January 10, 1986

Picard's theorem and generalizations for quasiregular mappings

Seppo Rickman, Helsinki

It has turned out that quasiregular mappings form the right generalization of the geometric part of the theory of analytic functions in the plane to real n-dimensional space. These can be defined as quasiconformal mappings with the homeomorphism requirement dropped, i.e. a continuous map $f: G \to R^n$ of a domain G in R^n is (K-)quasiregular if $f \in W^1_{n,loc}(G)$ and $|f'(x)|^n \leq K J_f(x)$ a.e. for some $K \in [1, \infty[$. The definition clearly extends to Riemannian n-manifolds. Quasiregular maps were introduced and first studied by Reshetnyak since 1966, some years later rather systematically by Martio-Rickman-Väisälä, and also others. One of the main questions in the theory, proposed by Zorič in 1967, has been the existence of a Picard-type theorem on omitted values. For a long time it was conjectured that it holds for $n \geq 3$ in the same form as in the plane, namely that a quasiregular map of R^n omitting 2 points is constant. The first result towards a Picard theorem was obtained in 1980 in the form: Thm 1. There exists an integer $q = q(n, K)$ such that every K-quasiregular map $f: R^n \to R^n \setminus \{a_1, \ldots, a_q\}$ is constant. The problem is now solved in dimension three, and it turns out that the conjecture is false, in fact Thm 1 is qualitatively best possible: Thm 2. For every positive integer there exists a nonconstant quasiregular map $f: R^3 \to R^3$ omitting p points. These results have generalizations and extensions into various directions.

Seppo Rickman

Singularität von Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Heinrich v. Weizsäcker, Kaiserslautern

Der folgende Satz wird vorgestellt:

Satz: Seien X, Y Polnische Räume, $\mu : X \to \mathcal{P}(Y)$ ein Borel-Kern ($\mathcal{P}(Y)$ sei die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße über den Borel-Mengen $\mathcal{B}(Y)$). Dann ist jede der ersten drei Bedingungen echt schwächer als die folgende

a) $x \neq x' \Rightarrow \mu_x \perp \mu_{x'}$

b) es ex. $B \in \mathcal{B}(X \times Y)$ mit $\mu_x(B_x) = 1$, $\mu_{x'}(B_x) = 0$ für $x \neq x'$

c) Für $p, q \in \mathcal{P}(X)$ folgt aus $p \perp q$, daß $\int_X \mu_x \, dp \perp \int_X \mu_x \, dq$ ist

d) Es gibt eine Borelsche Abbildung $\varphi : Y \to X$ so daß $\mu_x \varphi^{-1}\{x\} = 1$ für alle $x \in X$.

Nicht trivial ist dabei die Einordnung der Bedingung c) in die übrigen: Für c) $\Rightarrow$ b) wird ein abgeschwächter Minimaxsatz für analytische maßkonvexe Mengen benötigt, für c) $\not\Rightarrow$ d) wird ~~go~~ als Zwischenstufe gezeigt (v. Blackwell, Preiss unabhängig)

Satz: Seien

$$K = \{\kappa \in \mathcal{P}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}) : \kappa\{y : y_n = 0\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1\}$$
$$L = \{\lambda \in \mathcal{P}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}) : \lambda\{y : y_n = 0\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\}$$

Es existiert keine Menge $B \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ mit der Baireschen Eigenschaft so daß $\kappa(B) = 1$ und $\lambda(B) = 0$ für alle $\kappa \in K$, $\lambda \in L$.

Die obigen Ergebnisse stammen aus einer Arbeit mit D. Mauldin, D. Preiss. Diskrete Versionen werden andiskutiert.

Moduln auf Hyperflächensingularitäten

Ragnar-O. Buchweitz (Hannover)

Sei $f(\underline{z}) \in \mathbb{C}\{z_0,\dots,z_n\}$ eine komplexe (formale oder) konvergente Potenzreihe mit $f(0)=0$, $R = S/(f)$ $(S = \mathbb{C}\{\underline{z}\})$ der Ring der durch f definierten Hyperflächensingularität.
Das allgemeine Problem ist die Klassifikation aller endl. erzeugten R-Moduln. Das erweist sich als zu schwierig (jetzt?). Überraschenderweise läßt sich jedoch die folgende Teilklasse recht einfach beschreiben:

Ein R-Modul M heißt maximal Cohen-Macaulay'sch (MCM), falls $\operatorname{projdim}_S M = 1$ ist (Es gilt immer: $n+1 \geq \operatorname{projdim}_S M \geq 1$).
Ein solcher Modul besitzt also eine Darstellung
$0 \to F_1 \xrightarrow{\phi} F_0 \to M \to 0$; F_0, F_1 freie S-Moduln, ϕ S-linear (In Termen von Basen für F_0, F_1 wird ϕ durch eine quadratische Matrix repräsentiert). Wegen $f.M=0$ gibt es eine S-lineare Abb. $\psi : F_0 \to F_1$ mit $\phi\psi = f.\mathrm{id}_{F_0}$ und $\psi\phi = f.\mathrm{id}_{F_1}$.
Ein solches geordnetes Paar (ϕ,ψ) heißt Matrixfaktorisierung von f. (ϕ,ψ) heißt reduziert, falls $\phi(0)=\psi(0)=0$ gilt.

Satz (D. Eisenbud, '80) Die Isomorphieklassen von MCM's über R stehen in eineindeutiger Beziehung mit den Isomorphieklassen von reduzierten Matrixfaktorisierungen.

Aus Arbeiten von Artin-Verdier; J. Herzog; Greuel-Knörrer folgt:

Satz Sei $n \leq 2$. Dann gibt es nur endlich viele Isomorphieklassen von unzerlegbaren MCM's über R, falls f eine einfache Flächen- oder Kurvensingularität definiert, (also zur Familie der A-D-E-Singularitäten gehört, die im wesentlichen schon F. Klein bekannt waren).

Der entscheidende Schritt für höhere Dimensionen ist:

Satz (H. Knörrer) ('84)

(a) (Isom. von unzerlegbaren MCM's für $f(\underline{z})$ endlich) $\iff$ (Isom. von unzerlegbaren MCM's für $f(\underline{z}) + x^2 \in \mathbb{C}\{\underline{z}\}\{x\}$ endl.)

(b) Es existiert eine Bijektion der Isomorphieklassen von MCM's für $f(\underline{z})$ und $f(\underline{z}) + x^2 + y^2$.

Corollar (aus (a)): Jede einf. Singularität (i. S. von Arnold) besitzt nur endlich viele Isom.klassen von unzerlegbaren MCM's.

Die Umkehrung liefert:

Satz (R.O.B., G.-M. Greuel, F.-O. Schreyer)

(a) Isom.klassen von MCM's für f endl. $\Rightarrow$ f ist einfach

(b) —"————————————"— abzählbar unendl. $\Leftrightarrow$ f ist vom Typ A_∞ oder D_∞.

Zum Schluß wurde die konzeptuelle Bedeutung von MCM's andiskutiert (Verbindungen zur stabilen Modul-theorie, Theorie der alg. Zykel auf proj. Hyperflächen). Hierbei spielt die Kategorie der MCM's modulo freier Moduln, $\underline{MCM}(f)$, eine zentrale Rolle.

