Jan. 18, 1985

Approximation by polynomials on simplices

by Z. Ciesielski (Sopot, Poland)

In the space Π_j of real algebraic polynomials on R^k of total degree j different bases are discussed. On is the "Bernstein" basis $N_{\alpha,j}(x) = (j!/(\alpha_0!\,\alpha!))\,x_0^{\alpha_0}x^{\alpha}$, $x_0 = 1-(x_1+\dots+x_k)$, $\alpha_0 = j-|\alpha|$, $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_k)$, $|\alpha|\le j$. The other bases are biorthogonal polynomials $\{P_\alpha, P_\alpha^*, |\alpha|\le j\}$ such that $P_\alpha, P_\alpha^* \in \Pi_{|\alpha|}$, $(P_\alpha, P_\beta^*)_\Delta = \delta_{\alpha,\beta}$ where $(\cdot,\cdot)_\Delta$ is the scalar product w.r.t. the Lebegue measure over the standart simplex $\Delta = \mathrm{conv}(0,e_1,\dots,e_k)$. One biorthogonal system of such polynomial is explicitely constructed. In one-dimensional case $\{P_\alpha, P_\alpha^*\}$ is simply the orthonormal set of Legendre polynomials. Denoting by $M_{\alpha,j}$ the $N_{\alpha,j}$ normalized in $L^1(\Delta)$ the following polynomial operators are treated

$$Q_j f = \sum_{|\alpha|\le j} (f, M_{\alpha,j})_\Delta N_{\alpha,j}$$

Explicite formulas for the eigenvalues $m_{\alpha,j} = m_{|\alpha|,j}$ of the symmetric Gram Matrix $(N_{\alpha,j}, M_{\beta,j})_\Delta$, $|\alpha|, |\beta| \le j$, are found and it is shown that

$$Q_j f = \sum_{|\alpha|\le j} m_{|\alpha|,j}\,(f, P_\alpha^*)_\Delta\, P_\alpha$$

For the Sobolev space $W_p^m(\Delta)$ we have $\|f - Q_j f\|_{W_p^m(\Delta)}$ as $j\to\infty$ and $f\in W_p^m(\Delta)$. Moreover, if for some α, $|\alpha|\le m$, $D^\alpha f\ge 0$, then $D^\alpha Q_j f \ge 0$ on Δ for $j>|\alpha|$. An algorithm for interpolating polynomials on normal sets of the lattice of multiindices is given. Extension to $L^p(\Delta)$, $1\le p\le\infty$, of Parseval's identity is given. Multivariate ~~int~~ spline interpolation was helpful.

Scharf 3-fach transitive Gruppen und Fastkörper

25. Jan. 1985 Heinrich Wefelscheid (Duisburg)

Wie bekannt, operieren die Gruppen $PGL(2,K)$ scharf 3-fach transitiv auf dem projektiv abgeschlossenen Körper $\bar{K} := K \cup \{\infty\}$ (resp. $\bar{K} := P_1(K) = \{K^*\binom{a}{b} \mid a,b \in K,\ (a,b) \neq (0,0)\}$.) Es gibt jedoch noch sehr mehr scharf 3-fach transitive Gruppen. Definiert man als einen KT-Fastkörper $(F,+,\cdot,\sigma)$ einen Fastkörper mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß es ein $\sigma \in Aut(F^*,\cdot)$ gibt mit $\sigma^2 = id$, $\sigma \neq id$, das die Funktionalgleichung $\sigma(1+\sigma(x)) = 1-\sigma(1+x)$ für $\forall x \in F^* \setminus \{-1\}$ erfüllt, so kann man zeigen, daß die Abbildungen

$$\alpha: \begin{cases} \bar{F} \longrightarrow \bar{F} = F \cup \{\infty\} \\ x \longrightarrow a + m \cdot x \\ \infty \longrightarrow \infty \end{cases} \qquad \beta: \begin{cases} \bar{F} \longrightarrow \bar{F} \\ x \longrightarrow a + \sigma(b + mx) \\ \infty \longrightarrow a \\ -m^{-1}b \longrightarrow \infty \end{cases}$$

scharf 3-fach transitiv auf $\bar{F}$ operieren.

Wie findet man solche KT-Fastkörper?

Die bisher allgemeinste Konstruktionsmethode stammt von W. Kerby. Es sei $(K,+,\cdot)$ ein kommutativer Körper und $A \leq (K^*,\cdot)$ eine Untergruppe mit den Eigenschaften:

(i) $Q := \{a \cdot a \in K \mid a \in K^*\} \subseteq A$

(ii) Es gibt einen Monomorphismus $\pi: K^*/A \to Aut(K,+,\cdot)$

(iii) $\tau(x) \in x \cdot A$ für $\forall x \in K^*$ und $\forall \tau \in \pi(K^*/A)$.

Definiert man $a \circ b := a \cdot \pi(aA)(b)$ und $\sigma(x) = x^{-1}$, dann ist $(F,+,\circ,\sigma)$ ein KT-Fastkörper.

Man kann zu jeder Kardinalzahl n Beispiele mit $[K^*:A] = 2^n$ konstruieren. Die mit diesen KT-Fastkörpern konstruierten ~~Beispiele~~ Gruppen G haben alle die Eigenschaft, daß die Standuntergruppe G_a eines Punktes a eine Frobeniusgruppe ist, in der auch der Satz von Frobenius gilt. Ob dieser Sachverhalt für alle scharf 3-fach transitiven Gruppen G gilt, ist m.W. noch nicht bekannt. Ebenfalls noch offen ist die Frage, ob das oben angegebene Konstruktionsverfahren für jede scharf 3-fach transitive Gruppe gilt. Hier gibt es Teillösungen u.a. von Zassenhaus, Tits, Kegel, Kerby und mir.

Homotopietheorie für Moduln mit Anwendungen auf Galoisdarstellungen

1. Februar 1985 Uwe Jannsen (Regensburg)

Sei Λ ein noetherscher Ring mit Eins, nicht unbedingt kommutativ. Eine Abbildung $f : M \longrightarrow N$ von Λ-Moduln heißt <u>homotop zu null</u>, wenn sie über einen projektiven Modul P faktorisiert: $M \longrightarrow P \longrightarrow N$, $f \sim g$, wenn $f-g$ homotop zu null.
Man erhält die Kategorie Mod_Λ^h (Objekte = Λ-Moduln, $Mod^h(M,N) = Mod_\Lambda(M,N)/\{f \sim 0\}$) der "Moduln bis auf Homotopie", dabei gilt $M \simeq N$ genau dann, wenn $M \oplus P \cong N \oplus Q$ für projektive Moduln P, Q ist.
In dieser gibt es den <u>Schleifenraumfunktor Ω</u>, (wohl-)definiert durch eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \Omega M \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

P projektiv. Diese Begriffe wurden bereits 1956 von Eckmann und Hilton eingeführt, die jedoch auf das Fehlen eines dazu adjungierten <u>Einhängungsfunktors S</u> hinweisen. Dieser kann jedoch konstruiert werden, und zwar durch eine exakte Sequenz

$$M \xrightarrow{j} Q \longrightarrow SM \longrightarrow 0,$$

wobei der projektive Modul Q und j "geschickt" gewählt werden (P projektiv, $P \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} M^+ := Hom_\Lambda(M,\Lambda)$ surjektiv, $j : M \xrightarrow{kan.} M^{++} \xrightarrow{\pi^+} P^+ =: Q$). Es ist dann

$$Hom^h(SM,N) \cong Hom^h(M,\Omega N).$$

Weiter gibt es eine <u>Dualität D</u> mit $D^2M \simeq M$ und $D\Omega = SD$, sowie viele Analoga zur topologischen Homotopietheorie, exakte Homotopiesequenzen, Faserungen etc.
Es ergeben sich Anwendungen dieser Theorie auf

1.) die Galoismodulstruktur von Einheiten globaler Zahlkörper
2.) die Struktur von Galoisgruppen lokaler und globaler Körper
3.) Iwasawa-Theorie.

