturebene: sollten nicht die Nullstellen der Zustandssumme (im thermodynamischen Limes $N \to \infty$) die Phasen gegeneinander abgrenzen?

Dann kamen Kadanoff, Wilson u. Fisher mit der „Renormierungsgruppe" und lösten das Problem der Berechnung kritischer Exponenten. Partielle Summation der Zustandssumme $Z_N(x)$ für N Teilchen bei der „Temperatur" $x = \exp(J/k_B T)$ führte auf Rekursionen der Art

$$Z_N(x) = h^{N/b}(x)\; Z_{N/b}(x')$$

wobei $h(x)$ eine „harmlose" Funktion und x' eine „renormierte" Temperatur.

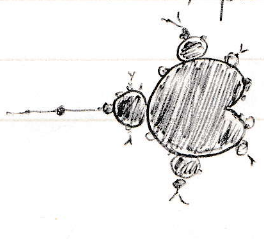
Beispiele: 1-D Ising-Modell, $b=2$: $\quad Z_N(x) = (2x)^{N/2}\, Z_{N/2}(x') \quad x' = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$

$b = 3$: $\quad \ldots\ldots \quad x' = \dfrac{x^3 + 3x}{3x^2 + 1}$

Hierarchisches Gitter, q-Zustand-Potts-Modell: $\quad x' = \left(\dfrac{x^2 + q - 1}{2x + q - 2}\right)^2$

Kritische Punkte im Sinne der Physik sind repulsive Fixpunkte solcher Abbildungen $x \to x'$. Die kritischen Exponenten ergeben sich aus der Linearisierung der Abb. in diesen Punkten.

Tieferen Einblick in die Natur der Grenzen zwischen den Einzugsgebieten der Phasen erhält man durch Betrachtung komplexer x. Im Falle des hierarchischen Modells findet man eine Fülle unterschiedlicher Grenzstrukturen – je nach Wahl von q. Und zwar zeigt die Rekursion für die Zustandssummen, daß diese Grenzen zugleich Yang-Lee-Nullstellenmengen und Julia-Mengen der Abb. $x \to x'$ sind. Das erlaubt mit Hilfe des Satzes von Fatou, wonach jedes Attraktionsgebiet mindestens einen kritischen Punkt ($\partial x'/\partial x = 0$) enthält, eine Analyse der Phasendiagramme mittels des Verhaltens der freien kritischen Punkte, in Abhängigkeit von q. Computerexperimente führen auf hochkomplexe q-Bilder, in denen – überraschend (?) – das Apfelmännchen, pardon, die Mandelbrotmenge auftaucht:



(aber auch andere ...)

Kompaktifizierung des Modulraums abelscher Varietäten

Gerd Faltings (Wuppertal) 9.11.84

Der Modulraum A_g der prinzipal polarisierten abelschen Varietäten der Dimension g kann mit Hilfe der Artinschen Methode leicht über $\mathbb{Z}$ konstruiert werden. Über $\mathbb{C}$ kann man ihn kompaktifizieren: Es gibt einmal die minimale Kompaktifizierung A_g^* (Satake, Baily-Borel), zum anderen die toroidale Kompaktifizierung $\bar{A}_g$ (Mumford, Rapoport et al.)
Thema des Vortrags war eine arithmetische Konstruktion von $\bar{A}_g$, welche sich über $\mathbb{Z}$ durchführen läßt. Wesentliches Hilfsmittel dabei ist eine Klassifikation degenerierender abelscher Varietäten durch definite symmetrische Bilinearformen. Die eine Richtung stammt von D. Mumford, während die Umkehrung die Koeffizienten der ϑ-Reihe benutzt.
Als Anwendungen erhält man:

a) Eine arithmetische Konstruktion der minimalen Kompaktifizierung A_g^*

b) Der Modulraum ist irreduzibel in jeder Charakteristik

c) Grundlagen einer arithmetischen Theorie der Siegel'schen Modulformen.

Gerd Faltings

A class of special Hardy – Orlicz spaces and BMOA.

Yuzan He

Institute of Mathematics Academia Sinica Beijing, China

November 16, 1984.