Eine Verschärfung von (b) des Satzes von H. Knörrer ist:

Satz Die Kategorien $\underline{MCM}(f(\underline{z}))$ und $\underline{MCM}(f(\underline{z})+x^2+y^2)$ sind äquivalent.

Ragnar-O. Buchweitz

Einige falsche Sätze über topologische Räume 31. 1. 86

~~Satz~~ Horst Herrlich

Folgende topologische Sätze sind leider falsch:

1) Ist X Teilraum von Y, so gilt $\dim X \le \dim Y$

2) Jeder Teilraum X eines Raumes Y mit $\dim Y = 0$ hat die Dimension $\dim X = 0$

3) $\dim(X \times Y) \le \dim X + \dim Y$ für parakompakte Räume X, Y

4) Aus $\dim X_i = 0$ für alle $i \in I$ folgt $\dim \prod_{i\in I} X_i = 0$

5) Produkte parakompakter Räume sind parakompakt

6) Teilräume " " " "

7) Produkte von Lindelöf " " " Lindelöf

8) Teilräume " " " "

Etc. Alle Sätze werden richtig, wenn man die Kategorie der topologischen Räume in eine geeignete Oberkategorie Near voll einbettet und die Begriffe "Produkt" und "Teilraum" in der Oberkategorie interpretiert.

H. Herrlich

Über abelsche Erweiterungen kommutativer Ringe

Ina Kersten (Wuppertal) 7.2.1986

Ungefähr seit 1960 studiert man galoissche Erweiterungen kommutativer Ringe. Diese verallgemeinern die galoisschen Körpererweiterungen. Ist die (endliche) Galoisgruppe Γ abelsch, so bilden die Isomorphieklassen von Γ-Galoiserweiterungen des Grundringes R eine abelsche Gruppe $\mathfrak{F}$ $H^1(R,\Gamma)$. Beim Studium dieser Gruppe kann man sich auf den Fall beschränken, daß Γ zyklisch von der Ordnung p^n ist mit einer Primzahl p. Es wird hier für einen lokalen Ring R, in dem $p \neq 2$ invertierbar ist, eine explizite Beschreibung der Gruppe $H^1(R,\Gamma)$ gegeben. Sodann werden Anwendungen gebracht wie z.B. eine Charakterisierung der reellen Abschlüsse von R u. eine Charakterisierung aller kubischen Galoiserweiterungen eines Körpers K mit $\mathrm{Char}(K) \neq 3$.
Es werden dann auch $\mathbb{Z}_p$-Erweiterungen eines Körpers K mit $\mathrm{Char}.K \neq p$, studiert. Das sind galoissche Körpererweiterungen von K, deren Galoisgruppe isomorph ist zur additiven Gruppe $\mathbb{Z}_p$ der p-adischen ganzen Zahlen. Und es wird ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Existenz einer $\mathbb{Z}_p$-Erweiterung von K angegeben.

Die Poincaré-Gruppe.

Eine Einladung an die Mathematiker u. Physiker

Erich Kähler (Hamburg) 14.2.1986

Die klassische Poincaré-Gruppe ist das semidirekte Produkt der (eigentlichen) Lorentzgruppe mit der 4gliedrigen Translationsgruppe. Sie kann auch als die Gruppe der Isometrien der Metrik $dx^2+dy^2+dz^2-dt^2$ definiert werden.

Diese Gruppe wird ersetzt durch die Gruppe der Isometrien der Metrik $(dx^2+dy^2+dz^2-dt^2)\cdot t^{-2}$, indem $t=0$ als die Zeit des Urknalls gedeutet wird. Ist $t=T$ die Zeit eines historischen Ereignisses, so ist jene Gruppe auch die Gesamtheit der Isometrien der Metrik $T^2(dx^2+dy^2+dz^2-dt^2)\cdot t^{-2}$, die nahezu gleich $dx^2+dy^2+dz^2-dt^2$ ist. Da im Bereich physikalischer Experimente $\frac{t}{T}$ nahe bei 1 liegt, entsteht beim Übergang zur neuen Poincaré-Gruppe kein Widerspruch zur Erfahrung. Der mathematische Gewinn ist groß: Die neue Gruppe ist ebenfalls 10-gliedrig wie die klassische Poincaré-Gruppe, aber ihr Reichtum an Untergruppen ist erheblich größer als im klassischen Fall. Da die neue Gruppe mit einer Quaternionengruppe zusammenhängt, gibt sie Gelegenheit, die an automorphen Funktionen gewonnenen Erfahrungen anzuwenden. Der Begriff der Relativität von Raum und Zeit erfährt eine Wandlung: $t=0$ hat absolute Bedeutung, wenn die neue Poincaré-Gruppe sich als wahr erweist. Sie würde wegen ihrer Beziehungen zur Théorie des fonctions fuchsiennes viel eher den Namen Poincaré-Gruppe verdienen als die bisher sogenannte Gruppe.

Constructing a satisfactory proof of the classification of the finite simple groups Daniel Gorenstein (Rutgers Univ.) 20/4/8[illegible]

The goal is to produce as efficient a proof of the classification as is possible using existing techniques. Given the complexity of the statement of the theorem, such a proof will of necessity require several thousand pages (still a substantial improvement over the original ten to fifteen thousand pages).

One begins by considering a counterexample G of least order. It then follows that all proper subgroups H of G are K-groups (i.e., the composition factors of H are among the known simple groups). On the basis of this internal information alone, one must force G to be isomorphic to one of the known simple groups G^*, so that no counterexample to the theorem exists.

The grand strategy is to show (ultimately) that G has a presentation by generators and relations identical with that of one of the known simple groups G^*. The particular path to be followed to achieve this objective depends very much on the nature of the subgroup structure of the target group G^* and forces one to consider a rather elaborate case division. In the so-called "generic" case (when G^* is either an alternating group of sufficiently large degree or a group of Lie type of Lie rank ≥ 3), it is possible to devise a rather uniform strategy, based on the structure of the centralizers of elements of suitable prime order p in G. It turns out that for the appropriate p, the centralizers of a suitable pair of commuting such elements suffice to yield the desired presentation, and the entire analysis is taken up with demonstrating that the structures of these two centralizers is

"essentially" the same as that of one of the target groups G^*.
The "monogeneric" cases, which include the low degree alternating groups, the groups of Lie type of Lie rank ≤ 2, groups of odd order, and the 26 sporadic groups as target groups, unfortunately, take up the bulk of the analysis. Here several distinct cases must be considered. In general the case division is determined by the particular technique that dominates the analysis for that portion of the classification proof.

Daniel Gorenstein

(21.4.86)

On lower bound for overall trigonometrical sums in the Galois fields

Zinoviev V.A., Lytsin S.N.
Institute for Problems of Information Transmission of the Academy of Sciences of the U.S.S.R.

9.05.86.