Automorphic functions and ordinary differential equations.

1. Febr. 1985

Alexei Venkov

(Leningrad USSR)

We consider the general problem to find dependence of standard automorphic function on the deformations of ~~grade~~ descrete groups. We consider also the diff. equations which are generalized the Schlesinger equations:

$$(1) \quad dA_\mu = -\sum_{\nu \neq \mu} [A_\mu, A_\nu]\, d\log \frac{a_\mu - a_\nu}{x_0 - a_\nu}$$

in the situation of the nontrivial deformation of the Fuchsian groups of the first kind. For example, quasiisomonodromical deformations of Klein-Hilbert equation

$$\frac{d}{dx}\left[x(x-a)(x-1)y'(x)\right] + (x+\lambda)y(x) = 0$$

and

$$(2) \quad \frac{d}{dx}\left[x(x-a_1)\dots(x-a_n)y'(x)\right] + P(x,\lambda_1,\dots,\lambda_n)y(x) =$$

and some ~~of~~ formulas for accessory parameters $\lambda_1, \dots \lambda_n$.

We consider also the connection the equations (1), (2) with the Schwarz equation

$$\{z, J\} = Q_M(J)$$

$$\{z, J\} = \frac{z'''}{z'} - \frac{3}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2$$

$z: P \longrightarrow M$ $\quad$ M is a polygone and P – half-plane,

Semialgebraische Topologie

Manfred Knebusch (Regensburg) 8.2.85

Die Menge $V(R)$ der reellen Punkte einer algebraischen Varietät V über einem reell abgeschlossenen Körper ist in der (von der Anordnung von R herrührenden) starken Topologie ein total unzusammenhängender Raum außer in dem einzigen Falle $R \cong \mathbb{R}$. Um auf $V(R)$, und allgemeiner auf einer semialgebraischen Teilmenge M von $V(R)$, trotzdem "topologische" Phänomene zu untersuchen, muß man M mit einer Grothendieck-Topologie versehen, deren offene Mengen die stark-offenen semialgebraischen Teilmengen von M, und deren zulässigen Überdeckungen die endlichen Überdeckungen durch solche Mengen sind. In dieser Topologie bilden die semialgebraischen Funktionen, d.h. die stark stetigen Funktionen mit semialg. Graphen, eine Garbe $\mathcal{O}_M$. Aus diesen lokal geringten Räumen $(M, \mathcal{O}_M)$ erhält man durch Verkleben endlich vieler Exemplare die "semialgebraischen Räume". Die Kategorie der semialg. Räume ist bestens geeignet, um ein voll befriedigendes Analogon für viele Teile der klassischen Algebraischen Topologie zu gewinnen. Insbesondere hat man Homologie- und Homotopie-gruppen und (orthogonale, unitäre, symplektische) K-Gruppen. Im Falle $R = \mathbb{R}$ stimmen diese mit den klassischen Homologie- etc-gruppen überein. Allgemein gilt für sie eine Art "Tarski-Prinzip": Ist $\tilde{R}$ ein reell abgeschlossener Oberkörper von R, so liefert jeder semialg. Raum M über R einen semialg. Raum $M(\tilde{R})$ über $\tilde{R}$, und beide Räume haben dieselben Homologie- etc-gruppen.

Die Kategorie der semialg. Räume ist für viele Konstruktionen zu klein. Um etwa die universelle Überlagerung $\tilde{M}$ eines semialg. Raumes M zu konstruieren, muß man allgemeiner die Kategorie der (regulären parakompakten) lokal semialgebr. Räume einführen. Über diese Räume wird in Regensburg zur Zeit, insbesondere von Hans Delfs (dessen Verdienst auch ist, die semialg. Theorie weitgehend entwickelt habe), intensiv gearbeitet.

Manfred Knebusch

8. Feb 1985 Neue Algebraische Modelle für Homotopie typen

The University of Chicago Saunders Mac Lane

The problem at issue is that of finding algebraic objects which describe the homotopy-type of a topological space (Two spaces X and Y have the same homotopy type if there are continuous maps $f: X \to Y$ and $g: Y \to X$ with fg and gf homotopic to the identity.

Das alles hängt mit Homotopie gruppen zusammen. Für ein asphärische Raum X (i.e., mit all $\pi_i(X)=0$ für $i>1$) gibt die Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ die Homotopie-typ.

Im allgemein, könnte man Homotopie-typ mittels Postnikov-system beschreiben, was aber etwas zu kompliziert ist.

In 1950 haben Whitehead and MacLane Homotopie-typen von Räumen untersucht, die nur zwei Homotopie Gruppen ($\neq 0$), π_1 & π_2 haben. In diesem Fall ist der Typ gegeben durch ein Verschränkte Modul bestimmt: Ein morphism $k: M \to N$ von Gruppen wobei N auf M wirkt ($m \longmapsto {}^n m$) in der Weise dass

$$k({}^n m) = n(km)n^{-1} \quad \text{und} \quad {}^{(km)}m' = m m' m^{-1}$$

gelten. Für ein CW-complex X bekommt man ein solches Modul as

$$\pi_2(X, X^1) \longrightarrow \pi_1(X^1)$$

wobei X^1 die 1-Schale von X ist

Ein solches verschränktes Modell lässt sich jetzt mehr begrifflich beschreiben als ein Gruppenobjekt $G = M \rtimes N$ in der Kategorie der Kategorien beschreiben. Dabei ist N die Objekt-Gruppe, während die Morphismen Gruppe das "semi-direkte" produkt $G = M \rtimes N$ ist, wobei jedes paar (m, n) als Pfeile der Categorie $n \longrightarrow k(m)n$ ist.

Neuerdings hat J.-L. Loday (J. Pure Appl. Alg. 24 (1982) 45–58) dieses Resultat weitgehend generalisiert. Er betrachtet Räume X mit nur $n+1$ nicht-trivial Homotopie Gruppen $\pi_1, \dots, \pi_{n+1}$. Der Typ eines solchen Raum wird als eine Gruppe in n-Cat beschrieben. Hier ist n-Cat die Kategorie der n-fachen Kategorien C: C ist eine Menge von "Pfeilen" die in n-verschiedenen Weise eine Kategorie bilden, wobei je zwei dieser Kategorien Strukturen mit einander kommutativ sind. Zum Beispiel ist eine zwei-fache Kategorie eine Cat von Quadraten

$$\square \circ \square$$

die sowohl vertikal wie horizontal zu komponieren sind.