We considere a special class of Orlicz space Ba (or Hardy – Orlicz space H^{Ba}) which "Young function" is rised from an entire function with finite growth order ($\rho < +\infty$) and mean type ($\sigma < +\infty$). We discusse the boundness of the Hilbert transform and show some relations between a class of special H^{Ba} and BMOA which give some equivalent deffinition of BMOA. The definition and main result is the following

<u>Definition</u>. Let $E(z) = \sum_{m=2}^{\infty} a_m z^m$ be an entire function with finite order ρ and $\{p_m\}$ is a sequence with $1 \le p_m < +\infty$ and satisfy

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\ p_m / m^{\frac{1}{\rho}} < +\infty$$

if the following series $I(\alpha, f) = \sum a_m \|f\|_{H_{p_m}}^{m} \alpha^m$ has a positive radius of convergence, we say $f \in H^{Ba}$ and the norm of f in H^{Ba} is defined by

$$\|f\|_{H^{Ba}} = \operatorname*{Inf}_{I(\alpha,f)\le 1} \{1/\alpha\}$$

Then we have

<u>Theorem</u> $f \in$ BMOA if and only if $\mathfrak{M}(f)$ is a bounded set in H^{Ba}.

where $$\mathfrak{M}(f) = \left\{ g(z) = f\circ S(z) - f\circ S(0),\quad S(z) = e^{i\vartheta}\frac{z+a}{1+\bar{a}z},\quad e^{i\vartheta}\in \partial D,\ a \in D \right\}.$$

Spaces of holomorphic maps

Graeme Segal (Oxford) 23rd November 1984

Let X and Y be complex manifolds. We shall consider some cases when one can prove that the space $\mathrm{Hol}_\alpha(X;Y)$ of holomorphic maps $X \to Y$ in a given homotopy class α "resembles" (in homotopy type) the space $\mathrm{Map}_\alpha(X;Y)$ of all continuous maps in the same homotopy class.

The basic and easiest case is when $X = Y = S^2$. Then one has, for maps of degree $k > 0$

$$\pi_i\, \mathrm{Hol}_k(S^2;S^2) \xrightarrow{\cong} \pi_i\, \mathrm{Map}_k(S^2;S^2)$$

when $i<k$. The method of proof is to observe that a holomorphic map $S^2 \to S^2$ is essentially just a pair of disjoint positive divisors — corresponding to the zeros and poles of the map. The homotopy type of the space of pairs of divisors can be determined by a standard technique for passing from local to global which has been used in the past to describe, for example, the following spaces:

(i) immersions $X \to Y$, (ii) foliations of X,

(iii) complex structures on X, (iv) finite subsets of X.

The method extends to $\mathrm{Hol}(X;Y)$ when X is any compact Riemann surface and Y is a complex projective space, flag manifold, or Grassmannian. It does not seem useful when $\dim_{\mathbb{C}}(X) > 1$.

Recently J. Gravesen has considered $\mathrm{Hol}(X;\Omega G)$, where ΩG is the loop space of a compact Lie group G. The space ΩG is a complex manifold, as it can be redescribed as $LG_{\mathbb{C}}/L^+G_{\mathbb{C}}$, where $LG = \{\text{smooth maps } S^1 \to G_{\mathbb{C}}\}$, and $L^+G_{\mathbb{C}} = \{\gamma \in LG_{\mathbb{C}} : \gamma \text{ extends to a holomorphic map in } |z|<1\}$. The method used for finite dimensional Y needs to be modified, but can be made to work essentially because it is still true that there is a complex nilpotent group which acts on Y with an open dense orbit whose complement is a hypersurface: maps $S^2 \to Y$ can be described in terms of their intersection with the hypersurface. (Gravesen's results are still not complete, in that a stability theorem is lacking.)

The space $\mathrm{Hol}(S^2;\Omega G)$ is of interest for a number of reasons. First, Atiyah and Donaldson have shown that it coincides with the space of Yang-Mills instantons for G on $\mathbb{R}^4$. It is also very closely related to

(a) the space of holomorphic vector bundles of dimension n on $P^2_{\mathbb{C}}$ (when $G = U_n$)

and (b) $\mathrm{Hol}(\mathbb{C}P^2; Gr(n,N))$, where $Gr(n,N)$ is the Grassmannian of n-dimensional subspaces of $\mathbb{C}^N$.

The geometry of hyperbolic 3-manifolds and Ahlfors conjecture.

Francis BONAHON (Orsay) November 30, 1984

Let Γ be a subgroup of $\mathbb{P}SL_2(\mathbb{C})$, standardly acting on $S^2 = \mathbb{C}\mathbb{P}^1$. An easy argument shows that there is a maximal invariant open set $\Omega_\Gamma \subset S^2$ on which Γ acts properly discontinuously. In the talk, we discussed a proof of the following result:

Th. If Γ is finitely generated, torsion free and is not a free product (as an abstract group), it satisfies the Ahlfors conjecture, namely either $D_\Gamma = \phi$ or $S^2 - D_\Gamma$ has measure 0.