Let: $F_q = GF(q)$ is a Galois field ($q = p^m$, p is a prime, $m = 1, 2, \ldots$); $Tr(x)$ is a trace function, $Tr(x) = x + x^p + \ldots + x^{p^{m-1}}$; $\Psi(x)$ is an any nonprincipal additive character of F_q, that is

$$\Psi(x) = \exp\{2\pi i\, Tr(cx)/p\},$$

where $c \in F_q^* = F_q \setminus \{0\}$. Denote by $Q(\delta, q)$ the set of polynomials $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_\delta x^\delta$ over F_q such, that

$$\Psi(f(x)) \neq const, \quad x \in F_q.$$

In number theory one studies the following function $S(\delta, q)$:

$$S(\delta, q) = \max_{f \in Q(\delta, q)} \Big| \sum_{x \in F_q} \Psi(f(x)) \Big| . \qquad (1)$$

It is known the following upper bound due to A. Weil

$$S(\delta,q) \le (\delta-1)\sqrt{q}\,, \quad \delta \le \sqrt{q}\,, \tag{2}$$

and trivial upper bound

$$S(\delta,q) \le q\,, \quad \delta \ge \sqrt{q}+1\,. \tag{3}$$

Some good lower bounds for value $S(\delta,q)$ had been obtained. In particular Karatsuba A.A. (Mathematical Notes, 1967, 1, №2, 199-208) had proved that the upper bound (3) is asymptotically exact for $q=p$ and for $\delta \gtrsim p/\log p$. Levenschtein V.I. (Problems of Kybernetics, 1983, 40, 43-110) had proved the similar result for $q=p^m$ and the same δ. Here we'll obtain the linear bound for $S(\delta,q)$ from q for degrees δ of order $\sqrt{q}$. The question about such possibility had been asked by Karatsuba in mentioned paper for case $q=p$. The main result of this paper is the following theorem:

<u>Theorem</u>. Let p is a prime number and m,s are any natural numbers, such that $2 \le s < m$ and let $q=p^m$ and $\delta \ge (1+1{,}8/p)\,q^{(s-1)/s}$. Then

$$S(\delta,q) \ge \left(1-\frac{p^{1-s/(p-1)}}{p-1}\right)\cdot q\,.$$

Estimation of undetected errors

Ziablov V.V.

Institute for Problem of Information Transmission of the Academy of Scinces of the USSR (Moscow) 7.5.86

Linear code LC over $GF(q)$ are considered:
n - code length; k - number of information symbols; d - code distance; $R=k/n$ - code rate.

Decoding algorithm: we will try to correct errors multiplicity no more τ.

Let t be a number of errors. Our aim is to estimate $P'(t)$ and $P''(t)$, where

$$P'(t) = N'_t / N_t \quad \text{for} \quad t > \tau;$$
$$P''(t) = N''_t / N_t \quad \text{for} \quad t \leq \tau;$$

N_t - number of all errors multiplicity t;
N'_t - number of undetected errors multiplicity t;
N''_t - number of uncorrected errors multiplicity t.

In $GF(q)^n$ define

$$\mathcal{V}(i|x) \triangleq \{y : d_H(y,x) \leq i\}$$
$$\mathcal{U}(i|x) \triangleq \{y : d_H(y,x) = i\}$$

($d_H(x,y)$ is the Hamming distance between $x, y \in GF(q)^n$).
Clearly the cardinalities of the set $\mathcal{V}(i/x)$ and $\mathcal{U}(i/x)$ are independet of x, and we define

$$u_i \triangleq |\mathcal{U}(i|x)| = \binom{n}{i}(q-1)^i$$
$$v_i \triangleq |\mathcal{V}(i|x)| = \sum_{j=0}^{i} u_j .$$

We also define

$$\mathcal{U}(i,j/m,y) \triangleq \{z : d_H(0,z)=i;\ d_H(0,y)=m;\ d_H(z,y) \leq j\}$$

Clearly the cardinalities of the set $\mathcal{U}(i,j/m,y)$ are independet of y, so

$$u(i,j|m) \triangleq |\mathcal{U}(i,j|m,y)|$$

Let

$$\mathcal{A}_i \triangleq \{y : y \in LC;\ d_H(0,y) = i\}$$
$$A_i = |\mathcal{A}_i|$$

We will assume that the weightdistribution A_i satisfies

$$A_i \leq f(n)\, u_i\, q^{-n(1-R)} \qquad d \leq i \leq n.$$

This holds for many classes of codes. In particular, for binary codes ($q=2$) we may take $f(n) \leq n$, for Reed-Solomon code - $f(n) \leq e^{1-R}$.

We can write now

$$N' = \sum_{i=t-\tau}^{t+\tau} A_i\, U(t,\tau|i) \quad \text{if } \tau < d/2;$$

$$N' \leq \sum_{i=t-\tau}^{t+\tau} A_i\, U(t,\tau|i) \quad \text{if } \tau \geq d/2;$$

$$N'' \leq \sum_{i=d}^{2t} A_i\, U(t,t|i)$$

$$P'(t) \leq \sum_{i=t-\tau}^{t+\tau} A_i \frac{U(t,\tau|i)}{U_t}$$

$$P''(t) \leq \sum_{i=d}^{2t} A_i \frac{U(t\,t|i)}{U_t}$$

We will need the following combinatorial lemma

Lemma

$$U_i\, U(j,m|i) = U_j\, U(i,m|j).$$

Now by our lemma we have

$$U(t,\tau|i) = \frac{U_t\, U(i,\tau|t)}{U_i}$$

Utilizing this identity in combination with our estimation for A_i we obtain

$$P'(t) \leq f(n)\, q^{-n(1-R)} \sum_{i=t-\tau}^{t+\tau} U(i,\tau/t)$$

$$P''(t) \leq f(n)\, q^{-n(1-R)} \sum_{i=d}^{2t} U(i,t/t)$$

But it is easy to see that

$$\sum_{i=t-\tau}^{t+\tau} U(i,\tau|t) = V_\tau \ ; \quad \sum_{i=d}^{2t} U(i,t|t) \leq V_t \ .$$

So we get

$$P'(t) \leq f(n)\, q^{-n(1-R)}\, V_\tau$$

$$P''(t) \leq f(n)\, q^{-n(1-R)}\, V_t.$$

Zur Topologie gewichteter induktiver Limiten

Klaus Bierstedt (Paderborn) 16.5.86

Der Vortrag gibt einen Überblick über gemeinsame Untersuchungen mit R. Meise (Düsseldorf), W. H. Summers (Fayetteville, Ark.) und J. Bonet (Valencia). Die gewichteten induktiven Limites von Räumen stetiger und holomorpher Funktionen werden eingeführt, und einige ihrer grundlegenden Eigenschaften werden diskutiert: Für einen lokalkompakten Raum X (bzw. eine offene Teilmenge X von $\mathbb{C}^N$) und eine Gewichtsfunktion v_n auf X sei

$C v_n(X) := \{ f \in C(X) \; ; \; p_{v_n}(f) := \sup_{x \in X} v_n(x) |f(x)| < \infty \}$,

$C(v_n)_0(X) := \{ f \in C(X) ; \; v_n f$ verschwindet im $\infty \} \subset C v_n(X)$

bzw. $H v_n(X) := H(X) \cap C v_n(X)$, $H(v_n)_0(X) := H(X) \cap C(v_n)_0(X)$ — sowie

$\mathcal{V}C(X) := \operatorname{ind}_{n \to} C v_n(X)$, $\mathcal{V}_0 C(X) := \operatorname{ind}_{n \to} C(v_n)_0(X)$, analog $\mathcal{V}H(X)$, $\mathcal{V}_0 H(X)$,

wenn nun $\mathcal{V} = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein fallendes System stetiger strikt positiver Gewichtsfunktionen v_n auf X bezeichnet.