Auch Joyal und Tierney haben solche homotopie-typen mittels Ideen von Eilenberg-Mac Lane analysiert. Sie betrachten Räume X mit nur die zwei Homotopie Gruppen π_2 und π_3. Der Typ eines solchen Raums wird durch ein Symmetrische Monoidale Kategorie gegeben, mit einer Involution $A \mapsto A^*$ mit natürlichen isomorphismen $A \otimes A^* \cong I \cong A^* \otimes A$.

A. Grothendieck, in einem lang (550 Seiten) Manuskripte, hat sehr allgemein ~~untersucht~~ untersucht, welche Kategorien für Homotopie Typen dienen können, wenn man eine Kategorie von [illegible] (Category of Fractions) nennt. Er hat einige allgemeinere Bedingungen gefunden — Beispiele von solchen Kategorien sind die Simpliziale Mengen, die Kubische Mengen usw.

Weitere solche Beschreibungen sind zu erwarten.

Saunders Mac Lane

(8. 3. 85)

March 15, 1985

"Mennicke symbols" L. VASERSTEIN

For any ring A, the group $K_1 A$ is filtered by the Whitehead determinants of invertible matrices of different sizes. We want to compute the corresponding graded group (especialy the highest degree non-zero term) in terms of symbols which generalize Mennicke's symbols. In particular, we generalize the Bass-Milnor-Serre result which presents $SK_1 A$ for Dedekind ring A via the Mennicke symbol, to an arbitrary commutative ring A satisfying the Bass second stable range condition. As an application, SK_1 is computed for some rings of continuous functions.

Das reele Spektrum eines Ringes und semialgebraische Geometrie.

Alex Rosenberg den 12.4.85

Sei R ein Ring. Das reele Spektrum, r-Spec R, ist die Menge aller Paare $(\wp, \overline{P})$ wo $\wp \in$ Spec R, ein Primideal ist und $\overline{P}$ eine Anordnung des Quotientenkörpers von $R/\wp$. Man führt eine Topologie auf r-Spec R ein, indem man die Mengen $D(r) = \{(\wp, \overline{P}) \mid r \notin \wp,\ r+\wp \in \overline{P}\}$ als Subbasis für die Topologie nimmt. Mit dieser Topologie ist r-Spec R quasikompakt und der Unterraum max r-Spec R der "maximalen" Paare ist sogar kompakt Hausdorff. Dabei ist „maximal" ~~als~~ im Sinne des „Urbildes in" R von P zu verstehen. Dieser Begriff wurde von Marie Coste-Roy u. Michel Coste ca. 1979 eingeführt. Sei jetzt V eine ganze irreduzibele ~~Var~~ affine Varietät über einen reell-abgeschlossenen Körper R und $A(V)$ der Koordinatenring. Dann gibt es eine Injektion $V(R) \to \max\operatorname{spec} A$ der Menge der „reellen" Punkte von V, die stetig ist und derart, daß das Bild von $V(R)$ dicht in $\max\operatorname{spec} A$ ist. Man kann also die „euklidische" Topologie von $V(R)$ durch das rein algebraische Objekt r-spec A erfassen. r-spec A erweist sich als wichtiges Hilfsmittel um die geometrischen Eigenschaften von $V(R)$ zu ergründen.

Disproof of the Mertens Conjecture

Andrew Odlyzko, April 19, 1985

The Mertens conjecture states that $|M(x)| < \sqrt{x}$ for all $x > 1$, where

$$M(x) = \sum_{n \le x} \mu(n),$$

and $\mu(n)$ is the Möbius function. This conjecture had attracted a substantial amount of interest in its almost 100 years of existence because its truth was known to imply the truth of the Riemann hypothesis. However, Herman te Riele and the speaker have disproved the Mertens conjecture by showing that

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{M(x)}{\sqrt{x}} > 1.06.$$

The disproof relies on extensive computations with the zeros of the zeta function, and was made possible by the use of a new algorithm for computing simultaneous diophantine approximations.

Optimierungsmodelle für den Wettkampfsport
Horst Behncke, Univ. Osnabrück 26.4.85

Es wird die Leistungsfähigkeiten von Sportlern in den Disziplinen Laufen, Schwimmen, Eisschnellauf, Rudern und Radrennsport durch ein Modell beschrieben, dessen Hauptparameter die Kraft und Energie sind. Das Problem eine vorgegebene Strecke in möglichst kurzer Zeit zurückzulegen, führt auf ein optimales Kontrollproblem mit Zustandsabhängigen Beschränkungen. Dieses Problem kann vollständig, allerdings nicht geschlossen, gelöst werden. Mit Hilfe geeigneter Parameter können so die Weltrekorde für das Laufen und Schwimmen sehr gut beschrieben werden. Die gewonnenen Parameter stimmen gut mit denen der Physiologen überein.

Die K_{-i}-Gruppen und der beschränkten h-Kobordismus Satz, Erik Kjær Pedersen
Odense Universität (zur Zt. Univ. Göttingen) 3-5-85

Die K_{-i}-Gruppen von einem Ring R wurden als derivierter ~~Funktor~~ von Bass definiert. Man kann sie auch als ~~Durchschnitt~~, bezüglich andere K-gruppen definieren. Wir geben eine direkte Definition der K_{-i}-Gruppen einer beliebigen additiven Kategorie $\mathfrak{A}$: Sei $\mathcal{C}_i(\mathfrak{A})$ die Kategorie von $\mathbb{Z}^i$-graduierte $\mathfrak{A}$-objekte und beschränkte Abbildungen. Das heisst ein Objekt A ist eine Menge von $\mathfrak{A}$-Objekten $A[I]$ von $I \in \mathbb{Z}^i$ parameterisiert, und ein Morphismus $\varphi : A \to B$ ist ~~eine~~ Menge von $\mathfrak{A}$-Morphismen $\varphi_J^I : A[I] \to B[J]$ so daß es eksistiert $k = k(\varphi)$ so daß $\varphi_J^I = 0$ wenn $\| I - J \| > k$ ist. Komposition von φ und ψ ist definiert als

$$\varphi \circ \psi (I, J) = \sum_K \varphi(K, J) \cdot \psi(I, K).$$

Diese Summe ist endlich wegen der oberen Bedingung.

<u>Satz</u> Sei $\mathfrak{A}$ die Kategorie von endlich-erzeugte freie R-Moduln. Dann ist

$$K_1(\mathcal{C}_{i+1}(\mathfrak{A})) = K_{-i}(R).$$

Als Anwendung kriegt man daß die K_{-i}-Gruppen Hindernis-Gruppen sind für den $\mathbb{R}^{i+1}$-parametrisiert beschränkte h-Kobordismus Satz, das heißt: Gegeben ein h-Kobordismus $(W, \partial_0 W, \partial_1 W)$ und eine eigentliche Abbildung $f : W \to \mathbb{R}^{i+1}$ so daß die Inklusionen $\partial_i(W) \to W$ beschränkte Homotopie Äquivalensen sind (wenn in $\mathbb{R}^{i+1}$ gemessen), dann hat W ein beschränkten Produkt Struktur, wenn ein Hindernis in $K_{-i}(\mathbb{Z}\pi, W)$ verschwindet. Vorausgesetzt wird daß die Fundamental Gruppe überall beschränkt darstellbar ist. Durch ein bischen extra Arbeit kriegt man eine Ausgabe von Chapman's dünne h-Kobordismus Satz.