The proof goes through hyperbolic geometry. Indeed, S^2 can be considered as the sphere at infinity of the hyperbolic 3-space $\mathbb{H}^3$, on which $\mathbb{P}SL_2(\mathbb{C})$ acts isometrically. If $D_\Gamma \neq \phi$, then Γ acts properly discontinuously and freely on $\mathbb{H}^3$, so that we can consider the hyperbolic 3-manifold $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$.

Then, we rely heavily on previous work of W. Thurston. When Γ is not a free product, he singled out a special class of such hyperbolic 3-manifolds M which he called geometrically tame hyperbolic 3-manifolds. For short, let us say that this reflects a very specific geometric behaviour of the ends of the manifold, in the sense of Freudenthal. Thurston proved the Ahlfors conjecture for these geometrically tame 3-manifolds, and conjectured that every hyperbolic 3-manifold ~~with~~ whose fundamental group is finitely generated and is not a free product is geometrically tame. We have proved this conjecture of Thurston, whence the theorem above mentioned immediately follows.

Degenerations of hyperbolic structures

Peter B. Shalen (Rice-Orsay), 7 December 1984

This is joint work with John Morgan. If Γ is a finitely generated group, the representations of Γ in $SL_2(\mathbb{C})$ form a complex affine algebraic variety $R(\Gamma)$. The algebraic quotient of $R(\Gamma)$ by the conjugation action of $SL_2(\mathbb{C})$ is a variety $X(\Gamma)$. There is a natural compactification of $X(\Gamma)$ by points corresponding to actions of Γ on "generalized trees" or $\mathbb{R}$-trees. An $\mathbb{R}$-tree is by definition a metric space in which any two point are joined by a unique topological arc and every arc is isometric to an interval. The trees used in compactifying $X(\Gamma)$ are Bruhat-Tits buildings for SL_2 defined by valuations that in general are not discrete or even of rank 1.

The ideal points of the compactification that are limits of points of $X(\Gamma)$ defined by discrete faithful representations are given by actions of Γ on $\mathbb{R}$-trees for which the stabilizer of every non-degenerate arc is abelian-by-finite. If $\Gamma = \pi_1(M)$, M a manifold, actions of Γ on an $\mathbb{R}$-tree T can be studied by constructing equivariant maps of the universal cover $\tilde{M}$ to T that induce topological measured laminations in M. These ideas can be used to prove two fundamental results of Thurston's: the compactness of the space of hyperbolic structures on the interior of a compact 3-manifold with no essential discs or annuli, and the result that Teichmüller space is compactified by measured (projective) geodesic laminations.

On the effective computation of characters

Donald Livingstone, Birmingham 14th December, 1984.

Consideration is given to the problem of the specification, in terms of unknown irreducibles, of the compound characters of a finite group G which are generated by multiplication and the formation of powers from a set of given irreducibles. Procedures are outlined for a computer-assisted analysis of the relations between characters in the set.

Supplementation of the set by the adjunction of a complementary set of "dual-type" characters obtained from modular or other considerations may provide a basis for the space of class functions. If the specification in terms of the unknown irreducibles can be consistently extended to embrace the complementary set then the determination of the character table of G reduces to the problem of inverting an integral matrix.

In practice the list of known irreducibles will increase as the investigation proceeds. It may also be extended if methods are available for the splitting of reducibles. This has the effect of decreasing the size of the matrix to be inverted.

The procedure is illustrated by reference to the character table of the Monster & the characters generated from a single known irreducible χ of degree 196,883. For this the determination of the character table was reduced to the inversion of a 4×4 matrix.

Der Satz von Torelli für Matroide und Mumfordkurven

Lothar Gerritzen (Bochum) 21.12.84

R. Torelli hat im Jahre 1913 gezeigt, daß kompakte Riemannsche Flächen mit gleicher Periodenmatrix bianalytisch äquivalent sind. Manin-Drinfeld haben 1973 die Perioden zu Mumfordkurven bestimmt. Zu einer Mumfordkurve gehört stets ein kanonischer Graph, während zur Jacobischen Mannigfaltigkeit einer Mumfordkurve in kanonischer Weise das Kreismatroid des Graphen gehört. Es stellte sich die Frage, ob man für Matroide ebenfalls ein Analogon zum klassischen Satz von Torelli erhält.
Es ist dies stets der Fall, wenn das Matroid kondentrennend ist. Beim Beweis dieses Satzes ist das System der einfachen Ketten von großer Bedeutung. Kurz gesagt sind zwei Matroide bereits dann isomorph, wenn ihre Systeme von einfachen Ketten isomorph sind.
Es stellt sich dann das Schottkyproblem für Matroide: notwendige und hinreichende Bedingungen dafür anzugeben, daß eine auf $\mathbb{Z}^n$ definierte positiv definite quadratische Form die Periodenform eines metrischen Matroids ist. Dieses Problem ist ungelöst.