Um die Topologie (und eine Basis der stetigen Halbnormen) zu beschreiben, betrachten wir

$\bar{V} := \{ \bar{v}$ Gewichtsfunktion auf X ; $\forall n \in \mathbb{N} : \sup_{x \in X} \frac{\bar{v}(x)}{v_n(x)} < \infty \}$

und die entsprechenden gewichteten Räume $C\bar{V}(X)$, $C\bar{V}_0(X)$ bzw. $H\bar{V}(X)$, $H\bar{V}_0(X)$.

Ziel des ersten Teiles des Vortrages ist es, die genauen Beziehungen zwischen $\mathcal{V}C(X)$ und $C\bar{V}(X)$, $\mathcal{V}_0 C(X)$ und $C\bar{V}_0(X)$ sowie $\mathcal{V}H(X)$ oder $\mathcal{V}_0 H(X)$ und $H\bar{V}(X)$ oder $H\bar{V}_0(X)$ zu klären.

Das Resultat über holomorphe Funktionen wird an einem Beispiel ($\mathcal{E} = C^\infty(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{E}'_b \to \hat{\mathcal{E}}'_b$) erläutert, und der Zusammenhang mit Ehrenpreis' Theorie „analytisch uniformer Räume" wird diskutiert. Wir weisen auf Ehrenpreis' „Fundamentalprinzip" hin.

Im letzten Teil des Vortrages wird:

(a) bei stetigen Gewichten v_n auf einem lokalkompakten X eine Charakterisierung für die topologische Isomorphie $\mathcal{V}_0 C(X) \cong C\bar{V}_0(X)$

(b) bei diskretem Raum X eine Charakterisierung der topologischen Isomorphie $\mathcal{V}C(X) \cong C\bar{V}(X)$

angegeben. Wir weisen abschließend auf die Bedeutung dieser Charakterisierungen im Zusammenhang mit Kötheschen Folgenräumen (Stufen- und gestuften Räumen) hin.

K. Bierstedt

Symmetrien von Mannigfaltigkeiten

Peter Löffler (Göttingen) 23. 5. 86

Anhand von einigen Beispielen wurde die folgende Vermutung motiviert: Sei M^n eine einfach zusammenhängende geschlossene Mannigfaltigkeit. Dann gibt es für unendlich viele (vielleicht sogar fast alle) Primzahlen p nicht triviale $\mathbb{Z}/p$-Operationen auf M.
Mit Hilfe von Methoden aus der rationalen Homotopietheorie und der Chirurgie kann man den folgenden Satz zeigen (L - Raußen): Sei M^n einfach zusammenhängend. Es gelte

1) $H_*(M; \mathbb{Q}) = 0 \quad * \leq \frac{n}{3}$
2) $\chi(M) = \sigma(M) = 0$
3) eine gewisse Bedingung an die Verteilung der nicht verschwindenden Pontrjaginklassen sei erfüllt (diese gilt sicher dann, wenn alle verschwinden)

Dann gibt es auf M unendlich viele freie $\mathbb{Z}/r$-Operationen für alle r, deren Primteiler eine endliche Menge von Primzahlen vermeiden.

P. Löffler

Extreme points of certain hypergraph classes

May 28, 1986

Gyula O. H. Katona (Budapest)

Let X be a finite set of n elements and $\mathcal{F}$ a family of its subsets. Define p_i as the number of i-element members of $\mathcal{F}$. The vector $(p_0, p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ is called the profile of $\mathcal{F}$. If we consider the class A of all families $\mathcal{F}$ satisfying a certain property (e.g. $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ implies $F_1 \not\subset F_2$), the profiles of the families $\mathcal{F} \in A$ form a set of points in $\mathbb{R}^{n+1}$. The extreme points of the convex hull of this set is determined for several classes A. These results imply several old results determinining $\max |\mathcal{F}|$ in A or inequalities true for A.

Katona Gyula

Stability of compact leaves of foliations

Paul A. Schweitzer s.j. (PUC – Rio de Janeiro) 30.5.86

A compact leaf L_0 of a (C^1-) foliation F_0 of a smooth manifold M is stable if every sufficiently C^1 close foliation F has a compact leaf L near to, and diffeomorphic to, L_0. For example the Reeb stability theorem says that every simply connected compact leaf is stable.

For the case of 1-dimensional leaves, Poincaré defined a "first return map" of a transverse disk to itself (or to a somewhat larger disk) for every leaf that is a circle and if that map has the basepoint x_0 of L_0 as a stable fixed point, then L_0 is stable. In the generalization to higher dimensional leaves, there is a "first return map" called the holonomy associated to every ~~closed~~ homotopy class of closed loops at x_0 in L_0. Hirsch obtained many theorems, using properties of this holonomy homomorphism from the fundamental group $\pi_1(L_0, x_0)$ to the local diffeomorphisms near x_0 on the transverse disk D to conclude that L_0 is stable.

Finally there are fibrations of compact manifolds with the property that every foliation F sufficiently near to the foliation F_0 by the fibers has a compact leaf near to, and diffeomorphic to, one of the fibers. For example, Seifert showed that this holds for every fibration with circle fibers over a closed surface whose Euler characteristic is nonzero, and Kneser showed a similar result for the Klein bottle (fibered over S^1).

Thurston has shown how to relax Reeb's hypothesis that $\pi_1(L_0, x_0)$ is trivial (or finite) to the hypothesis $H_1(L_0; \mathbb{R}) = 0$ (real homology), provided the holonomy of L_0 is linearly trivial, i.e. agrees to first order with the identity diffeomorphism. Using this idea of Thurston and generalizations of due to Langevin and Rosenberg, our goal is to replace hypotheses on $\pi_1(L_0, x_0)$ by analogous hypotheses on $H_1(L_0; \mathbb{R})$ and its holonomy, provided the linear holonomy of L_0 is trivial. We thus obtain generalizations of all the results mentioned above

Paul A. Schweitzer s.j.

Number theory and harmonic analysis — an introduction for non experts

George W. Mackey (Harvard University + MPI Bonn)

JUNE 6, 1986

The purpose of this lecture is two fold (a) To show that a large part of number theory may be looked at as attempts to generalize certain theorems stated by Fermat and proved by Euler (b) To "explain" the pervasive role of harmonic analysis in proving such theorems

Let $Q_a(x,y) = x^2 + ay^2$ where a is a positive integer. Let $\phi_{Q_a}(n)$ denote the number of solutions of the equation $Q_a(x,y) = n$ where x, y and n are all integers and $n > 0$. Given any two complex valued functions defined on the positive integers ϕ_1 and ϕ_2 one may define a possible such function $\phi_1 * \phi_2$ called their multiplicative convolution as follows: $\phi_1 * \phi_2(n) = \sum_{d|n} \phi_1(d)\, \phi_2(\frac{n}{d})$. Moreover a complex valued function defined on the positive integers is said to be multiplicative if $\phi(nm) = \phi(n)\phi(m)$ whenever n and m have no common factor and to be completely multiplicative if $\phi(nm) = \phi(n)\phi(m)$ for all n and m. It is easy to see that $\phi_1 * \phi_2$ is multiplicative whenever ϕ_1 and ϕ_2 are multiplicative but that $\phi_1 * \phi_2$ is not completely multiplicative even if ϕ_1 + ϕ_2 are result,

Using these concepts certain ~~theorems~~ stated by Fermat may be restated as follows.