Erik Kjær Pedersen

Orthogonal representations of Galoisgroups

A. Fröhlich, 6 May 1985

One considers representations $t: \Gamma \to O(b_t)$, Γ a Galoisgroup over a field K of characteristic $\neq 2$, $O(b_t)$ the orthogonal group of a quadratic form b_t over K. One associates with this a new quadratic form B_t, the Galois twist of b_t, but given by an explicit formula. The trace form of a finite separable extension M/K is such a B_t. One then derives relations between invariants of B_t, and invariants of t — in particular an equation in $Br_2(K)$ between the Hasse-Witt invariants of b_t and of B_t, the Stiefel Whitney class of X_t — defined purely algebraically — and a new Brauer class coming from the spinor norm. This generalises Serre's formula for the Hasse-Witt of the trace form, and also leads to general and explicit embedding criteria for fields.

Numerical invariants of arithmetic varieties of $\mathbb{Q}$-rank 1

May 10, 1985

I tried to show how the cusp contributions in χ-genus $\chi_y(X)$ of the smooth ~~com~~ compactification of the arithmetic quotient $\Gamma\backslash\mathcal{D}$ can be computed in certain cases by using R-R-H theorem and the theory of toric bundles.

I. Satake (佐武一郎)

Functional Equations of Complex Powers

May 17, 1985

The Riemann ζ-function, or Hecke's ζ-function, is holomorphic in $\mathrm{Re}(s)>1$ and it has the following three properties:

1) meromorphic continuation to the whole s-plane,
2) functional equation, 3) Euler product.

The talk was concerned with their generalizations.

More precisely if K is a completion of a number field, ψ a nontrivial character of K, ω a quasicharacter of $K^\times$, in particular $\omega_s(t) = |t|_K^s$ and $|\omega(t)| = \omega_{\sigma(\omega)}(t)$, $X = \mathrm{Aff}^n$, $[x,y] = {}^t x y$ and dx the selfdual measure on $X_K = K^n$ relative to $\psi([x,y])$, then for any $f(x)$ in $K[x_1, \ldots, x_n]$ of degree $m \geq 1$ a tempered distribution $(\omega\omega_{-\kappa})(f)$ in X_K is defined first for $\sigma(\omega) > \kappa$ as

$$(\omega\omega_{-\kappa})(f)(\Phi) = \int_{X_K} (\omega\omega_{-\kappa})(f(x))\Phi(x)\,dx, \quad \kappa = n/m$$

and then by meromorphic continuation to the whole $\Omega(K^\times) = \{\omega\}$. If there exists a connected reductive K-subgroup G of $GL(X)$ such that G_K is transitive on Y_K, where $Y = X - f^{-1}(0)$, then a functional equation of the form

$$(\omega\omega_{-\kappa})(f)^* = \gamma(f,\omega,\psi)\,\omega(f)^{-1}$$

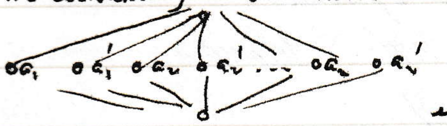
holds with some meromorphic function $\gamma(f,\omega,\psi)$ on $\Omega(K^\times)$. The major part of the talk was an <u>explicit determination</u> of $\gamma(f,\omega,\psi)$. As its application generalizations of 1), 2), 3) above for a global zeta function was mentioned.

Jun-ichi Igusa in Baltimore
(井草準一)

Orthomodulare Verbände

G. Bruns, Hamilton, Ont, z. Z. München

Orthomodulare Verbände stammen aus der Theorie der Operator-Algebren. Das einfachste Beispiel ist der Verband der abgeschlossenen Unterräume eines Hilbert Raumes. Offenes Problem: Läßt sich jeder orthomodulare Verband in einen vollständigen orthomodularen Verband einbetten?



Nach einem Satz von R. Baer über Polaritäten in endlichen projektiven Ebenen sind die einzigen endlichen, subdirekt irreduziblen modularen Orthoverbände die Verbände MO_n $(n \geq 2)$, siehe Bild, sowie $\mathbf{2}$. Michael Roddy hat bewiesen

<u>Satz</u>. Jede Varietät (gleichungsdefinierte Klasse) von modularen Orthoverbänden die von allen $[MO_n]$, $[\mathbf{2}]$ und der trivialen Varietät verschieden ist ($[S]$ Varietät von S erzeugt) enthält MO_ω.

Der Beweis benutzt den Frinkschen Einbettungssatz komplementärer modularer Verbände in projektive Geometrien sowie den B. Jónssonschen Koordinatisierungssatz für komplementäre, modulare Verbände durch reguläre Ringe. (24.5.85)

Singularities of finite Cohen-Macaulay type.

Idun Reiten, Trondheim

Let R be a complete integrally closed Cohen-Macaulay local domain with maximal ideal m such that $\mathbb{C} \simeq R/m \subset R$, with Krulldim $R \geq 2$. We consider the question when R is of finite Cohen-Macaulay type, that is, has only a finite number of indecomposable Cohen-Macaulay modules. If $\dim R = 2$, this is known to be the case exactly when $R = \mathbb{C}[[X,Y]]^G$, where $G \subset GL(2,\mathbb{C})$ is a finite group. If $\dim R \geq 2$, a complete description is known for the hypersurfaces. Here the answer is in terms of simple hypersurface singularities (Knörrer; Buchweitz, Greuel, Schreyer). In joint work with Auslander we have proved when we have finite Cohen-Macaulay type for quotient singularities and for scrolls. The only ones are $\mathbb{C}[[X,Y,Z]]^{Z_2}$, where if $Z_2 = \langle \sigma \rangle$, σ sends X to $-X$, Y to $-Y$, Z to $-Z$, and the scroll whose relations is given by the matrix $\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & y_0 \\ x_1 & x_2 & y_1 \end{pmatrix}$. We illustrate how almost split sequences can be used to prove that these two rings are of finite Cohen-Macaulay type.

(31.5.85)

Holomorphe Blätterungen.