Theorem 1 – $\phi_{Q_1}(n) = 4(1 * \chi)$ where χ is completely multiplicative.

Theorem 2 – χ is periodic of period 4.

It is clear that these two theorems taken together tell us that a certain "problem function" ϕ_{Q_1}

is equal to a certain "explicit function" $4(1 * \chi)$.
Fermat announced similar results for ϕ_{Q_2} and ϕ_{Q_3} but was puzzled by ϕ_{Q_5}.

A century after Fermat, Euler published the first proofs of these theorems about ϕ_{Q_1}, ϕ_{Q_2} and ϕ_{Q_3} but did not solve the mystery of ϕ_{Q_5}. He found theorem 1 easy but claims that it took him seven years to prove theorem 2 for ϕ_{Q_1}. The mystery of ϕ_{Q_5} began to clear up in 1773 when Lagrange began a systematic study of the general binary quadratic form $Q_{A,B,C}(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$.
A century later it became clear from the work of Dedekind that for $Q_{A,B,C}$ positive definite one can prove that $\phi_{Q_{A,B,C}}(n)$ is a finite linear combination

of multiplicative functions one of which is of the form $1 * \chi$ where χ is periodic & completely ~~The others are of other two~~ multiplicative. The others are of the form $\chi_1 * \chi_2$ where χ_1 and χ_2 are completely multiplicative ~~[illegible]~~ but not in any canonical way. Moreover χ_1 & χ_2 need not be periodic.

The pattern we have just described for ϕ_Q when Q is a positive definite binary quadratic form seems to be a pervasive ~~one~~ in number theory. It applies to ϕ_Q when Q is a positive definite quadratic form in any number of variables and it applies to the functions $\phi_{F,C}(n)$ which count the number of ideals with a given norm n in a given ideal class C of an algebraic number field F. The study of the $\phi_{F,C}(n)$ ~~arose~~ grew out of the study of the "higher reciprocity laws".

begun by Gauss in 1824 and one can regard the reciprocity laws themselves as following from theorems equating the problem function $\sum_c \phi_{F,c}$ to "explicit functions" defined on the positive integers. ~~[illegible]~~ In most cases one does not obtain results as complete as those of Fermat but an amazing amount of number theory can be interpreted as steps along the way.

If one thinks of number theory as consisting largely of finding explicit realizations of number theoretical problem functions such as ϕ_Q, $\phi_{F,C}$ (and several others not mentioned here) ~~[illegible]~~ or of taking steps toward this goal one can understand one use of harmonic analysis as closely analogous to its use in dealing with the linear partial differential equations of classical physics. One performs a suitable "Fourier ~~[illegible]~~ transform" of the problem function ϕ and works with that instead of ϕ. There is however at least one other use. The theorem asserting that the Fourier series of a reasonably regular periodic function converges to the function is a rich source of surprising identities. These include such examples as $\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - - -$. They include also a number of non trivial number theoretical facts such as Gauss' celebrated quadratic reciprocity law. Another such identity is the Jacobi inversion formula $\theta(-\frac{1}{a}) = \sqrt{\frac{a}{i}}\, \theta(a)$ where $\theta(a) = \sum_{k=-\infty} e^{\pi i k^2 a}$

This identity can be transformed to yield the fact that $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi(n)}{n^s}$ (which a priori is only defined for $\mathcal{R}(s)(\sigma)$ sufficiently large) has an analytic continuation to a meromorphic function defined on the whole complex plane and satisfying a certain functional equation ~~[illegible]~~

This is true when Φ is a problem function of the form Φ_Q and by modifications and generalizations of the argument for many other problem functions ~~of the~~ including the $\Phi_{F,C}$

One can think of $\hat{\Phi}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi(n)}{n^s}$ as a multiplicative Fourier transform of Φ. and one can prove theorems of the form $\Phi = \Psi * \Theta$ by exploiting the fact that $\hat{\Phi} = \hat{\Psi}\hat{\Theta}$ together with the fact that $\hat{\Phi}, \hat{\Psi}, \hat{\Theta}$ are almost determined by their zeros & poles. Of course this last fact depends heavily on the fact that $\hat{\Phi}$ $\hat{\Psi}$ & $\hat{\Theta}$ are meromorphic in the whole plane!!

George W Mackey

Rational Points on Hypersurfaces

R. Heath-Brown (Oxford)

Let $f \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ be a form of degree d. When does $f=0$ have a non-trivial integer solution? This question is non-trivial if $d \geq 2$.

There are two obvious conditions which are necessary

C_1 : For any modulus $m \in \mathbb{N}$ one can solve $f(x_1, \ldots x_n) \equiv 0 \pmod m$ with $(m, x_1, \ldots x_n) = 1$.

C_2 : There is a non-trivial real solution of $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Condition C_2 is of course trivial when d is odd. In fact C_1 holds automatically if $d=2$ and $n>4$ or (Demyanov, Lewis) if $d=3$ and $n>9$. Artin's conjecture is that C_1 holds whenever $n>d^2$. There are examples with $n=d^2$ where C_1 fails, for example, one may take $g(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_1 x_2 x_3$ (so that $2 | g \Rightarrow 2 | x_1, x_2, x_3$) and $f = g(x_1, x_2, x_3) + 2g(x_4, x_5, x_6) + 4g(x_7, x_8, x_9)$; then $f \equiv 0 \pmod 8$ only when $2 | x_j \ \forall j$. Unfortunately there are counterexamples to Artin's conjecture, the simplest being for $d=4$ (Terjanian).

When $d=2$, the necessary conditions C_1 & C_2 turn out to be sufficient; this is the Hasse-Minkowski Theorem. When $d=3$ there are examples, such as $3x_1^3 + 4x_2^3 + 5x_3^3$ and $5x_1^3 + 9x_2^3 + 10x_3^3 + 12x_4^3$ in which C_1 (& trivially C_2) hold, but there is no non-trivial solution. No such example with $n=5$ is known so one is led to:

Conjecture 1. If $d=3$ and $n \geq 5$, then C_1 is a sufficient condition for f to have a non-trivial integer zero.

Conjecture 2. If $d=3$ and $n \geq 10$, then f has a non-trivial integer zero.

Birch (1957) proved: $\forall d$ odd, $\exists\, n(d)$ such that f has a non-trivial zero providing only that $n \geq n(d)$.

Unfortunately $n(d)$ is extremely large. For $d=3$ one has:

Theorem (Davenport): One may take $n(3) = 16$.

The geometry of f plays a crucial rôle thus one has:

Theorem (Heath-Brown): Conjecture 2 above holds for non-singular cubic forms.

The proof uses Deligne's bounds for exponential sums, and does not extend to $d \geq 4$.

It would be nice to get decent bounds for $n(5)$. Very recent work of Schmidt goes a long way towards this, but progress is held up by our lack of knowledge about Artin's conjecture. So I end with the question: Does Artin's Conjecture hold for $d=5$?

Roger Heath-Brown

11. 6. 87

Arithmetic of totally real number fields.

Andrew Wiles (Princeton)

In class field theory one tries to describe the abelian extensions of a number field in terms of the original base field. ~~The~~ One way to describe such results is in terms of L-series. The L-series constructed out of ray class groups (i.e. by generalizing Dirichlet's L-functions) are Artin L-series. What then is the analogue for the non-abelian L-functions of Artin? How far does this help us towards a non-abelian class field theory?

Deligne and Serre proved that, starting with a modular form f of weight one and odd determinant which was an ~~eigen~~ newform, then there was a 2-dimensional representation ρ of $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ such that $L(s,f) = L(s,\rho)$. This was part of a programme of Langlands to show that all the $L(s,\rho)$ in fact come as Mellin-transforms of suitable automorphic forms. He later proved this when ρ was 2-dimensional and not of A_5 type (one of the missing cases being completed by Tunnell).

For F totally real there is a natural generalization of the notion of modular form of weight one and it still makes sense for it to be holomorphic. Rogawski and Tunnell proved that for $[F:\mathbb{Q}]$ odd the natural generalization of Deligne-Serre holds. They were not able to prove it in the even degree case because the Deligne-Serre method uses the systems of 2-dimensional l-adic representations associated to f. These are not known to exist if $[F:\mathbb{Q}]$ is even. However I have managed to prove their existence in enough cases to complete the result, and so prove the extension of Deligne-Serre for all totally real F.

This investigation was in fact only a biproduct of a study I have been making of the values $L(0,\chi)$ (for χ 1-dimensional) or more generally $L(1-n,\rho)$ for $n \geq 1$. The hope is to relate these values to the arithmetic invariants of the original field. As an example I cite the theorem that $\# K_2 \mathcal{O}_F = w_2(F)\zeta_F(-1)$ * up to a ~~group~~ factor a power of 2. This was conjectured by Birch and Tate and was proved for $F/\mathbb{Q}$ abelian by Mazur and myself and in general by myself using these new l-adic representations.

* F totally real.

13.6.86

Maaß' waves and its applications

Nicolay Kuznetsov (Khabarovsk), 19.06.86.

Let $L = -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ is Laplace-Beltrami operator and Γ is the full modular group. For this case Maaß's waves are eigenfunctions of L wich are at the same time eigenfunctions of all Hecke's operators T_n, $T_n f = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{\substack{ad=n\\ a>0}}\sum_{b \pmod d} f\left(\frac{az+b}{d}\right)$, if $n \geq 1$ and $(T_{-1}f)(z) = f(-z^*)$ (* complex conjugate). Let $\lambda_0 = 0$, λ_1 $(\cong 91,25\ldots) \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots$ are eigenvalues of L, $Lf_j = \lambda_j f_j$, f_0 is a constant function on H (= upper half plane). Each from f_j, $j \geq 1$, has a Fourier-expansion

$$f_j = \sum_{n\neq 0} \rho_j(n)\, e(nx) \sqrt{y}\, K_{i\varkappa_j}(2\pi|n|y),$$

where $K_{i\varkappa}(y)$ is modified Bessel function ($K_{i\varkappa}(y) = K_{-i\varkappa}(y)$, $K_{i\varkappa}(y) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2y}}\, e^{-y}$ when $y \to +\infty$; it is entire function of $\varkappa$) and $\varkappa_j = \sqrt{\lambda_j - 1/4}$.

For $\rho_j(n)$ we have the explicite form of expression by the sum of Kloostermann's sums. Let us denote $S(m,n;c)$ classical Kloostermann sum: $S(m,n;c) = \sum_{ad\equiv 1 \pmod c} e\left(\frac{na+md}{c}\right)$, $e(x) = e^{2\pi i x}$.

Theorem (N. Kuznetsov, 1977; R. Bruggeman, 1978). If $h(r): \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ is ~~odd~~ even regular function of r (~~with~~) when $|\mathrm{Im}\, r| \leq \Delta$, $\Delta > 1/2$ wich is $\ll |r|^{-2-\varepsilon}$ for some $\varepsilon > 0$ for $|r| \to \infty$ in this strip, then we have

$$\sum_{j\geq 1} \frac{\rho_j(n)\overline{\rho_j(m)}}{\operatorname{ch}\pi\varkappa_j} h(\varkappa_j) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{2ir}(n)\,\sigma_{2ir}(m)}{(nm)^{ir}}\, h(r)\, \frac{dr}{|\zeta(1+2ir)|^2} =$$

$$= \frac{\delta_{n,m}}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} r \operatorname{th}(\pi r)\, h(r)\, dr + \sum_{c\geq 1} \frac{1}{c} S(n,m;c)\, \varphi\left(\frac{4\pi\sqrt{nm}}{c}\right),$$

where $\zeta(\cdot)$ is Riemann zeta-function, $\sigma_a(n) = \sum_{d|n} d^a$ and for given h for $x>0$ with usual Bessel functions

$$\varphi(x) = \frac{2i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(J_{2ir}(x) - J_{-2ir}(x)\right) \frac{h(r)\, r\, dr}{\operatorname{ch}\pi r}.$$

We can suppose that φ is given; then the sum of Kloostermann's sums is expressing by the Fourier coefficients of non-regular Maass waves and ones of regular forms of odd weights $\kappa \geq 12$. For this case h is given by the transformation

$$h(r) = \frac{i\pi}{2\,\mathrm{sh}\,\pi r} \int_0^\infty \left(J_{2ir}(x) - J_{-2ir}(x)\right) \varphi(x) \frac{dx}{x}.$$

The main open question: what the order of magnitude of $|\rho_j(n)|$ when j is fixed and $n \to \infty$? The Ramanujan-Petersson conjecture is $|\rho_j(n)| \leq |\rho_j(1)| \cdot d(n)$, $d(n) = \sum_{d|n} 1$.

I hope up today that this conjecture is true and (in future) I can prove it.

There are a lot of the applications of Maass' waves, the asymptotic laws for sums $\sum_{n \leq X} d(n) d(n+k)$, $\sum_{n \leq X} d(n^2+k)$ (k is fixed), $\sum_{c \leq X} \frac{1}{c} S(n,m;c)$ (n, m are fixed), Weil asymptotic law

$$\sum_{\varkappa_j \leq X} 1 \sim \frac{X^2}{12} + c_1 X \log X + c_2 X + O\left(\frac{X}{\log X}\right) \quad \text{(Alexej Venkov)},$$

etc. Note the especially Lehmer's conjecture wich was proved in the following general form: if $\mathfrak{M}_\kappa$ is the space of regular cusps of weight κ, $\kappa \geq 12$, $\kappa \neq 14$, then the correspondings Poincare's series are not zero: for all $n \geq 1$ we have

$$P_n(z;\kappa) = \frac{(4\pi n)^{\kappa-1}}{\Gamma(\kappa-1)} \sum_{g \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} j^{-\kappa}(g,z)\, e(ngz), \quad \left(j(g,z) = cz+d \text{ for } g \sim \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix}\right)$$

is not identically zero.

The special case $\kappa = 12$ give: $P_n = \tau(n)\Delta(z)$, $\tau(n)$ is Ramanujan's function; for this reason $\tau(n) \neq 0$ for all $n \geq 1$.