Hans-Jörg Reiffen, Osnabrück, 7.6.85

Sei X ein reduzierter komplexer Raum. Eine Blätterung auf X ist ein Paar $(A, \mathcal{L})$, wobei A eine nirgendsdichte analytische Menge in X mit $A \supset X_s$ (Singularitätenmenge) und $\mathcal{L}$ eine klassische holomorphe Blätterung auf $X \setminus A$ ist. Sei β eine Blätterung. β heißt kohärent, wenn die zugehörige Garbe Ω_β kohärent ist ($\Longleftrightarrow$ der zugehörige Kegel K_β analytisch ist). β ist kohärent, wenn $S(\beta)$ (Singularitätenmenge) 2-kodimensional ist. Die Umkehrung gilt für normale Räume. Über den Integralbegriff wird eine Beziehung zu der Blätterungstheorie von Holmann hergestellt. Mit Hilfe von Sätzen von Malgrange und der Charakterisierung der lokal-einfachen holomorphen Abbildungen durch Reduziertheit erhält man ein Kriterium für Holmann-Blätterungen. Folgendes ~~Koll~~ Korollar wird angegeben: Ist X eine glatte Mannigfaltigkeit und β eine 1-codimensionale Blätterung mit $\operatorname{codim} S(\beta) \geq 3$, so definiert β eine Holmann-Blätterung.

Reiffen

Poissonsche Summationsformeln und der Satz von Bochner - Hecke

Bernd Dreseler, Siegen, 14.6.85

Die klassische Poissonsche Summationsformel im $\mathbb{R}^n$ ist von grundlegender Bedeutung für die Theorie der Fourier-Reihen und die Theorie der Fourier-Transformation. Stichworte, die einige der klassischen Anwendungen andeuten sind: Funktionalgleichung der Zeta-Funktion, Euler-MacLaurinsche Summationsformeln, das Weylsche Problem der Asymptotik der Eigenwerte des Laplace-Operators und der Satz von Minkowski. S. Bochner bezeichnet sie als Dualitätsformel von fundamentaler Bedeutung in der Analysis. Der Satz von Bochner und Hecke besagt, daß die Fourier-Transformation $\hat{f}$ einer Funktion des Typs $f = gH$, g radial und H homogenes harmonisches Polynom vom Grad k, Produkt einer Hankel-Transformation mit H ist. Ist H zusätzlich unter einer Coxeter-Gruppe W in $O(\mathbb{R}^n)$ schiefsymmetrisch, so erhält man mit der Poissonschen Summationsformel eine Poissonsche Summationsformel für die schiefsymmetrischen Funktionen $A(\lambda) = \sum_{w \in W} \operatorname{sign} w \, e^{2\pi i (w}$ $\lambda \in \mathbb{Z}^n = \Lambda$. Für die Fourier-Reihen zentraler Funktionen auf der Gruppe $SU(2)$ erhält man eine Poissonsche Summationsformel, wenn man die Eulersche Formeln für $\sin nx$ benutzt. Auf beliebigen kompakten halbeinfachen Lie-Gruppen G gelingt dies mit Hilfe der Weylschen Charakterformeln. Als Anwendungen ergeben sich unter anderem: Eine Jacobi-Identität für die Theta-Funktion auf G, die Formel $\operatorname{vol} G = (2\pi)^{(n+e)/2} \operatorname{vol} T / \prod_{\alpha>0} B(\alpha, \rho)$, ein Resultat von Cahn über die Asymptotik der Eigenwerte des Laplace-Operators Δ_G auf G und die Asymptotik der Lebesgue-Konstanten zu einer sphärischen Aufsummierung.

B. Dreseler

Monoide mit Divisorentheorie

Ulrich Krause, Bremen, 21. 6. 85

Sei S Monoid (komm. Halbgr., mit 0, Kürzungsregel, add. geschrieben). Sei D faktorielles Monoid, $D = \mathbb{N}^{(T)}$; $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. $\varphi : S \to D$ heißt Divisorentheorie für S, wenn gilt: φ ist ein Halbgruppenhom.; $x \leq_S y \Leftrightarrow \varphi(x) \leq_D \varphi(y)$ (dabei $x \leq_S y \Leftrightarrow y - x \in S$); jede Funktion aus D ist punktweises Minimum von Funktionen aus $\varphi(S)$. (Nach Borewicz / Šafarevič, Skula). Mit Hilfe von Primkegeln werden diejenigen Monoide charakterisiert die eine Divisorentheorie besitzen. Eine Teilmenge $P \subset G = S - S$ heißt Primkegel, wenn: $0 \in P \neq G$; $P + P \subset P$; $G = P \cup -P$; $nx + y \in P$ für $x \in G, y \in P$, alle $n \in \mathbb{N}$ impliziert, daß $x \in P$ (P ganz abgeschlossen); $P = S - S \cap (P \cap -P)$.
Beispiele: 1) Die Primkegel der multiplikativen Halbgruppe eines Dedekindringes entsprechen vermöge Lokalisierung eineindeutig den Primidealen des Rings. 2) In einem beliebigen Integritätsring sind die durch 0 ergänzten Primkegel der multiplikativen Halbgruppe genau die für den Ring essentiellen Bewertungsringe vom Rang 1 im Quotientenkörper des Rings. Es wird gezeigt: Ein Monoid S besitzt genau dann eine Divisorentheorie, wenn S Durchschnitt von endlichem Charakter aller oberhalb von S gelegenen diskreten Primkegel ist (dabei P diskret, wenn $P = \mathbb{N}a + P \cap -P$ mit $a \in P$). Es wird weiter gezeigt, daß ein Integritätsring genau dann ein Krullring ist, wenn seine multiplikative Halbgruppe in der obigen Weise Durchschnitt der diskreten Primkegel ist. Diese Aussage liefert eine rein multiplikative Beschreibung von Krullringen. Zusammen mit der vorangehenden Aussage ergibt sich eine rein multiplikative Konstruktion

der Divisorentheorie von Krullringen vermöge der Primkegel. Weiterhin werden in Verallgemeinerung einer Divisorentheorie Einbettungen eines Monoids S in das additive Monoid aller nichtnegativen stetigen Funktionen mit kompaktem Träger auf einem lokalkompakten Raum T untersucht. Hat S eine Ordnungseinheit, so besitzt S genau dann eine Einbettung mit kompaktem T wenn S ganz abgeschlossen in G ist. T kann minimal gewählt werden. Ist G speziell die additive Gruppe eines Rings mit 1 (nicht notwendig kommutativ oder assoziativ) derart daß $S \cdot S \subset S$ und 1 Ordnungseinheit für S ist, so liefert die Einbettung den Satz v. Kadison-Dubois.

Ulrich Krause

Die Geometrie der Hecke-Charaktere 5.7.1985

NORBERT SCHAPPACHER.

Nur die algebraischen Hecke Charaktere haben [bisher ???] eine geometrische Interpretation, d.h. die Charaktere χ eines Zahlkörpers K mit Werten in einem anderen Zahlkörper E, $\chi : I_m \longrightarrow E^*$, wo I_m die Gruppe der zu einem gegebenen ganzen Ideal m primen Ideale von K ist, mit $\chi((\alpha)) = \prod_{\sigma : K \hookrightarrow \bar{E}} (\alpha^\sigma)^{n_\sigma}$ für alle $\alpha \equiv 1 \bmod m$ in K^*, mit gewissen $n_\sigma \in \mathbb{Z}$.

Die geometrische Standardinterpretation orientiert sich am Beispiel der abelschen Varietäten über K mit komplexer Multiplikation durch E. Um allen Hecke Charakteren von K ein geometrisches Objekt zuzuordnen, baut man aus solchen CM abelschen Varietäten Motive auf. Deren Interpretation ~~wurde~~ als Darstellungen der Taniyama-gruppe wurde erläutert. — Vgl. Springer Lect. Notes 900 [Deligne, Milne, Ogus, Shih], chap. IV, und das geplante Buch von Milne ...

Ein Motiv (im obigen Sinn) ist durch seinen Hecke-charakter bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Da ermöglicht geometrische Beweise gewisser Periodenrelationen. Als Illustration wurde eine solche Ableitung der ~~die~~ sogenannten Chowla-Selberg-Formel skizziert.

N. Schappacher (Paris)
23.10.85

Coloring Problems for hypergraphs.
CLAUDE BERGE

Given a hypergraph $H = (E_1, E_2 \ldots E_m)$ (where E_i is a finite subset called ~~the~~ "edge"), the chromatic index $q(H)$ is the least number of colors needed to color the edges so that no two intersecting edges have the same color. We study some classes of hypergraphs H for which $q(H) = \Delta(H)$ —
$\Delta(H)$ = maximum degree of H = max n° of edges having one common point.
Examples: The complete r-uniform hypergraph K^r_{rk} on rk vertices, by ~~the~~ Baranyai's Theorem. Other examples: the r-partite complete hypergraph $K^r_{n_1, n_2 \ldots n_r}$.
We raise the following conjecture: let $\hat{H} = (F / F \neq \emptyset, F \subset E$ for some $E \in H)$ be the hereditary closure of H.
~~Then~~ Conjecture. if H is a "linear" hypergraph (that is two edges of H intersect in at most one point), then $q(\hat{H}) = \Delta(\hat{H})$. ???????
Such a statement would generalize ~~the~~ Vizing's Theorem for graphs.

Claude Berge
(Paris)

Invarianten diff. 4-Mannigfaltigkeiten
A. Van de Ven

Es sei X die komplexe projektive Ebene, aufgeblasen in den neun Basispunkten eines allgemeinen Büschels kubischer Kurven. Dann ist X ein elliptischer

Faserraum über $\mathbb{P}_1$. Es entstehe $X_{p,q}$ aus X indem man zwei logarithm. Transformationen anwendet entlang glatte Fasern von X, mit Multiplizität p bzw q. Falls p und q teilerfremd sind, so ist $X_{p,q}$ homeomorph zu X (Freedman). Es war bis jetzt unbekannt ob $X_{p,q}$ auch diffeom. mit X ist. Mit einer ganz neuen Methode hat S. Donaldson neuerdings bewiesen dass $X_{2,3}$ nicht diffeom. zu X ist. Donaldson konstruiert eine Invariante, die eine Abbildung $\mathcal{S}$ von $\mathcal{P} \setminus (-1)$-Wände in $H^2(V, \mathbb{Z})$ ist. Hier ist V eine kompakte, orientierte 4-dimensionale differenzierb. Mannigfaltigkeit mit $\pi_1(V)=0$ und cupform $(+,-,-,\ldots)$ über $\mathbb{R}$, während $\mathcal{P} \subset H^2(X, \mathbb{R})$ der positive Kegel ist. Falls V projektiv ist lässt sich für ample $\theta \in \mathcal{P} \setminus (-1)$Wände $\mathcal{S}(\theta)$ mit Hilfe der Theorie der algeb. Vektorbündeln berechnen.

Eine Erweiterung der Donaldsonmethode liefert (Friedman-Morgan, Okonek-Van de Ven): $X_{2,q}$ diffeom $X_{2,r} \rightleftarrows q=r$. Auf X, aufgefasst als topologische Mannigfaltigkeit, gibt es also unendlich viele differenzierbare Strukturen.

A Van de Ven

(Leiden)

8 Nov 1985

The classical diophantine inequality (α irrational)

(1) $$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{q_n^2}, \quad (p_n, q_n) = 1, \quad q_n > 0$$

where $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$ is generalized* to the Hecke groups $G_q = G(\lambda_q) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & \lambda_q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, $\lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$, $q = 3, 4, 5, \ldots$. Call α G_q rational if $\alpha = V\infty$ for some $V \in G_q$, otherwise G_q-irrational. Then for each q there is an $h_q > 0$ such that

(2) $$|\alpha - g_n(\infty)| < h_q^{-1} c_n^{-2}, \quad n = 1, 2, \ldots \quad \alpha = G_q \text{ irrational}$$

where

$$g_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \in G_q$$

and h_q is best possible. For $q = 3$, $\lambda_q = 1$, and $G_3 = SL(2, \mathbb{Z})$, the modular group; here $h_3 = \sqrt{5}$ as noted in (1). It is proved in (*):

(3) $$h_q = 2, \quad q \text{ even}, \geq 4$$

and an upper bound for h_q is obtained when q is odd. Recently A. Haas / C. Series have obtained the exact value of h_q for q odd:

$$h_q = 2\left[1 + \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \lambda = \lambda_q, \quad q \geq 3$$

This paper has not yet appeared.

*J. Lehner, ~~The Hurwitz constant~~ Diophantine approximation on Hecke groups, Glasgow Mathematical Journal, Oct. 1985

— J. Lehner

(Princeton)

Automorphic Forms and Exponential Sums for $GL(n,\mathbb{R})$ 15 November 1985

Solomon Friedberg (Harvard, I.H.E.S., U.C. Santa Cruz)

Let first Γ be a congruence subgroup of $SL(2,\mathbb{Z})$, $H=\{x+iy \mid y>0\}$. The spectral expansion of a function in $L^2(\Gamma\backslash H)$ involves both discrete and continuous spectrum; one is especially interested (following Ramanujan-Petersson and Selberg) in the discrete spectrum. That is, one wants to study $\phi: H\to\mathbb{C}$; $\phi(\gamma\circ z)=\phi(z)$ $\forall \gamma\in\Gamma$; $\phi\in L^2$; $-y^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})\phi=\lambda\phi$, $T_p\phi=a_p\phi$, where $T_p=$ Hecke operator, $a_p=$ Fourier coefficient. One conjectures that (i) $\lambda\geq\frac{1}{4}$ (ii) $\forall\varepsilon>0$, $|a_p|<2p^{-1/2+\varepsilon}$ [if one assigns to ϕ the automorphic representation $\pi_\phi=\otimes\pi_p$, this says no complementary series occur]. Selberg introduced the Poincaré series $P_m(z,s)=\sum_{\Gamma_\infty\backslash\Gamma} Im(\gamma\circ z)^s e^{2\pi i m\gamma\circ z}$ $Re(s)>2$, $m>0$ to study this. Since $P_m\in L^2(\Gamma\backslash H)$, one can use a spectral expansion; this shows that the poles are related to the eigenvalues λ above. Since $P_m(z+1,s)=P_m(z,s)$, one can compute the Fourier expansion in z. One obtains ($GL(2)$) Kloosterman sums: $S(m,n;c)=\sum_{\substack{a=1\\(a,c)=1}}^{c} e^{2\pi i(am+na^{-1})/c}$. Estimating these sums via algebraic geometry (Weil), one sees that $\lambda\geq 3/16$.