[signature]

Invarian lattices and a setting for the Leech lattice in Lie algebras

A. I. Kostrikin (Moscow University); 19.06.86

The construction of the Leech lattice can be put in a setting which yields even unimodular lattices for all dimensions p^2-1 for p odd prime number (more generally, q^2-1, $q=p^m$. This is an joint work by A.I. Kostrikin, A.I. Bondal, Fam Hieu Tiep. For $p=3$ we derive the root lattice of type E_8 and for $p=5$, the Leech lattice. The new lattices for $p\geq 7$ are not quite investigated.

But our main goal is muct more general one. In a serias of joint papers 1981–1985 by A.I. Kostrikin, I.A. Kostrikin, V.A. Ufnarovsky a construction of orthogonal decompositions of complex simple Lie algebras was investigated. We hope that a unified theory of a broad class of the finite simple groups will now be possible to develop based on integral lattices in Lie algebras.

The problem with which we are going to deal, and which, so far as we know, has not been stated before in full generality, consists in the study of the following qustion

QUESTION: Does a simple complex Lie algebra $\mathcal{L}$ admit a decomposition $\mathcal{L} = H_0 \oplus H_1 \oplus \dots \oplus H_h$ (h is the Coxeter number) into a direct sum of Cartan subalgebras H_i, where the H_i are pairwise orthogonal with respect to the Killing form (1)? (OD)

Theorem 1 The Lie algebras of types A_{p^m-1} (p prime, $m\geq 1$), B_n ($n\geq 3$), C_{2^m}, D_n, G_2, E_6, E_7, E_8 possess an OD

CONJECTURE. Lie algebras of types A_n, $n\neq p^m-1$, C_n, $n\neq 2^m$, admit no OD.

An important role play a groups $\mathcal{J}=\mathrm{Aut}_{OD}(\mathcal{L}) \subset \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathcal{L})$ It is a finite group which stabilizers an orthogonal decomposition (OD) and depends on a given OD strongly.

Taking in one of subalgebras H_0 (with respect to OD) a lattice Λ_0 is isomorphic to the lattice of fundamental weights of the algebra $\mathcal{L}$, and disseminating it by $\mathcal{G}$, we obtain a $\mathcal{G}$-invariant lattice $\Lambda = \bigoplus_{k=0}^{h} \Lambda_k$ with the metric induced by the Killing form on $\mathcal{L}$. The lattice Λ is not interesting in itself from the point of view of automorphisms. But as a rule there exists at least one lattice among the $\mathcal{G}$-invariant sublattices of Λ with a rich automorphism **group**. It happened to be so in cases G_2, E_8, A_2, A_4, ...

So a first problem is a determination up to scalar of all $\mathcal{G}$-invariant sublattices in Λ. It is done completely in the case of A_{p-1} and is under consideration in more general case of types A_{p^m-1} (More exactly, we investigate $\mathcal{G}' = \mathrm{Int}_{OD}(A_{p-1})$ -**invariance**, ignoring $\tau: X \mapsto -{}^tX$). Let Λ' be one of nondivisibe $\mathcal{G}'$-invariant sublattice in Λ

A_{p-1}

$\Lambda' \supset p\Lambda$			$\Lambda' \not\supset p\Lambda$
Γ^W	typ I $\Gamma^{k,l}$ $0 \le k \le l \le p-1$ $k \ne p-1$	typ II $\Delta^{k,r}$ $0 < k < \frac{p-2}{2}$ $r \in \mathbb{F}_p^\times$	$\Gamma^{k,p}$ $1 \le k \le p-2$
The whole number			
1	$\frac{p(p+1)}{2} - 1$	$\frac{(p-1)(p-3)}{2}$	$p-2$

For notation Γ^W, $\Gamma^{k,l}$, Δ^{kr}, $\Gamma^{k,p}$ consult our joint paper.

Th. The lattices $\frac{1}{p}\Gamma^{k,p-k}$ $(1 \le k \le \frac{p-1}{2})$, $\frac{1}{p}\Delta^{k,r}$, $1 \le k \le \frac{p-3}{2}$ $(k \equiv 1 \bmod 2)$ are even and unimodular.

The even unimod. lat $\frac{1}{p}\Delta^{1,r}$ has min vector with square 4.
The lat. $\frac{1}{p}\Gamma^{1,p-1}$ contains the rooth lattice of type A_{p^2-1}, $p>$ and coinsides with E_8, if $p=3$.
Four lattices $\frac{1}{5}\Delta^{1,r}$, $r \in \mathbb{F}_5^*$, $(p=5)$ are isomorphic to the Leech lattice L. So $\mathrm{Aut}\, L = Co$.

TODA FLOWS AND THE QR ALGORITHM

June 20, 1986 B.N. Parlett (Univ. of Calif., Berkeley)

The basic QR algorithm produces a sequence of unitarily similar matrices and so the eigenvalues are preserved. If the initial matrix is symmetric, tridiagonal, with positive off diagonal elements (i.e. a Jacobi matrix) then this form is preserved and the limit matrix is diagonal. If the starting matrix is upper Hessenberg then this form too is preserved and the limit (generically) is upper triangular.

It is quite remarkable that there is a continuous "interpolation" between members of this sequence. In fact the QR sequence is simply a sample, at the natural numbers, of a "flow" in the manifold (or surface) of either Jacobi or Hessenberg matrices. In other words there is a (very complicated) set of ordinary differential equations, one for each nonzero component of the matrix, of first order whose solutions are isospectral and tend to diagonal or triangular form as $t \to \pm\infty$. These QR flows, and other simpler isospectral flows, are instances of integrable Hamiltonian systems. Toda flows were among the first to be shown to be integrable.

References. "Ordinary differential equations and the symmetric eigenvalue problem" by P. Deift, T. Nanda, C. Tomei SIAM J. Numer. Anal. vol. 20 (1983) 1 – 22.

"Differential Equations and the QR algorithm", by T. Nanda, SIAM J. Numer. Anal. vol 22 (1985) 310-321.

"Isospectral Flows" by David Watkins SIAM Review 1984

Untergruppenverbände endlicher auflösbarer Gruppen

Roland Schmidt (Kiel)

Nachdem Suzuki und Zappa (unabhängig voneinander) im Jahre 1951 bewiesen haben, daß die Klasse $\mathfrak{S}$ der endlichen auflösbaren Gruppen invariant unter Projektivitäten ist, liegen die folgenden Fragen nahe:

(I) Welche Klassen auflösbarer Gruppen sind ebenfalls invariant unter Projektivitäten?

(II) Für welche Klassen $\mathfrak{K}$ kann man sogar verbandstheoretische Charakterisierungen finden?

(III) Wenn $\mathfrak{K}$ vernünftige Vererbungseigenschaften hat, dann kann man auf geeignete Weise zu $\mathfrak{K}$ assoziierte Untergruppen $U(G,\mathfrak{K})$ in jeder auflösbaren Gruppe G definieren (etwa $\mathfrak{K}$-Residuum, $\mathfrak{K}$-Radikal, $\mathfrak{K}$-Projektoren, $\mathfrak{K}$-Injektoren, ...). Für welche Klassen $\mathfrak{K}$ ist $U(G,\mathfrak{K})^{\varphi} = U(\bar{G},\mathfrak{K})$ für jede Projektivität φ von G auf $\bar{G}$?