In this talk I describe work in progress on generalizing this to $GL(n)$. For $n=3$ this is joint with D. Bump and D. Goldfeld. One forms a $GL(n)$ upper half space $H=GL(n,\mathbb{R})/\mathbb{R}^*O(n)$. For a congruence subgroup Γ of $SL(n,\mathbb{Z})$, one can again study $L^2(\Gamma\backslash H)$; the discrete spectrum consists of L^2 functions $\phi: H\to\mathbb{C}$ s.t. $\phi(\gamma\circ\tau)=\phi(\tau)$ $\forall\gamma\in\Gamma, \tau\in H$ satisfying certain differential equations (corresponding to the center of the universal enveloping algebra of $gl(n,\mathbb{R})$). I introduce a $GL(n)$ Poincaré series $P_{m_1,\ldots,m_{n-1}}(\tau; s_1,\ldots,s_{n-1})$. For example, for $n=3$, $H=\{\begin{pmatrix} y_1y_2 & y_1x_2 & \\ & y_1 & \\ & & \end{pmatrix}$ $y_1,y_2>0$, $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\}$, and $P_{m_1,m_2}(\tau;s_1,s_2)=\sum_{\gamma\in\Gamma\cap\left(\begin{smallmatrix}1&*&*\\0&1&*\\0&0&1\end{smallmatrix}\right)\backslash\Gamma} y_1^{2s_1+s_2}y_2^{s_1+2s_2}e^{2\pi i(m_1(x_1+iy_1)+m_2(x_2+iy_2))}\mid[\gamma]$ $(Re(s_1), Re(s_2)>2/3)$. The Fourier expansion involves certain new exponential sums, which are $GL(n)$ analogues of the classical Kloosterman sum; in fact there is one sum for each element of the Weyl group W of $GL(n)$ [notation: sums S_w for $w\in W$] [or $S_w=S_w(m_1\ldots m_{n-1},m_1'\ldots m_{n-1}';c_1,\ldots,c_{n-1})$]

Thm: For $w=\begin{pmatrix} I_{n-1} & \\ & 1\end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix} & I_{n-1} \\ 1 & \end{pmatrix}$, ~~the~~ sum $\sum_{\substack{x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\\ x_1\cdots x_n=1}} e^{2\pi i\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{p}\right)}$ arises as a Kloosterman sum for $GL(n)$, S_w.

These sums are estimated by Deligne [SGA $4\frac{1}{2}$] and so one might hope to apply Selberg's method. However, the spectral expansion of P, relating its polar divisor to the discrete spectrum, has been computed only for $n=3$ at present [the obstacle for $n>3$ is the lack of a formula for certain transforms of Jacquet's Whittaker functions]. We

Conjecture: ~~The~~ sum $\sum_{\text{ord } w} \sum_{c_1,\ldots,c_{n-1}=1}^{\infty} \frac{S_w(\underline{m},\underline{m}';c_1,\ldots,c_{n-1})}{c_1^{ns_1}\cdots c_{n-1}^{ns_{n-1}}}$ has poles "corresponding" to the poles of the entire $GL(n)$ Poincaré series

This is true for $n=2$. The key restriction is that we look only at the terms of highest order in W.

Thm: For $n=3$, if the conjecture holds, then so do the $GL(2)$ and $GL(3)$ Ramanujan-Petersson-Selberg conjectures.

Paris

Uniform distribution, numerical integration, ergodic theory

Vera T. Sós, ELTE Univ BUDAPEST 21.11.85

Let $E^k = [0,1)^k$, $I(x) = \times_{i=1}^{k} [0,x_i)$, $|I|$ be the L.m., χ_I the characteristic function of I. For a sequence $U = (u_n)$ in E^k the discrepancy (in sup. norm) is defined as
$\Delta_N^u(I) =: \sum_{n=1}^{N} \chi_I(u_n) - N|I|$, $\Delta_N^u = \|\Delta_N^u\|_\infty = \sup_I |\Delta_N^u(I)|$.
The sequence (u_n) is uniformly distributed in E^k, if $\lim_N \frac{1}{N}\Delta_N = 0$. According to classical results of Aardenne-Ehrenfest, K.F. Roth, W. Schmidt we know, that no sequence can be "too good", $\frac{1}{N}\Delta_N$ cannot converge to 0 "too rapidly". The theory of uniformly distributed sequences is strongly related to the th. of diophantine approximation. The relation to ergodic theory is shown e.g.: Th (~~Ostrowsky~~ Hecke $\Leftarrow$, Kesten $\Rightarrow$): for α irrational, and $u_n = \{n\alpha\}$, $\sup_N |\Delta_N(I)| < \infty \iff I = \{k\alpha\}$ for some int. k. Generalization for erg. transform: Th (Furstenberg - Keynes - Shapiro, Halász et)
$\sup_N |\sum_{1\le n\le N} \chi_A(T^n x) - N\mu(A)| < \infty$ for $x \in X$, $\mu(X) > 0 \iff e^{2\pi i \mu(A)}$ is an eigenvalue of T. Results for one-sided inequality of $\{n\alpha\}$ sequences (Dupain - Sós) and for ergodic transformations (Halász) show different phenomena. It is not clear whether the strong ineq. phen for $\{n\alpha\}$ sequences (Sós) and for arbitrary sequences (Halász, Tijdeman - Wagner) have some analogons for ergodic transformations. Using Denjoy's theorem for hom. $T: R/Z \to R/Z$ ~~many~~ of the results for $\{n\alpha\}$ sequences have consequences for the orbits $(T^n x)$. The fact, that (u_n) is u.d. iff for every Riemann-integrable f
$\lim_N \frac{1}{N} \sum_1^N f(u_n) \to \int_{E^k} f(x)dx$, and the Koksma-inequality for k=1 (and generalizations) $|\int f(x)dx - \frac{1}{N}\sum_1^N f(u_n)| < V_f \cdot \frac{\Delta_N^u}{N}$ shows the importance of u.d.s. in numerical integration. Using "very good" de u.d, deterministic sequences instead of randomly generated ones (Monte-Carlo) in some cases is better.

V.T. Sós

Groups of Arithmetic Type — November 22, 1985

Ken Brown, Cornell

I will describe some new examples of groups which seem intuitively to be of "arithmetic type", but which also have some very surprising properties for groups of this type. Some of them, for instance, are simple groups.

Let F be the group of PL homeomorphisms of the unit interval with singularities in $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ and slopes in $\{2^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. F can also be described as the group of PL homeomorphisms which are linear with respect to subdivisions defined by halving. As such, elements of F can be described by tree pictures, such as . Let T (resp. G) be the similarly defined group of homeomorphisms of the circle (resp. Cantor set). We have $F < T < G$. These groups were first introduced by R. Thompson, who proved them to be finitely presented and who proved that T and G were simple. Replacing 2 by n and the unit interval by $[0, r]$, we get generalizations $F_{n,r} \subset T_{n,r} \subset G_{n,r}$. All of them seem to be "arithmetically defined homeomorphism groups". This motivates:

<u>Thm</u>. All of these groups admit $K(\pi,1)$-complexes with finite skeleta.

[For F and T this was proved earlier in joint work with Ross Geoghegan via an "accidental" isomorphism of F with a group that had arisen in homotopy theory.]

The proof is based on the construction of a poset on which the groups in question act. One arrives at the poset by properly understanding the groups as automorphism groups of a space with an "arithmetic PL structure". Alternatively, one identifies the groups (following Thompson, Galvin, Higman) with automorphism groups of a certain free algebra in the sense of universal algebra. The bases of this algebra turn out to have a natural poset structure.

Goodwillie's Derivative of Functors and Waldhausen's Algebraic K-theory of Spaces -

Wu-chung Hsiang

Let M be a C^∞-manifold and $P(M) = \{f : M \times I \circlearrowleft$ diffeomorphisms such that $f|M \times 0 = id\}$ under C^∞-topology. Then consider $\mathbb{P}(M) = \varinjlim_i P(M \times I^i)$ under the stabilization $f \mapsto f \times id$. The homotopy structure of this space is very important to topologists. It was first studied by Cerf and then Hatcher-Wagoner for $\pi_0 \mathbb{P}(M)$. About ten years ago, Waldhausen took a quantum jump. He introduced a space $A(X)$ as follows. Let $G = \Omega X$ be the loop group of X ($M \sim X$ of the same homotopy type). Consider $R = \Omega^\infty S^\infty(G_+)$ and the pullback

$$\begin{tikzcd} \widehat{GL}(R) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_0"] & M(R) \arrow[d, "\pi_0"] \\ GL(\mathbb{Z}[\pi_0 G]) \arrow[r, hook] & M(\mathbb{Z}[\pi_0 G]) \end{tikzcd}$$

Then define $A(X) = B\widehat{GL}^+(R)$ the Quillen's "+" construction. He then proved that

$$A(X) = \Omega^\infty S^\infty(X_+) \times B^2\mathbb{P}(X)$$

where $B^2\mathbb{P}(X)$ is the double delooping of $\mathbb{P}(X)$. So $A(X)$ essentially computes $\mathbb{P}(X)$. Using the rational computation of Staffeldt and myself, it was observed by Goodwillie and Burghelea that $\tilde{A}(X) = \text{Fiber}(A(X) \to A(*))$ and $\tilde{B}(X) = Q\Sigma(ES^1_+ \times_{S^1} X^{S^1})$ are rationally equivalent for X 1-connected. So, it is natural to ask whether $\tilde{A}(X)$ and $\tilde{B}(X)$ are equivalent as ∞-loop spaces.

<u>Theorem</u> (G. Carlsson, R. Cohen, T. Goodwillie and W. C. Hsiang).

If $X = \Sigma Y$ a suspension space for Y connected, then $\tilde{A}(X) \simeq \tilde{B}(X)$. But if $X = \mathbb{C}P^2$, then $\tilde{A}(X) \not\simeq \tilde{B}(X)$

So, the problem still remains

(29. 11. 85)

Differentia-Geometical Aspects of Information Theory

December 6, 1985, Univ. of Tokyo
甘利俊一 (Shun-ichi Amari)

Information elements are often represented by random variables or probability lawas governing them. Let S be a set of such elements. It often forms a differentiable manifold having interesting geometric structure. More specifically, let $S = \{p(x, \theta)\}$ be a parameterized family of probability distribution (density functions) smoothily parametrized by $\theta = (\theta^1, \cdots, \theta^n) \in R^n$. Then, we can naturally intrduce a Riemannian metric g and a one-parameter family of affine connections $\overset{\alpha}{\nabla}$ or $\overset{\alpha}{\Gamma}$ parametrized by a scalar α. The $\pm\alpha$ connections are dually coupled in the sense that, for α-parallel displacements Π^α (depending on the path)

$$\langle A, B \rangle = \langle \Pi^\alpha A, \Pi^{-\alpha} B \rangle$$

where $\langle\ ,\ \rangle$ is the inner products of tangent vectors. When the manifold is $\pm\alpha$-flat, we have a very interesting manifold such that

i) there exists α-affine coordinates θ and $-\alpha$-affine coordinates η such that they are dually coupled

$$\langle \partial_i, \partial^j \rangle = \delta_i^j, \qquad \partial_i = \frac{\partial}{\partial\theta^i}, \quad \partial^j = \frac{\partial}{\partial\eta_j}$$

ii) there exists potential functions $\psi(\theta)$ and $\varphi(\eta)$ such that

$$\langle \partial_i, \partial_j \rangle = \frac{\partial^2}{\partial\theta^i\partial\theta^j}\psi(\theta), \qquad \langle \partial^i, \partial^j \rangle = \frac{\partial^2}{\partial\eta_i\partial\eta_j}\varphi(\eta)$$

iii) a divergence function is defined between two points P, P'

$$D(P, P') = \psi(\theta) + \varphi(\eta') - \theta\cdot\eta'$$

iv) Pythagorean theorem holds for $D(P, P')$, when 3 points P_1, P_2, P_3 satisfy $\overset{\alpha}{\widehat{P_1P_2}}$ (α-geodesic) and $\overset{-\alpha}{\widehat{P_2P_3}}$ ($-\alpha$-geodesic) are orthogonal at P_2.

Let $\{x, y\}$ be a joint information source $x \in \{1, \cdots, m\}$ $y \in \{1, \cdots, n\}$ with discrete probabilities $p_{ij} = \mathrm{Prob}\{x = i, y = j\}$. The manifold of all such distributions $S = \{p_{ij} \mid p_{ij} > 0, \sum p_{ij} =$

is ± 1-flat. We can decompose S into dual geodesic foliations in which each foliation is 1-flat and its co-foliation is -1-flat. This gives us a geometric structure of mutual correlations of x and y. If we are forced to treat x and y separately as is in the situation of ~~the~~ multi-terminal information theory, the observable quantities are limited in some lower-dimensional submanifolds. This shows how multi-terminal information theory is related to differential-geometrical structures.

Kohomologie arithmetischer Gruppen 20. Dez. 1985

G. Harder

In diesem Vortrag wurde über die arithmetische Bedeutung der Kohomologie arithmetischer Gruppen gesprochen. Dabei wurde zunächst die Vermutung diskutiert, daß man zu den Eigenklassen der Kohomologie, Motive finden kann, deren l-adische Darstellungen sich aus den Eigenwerten der Heckeoperatoren bestimmen lassen. Deligne's Satz, daß dies für klassische elliptische Modulformen richtig ist, wurde erläutert und es wurde am Beispiel der Δ-Funktion der Satz von Ribet besprochen. Dieser Satz besagt in diesem Spezialfall, daß der Körper $\mathbb{Q}(\sqrt[691]{1})$ eine unverzweigte Erweiterung vom Grad 691 besitzt. Dies folgt daraus, daß die Eisensteinklasse kongruent zu Δ mod 691 ist das ist das klassische Resultat von Ramanujan – und diese Kongruenz erzwingt eine Reduktion der 2-dimensionalen Galoisdarstellung auf Dreiecksgestalt.

G. Harder

(Bonn)