(IV) Für welche Klassen $\mathfrak{K}$ kann man verbandstheoretische Charakterisierungen solcher $\mathfrak{K}$-Untergruppen finden?

Wir behandeln eine Reihe von Antworten auf diese Fragen speziell für lokal definierte Formationen sowie Fittingklassen.

Zu (I): Für jede Primzahl p sei $\mathfrak{F}(p)$ eine Klasse auflösbarer Gruppen mit (1) $\mathfrak{Z}_p \subseteq \mathfrak{F}(p)$, wobei $\mathfrak{Z}_p = \{C_q \mid q \in \mathbb{P}, q \mid p-1\} \cup \{1\}$ und
(2) Ist $X \in \mathfrak{F}(p) \setminus \mathfrak{Z}_p$ mit $Z(X)$ zyklisch und $\mathcal{L}(Y) \simeq \mathcal{L}(X)$, so ist $Y \in \mathfrak{F}(p)$.

Dann ist die durch die $\mathfrak{F}(p)$ lokal definierte Formation $\mathfrak{F}$ invariant unter Projektivitäten. Als Anwendung ergibt sich, daß die Klassen $\mathfrak{N}^k$ $(k \geq 2)$ und $\mathfrak{N}^k\mathfrak{A}$ $(k \geq 1)$ invariant unter Projektivitäten sind

Zu (II): Die Klassen $\mathfrak{S}_k$ der auflösbaren Gruppen vom Rang $\leq k$ sind verbandstheoretisch charakterisiert als die Gruppen mit poly-k-modularem Untergruppenverband. Ein allgemeiner Satz – wie zu (I) – ist mir nicht bekannt; auch eine verbandstheoretische Charakterisierung von $\mathfrak{N}^k$ und $\mathfrak{N}^k\mathfrak{A}$, speziell $\mathfrak{N}^2$ und $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$, wäre sehr interessant.

Zu (III): Sei $\mathfrak{F}$ lokal definierte Formation durch Klassen $\mathfrak{F}(p)$ mit $\mathfrak{J}(p) \subseteq \mathfrak{F}(p)$. Ist $\mathfrak{F}$ invariant unter Projektivitäten, so ist $(G^{\mathfrak{F}})^{\varphi} = \bar{G}^{\mathfrak{F}}$ für jede Projektivitätsabb. φ von G auf $\bar{G}$. Ähnliche Sätze gelten für $\mathfrak{F}$-Projektoren gesättigte Formationen sowie Radikal und Injektoren von Fittingklassen.

Zu (IV): Ist $\mathfrak{F}$ verbandstheoretisch charakterisierte Formation (mit einer technischen Zusatzeigenschaft), so lassen sich auch $G^{\mathfrak{F}}$ und $\mathfrak{F}$-Projektoren verbandstheoretisch charakterisieren.

(27.6.86)

Roland Schmidt

p-adische L-Funktionen für algebraische Varietäten

P. Schneider (Köln) 11.7.86

Zu jeder glatten projektiven Varietät $X_{/\mathbb{Q}}$ hat man ihre l-adischen Cohomologiegruppen $H^*(\bar{X}, \mathbb{Q}_l)$; einerseits sind diese natürlich isomorph zu der gewöhnlichen singulären Cohomologie von $X(\mathbb{C})$ mit $\mathbb{Q}_l$-Koeffizienten, spiegeln also topologische Invarianten wieder, andererseits sind sie in natürlicher Weise Moduln unter der absoluten Galoisgruppe $G_{\mathbb{Q}}$, enthalten also arithmetische Information über X. Aus den charakteristischen Polynomen der Frobeniuselemente in $G_{\mathbb{Q}}$ bildet man nun Eulerprodukte – die komplexen L-Funktionen $L(H^i(X), s)$, welche für $Re(s) \gg 0$ konvergieren. In gewissem Sinne enthalten diese L-Funktionen die Information über die Arithmetik von X über den verschiedenen Komplettierungen von $\mathbb{Q}$. Man macht nun aber an Beispielen die Beobachtung, daß die Werte von $L(H^i(X), s)$ an ganzzahligen Stellen $s = n$ Information über die globale Arithmetik von $X_{/\mathbb{Q}}$ enthalten. Um dieses Phänomen besser zu verstehen, führt man das Konzept der p-adischen L-Funktion ein, welche in gewisser Weise als "globales" charakteristisches Polynom gewisser Cohomologiegruppen definiert ist; ihre Werte stehen also per Konstruktion in Zusammenhang mit der globalen Arithmetik von $X_{/\mathbb{Q}}$. Allerdings sind p-adische L-Funktionen eben Funktionen einer p-adischen Variablen, so daß es keinen naiven Zusammenhang mit den komplexen L-Funktionen geben kann. Nichtsdestotrotz scheinen beide an ganzzahligen Argumentstellen die gleichen Werte anzunehmen. Für den einfachsten Fall $X = Spec(\mathbb{Q})$ ist dies ein sehr tiefliegendes Theorem von Mazur/Wiles, im Allgemeinen hat man damit voll eine Art p-adisches Analogon zur Langlands-Philosophie zu sehen. Als Motivation lohnt es sich den Funktionenkörperfall zu betrachten, wo die Konzepte der komplexen und der p-adischen L-Funktionen in gewisser Weise zusammenfallen, und man in der Tat die gewünschte Interpretation der Werte erhält.

P. Schneider

Abschätzungen für Projektionskonstanten

Hermann König (Kiel) 18.7.86

Die Projektionskonstante $\lambda(X_k)$ eines k-dimensionalen Raumes X_k,
$\lambda(X_k) = \inf\{\, \|P\| \mid X_k \subset l_\infty,\ P: l_\infty \to X_k \subset l_\infty$ stetige lineare Projektion $\}$,
ist nach Kadets stets durch $\sqrt{k}$ beschränkt. Die Optimalität dieser Abschätzung ist Gegenstand des Vortrags. Es zeigt sich nämlich (für $k \geq 2$), daß es $0 < \varepsilon_k < 1/\sqrt{k}$ gibt, so daß für alle k-dimensionalen normierten Räume X_k gilt: $\lambda(X_k) \leq \sqrt{k} - \varepsilon_k$. Falls X_k in einem n-dimensionalen Raum Y_n liegt (mit $k < n$), gilt genauer $\lambda(X_k, Y_n) \leq \sqrt{k}\left(1 - \frac{(\sqrt{k}-1)^2}{n}\right)$ für die relative Projektionskonstante von X_k in Y_n. Die Untersuchung der Optimalität dieser Abschätzung, d.h. die Konstruktion von Räumen mit sehr großer Projektionskonstante, führt auf ein kombinatorisches Problem: Gibt es n Vektoren x_i der Länge 1 im $\mathbb{R}^k$ oder $\mathbb{C}^k$, so daß diese miteinander gleichwinklige Linien bilden, d.h. daß $|(x_i, x_j)| = \text{konst}$ $(i \neq j)$? Insbesondere ist dies interessant für $n \gtrsim k^{3/2}$ bzw. k^2 im Reellen bzw. Komplexen: in diesem Fall lassen sich Vektoren dieser Art (fast) angeben. Insbesondere wird ein k-dimensionaler Teilraum des $l_\infty^{k^2}(\mathbb{C})$ konstruiert mit $\lambda(X_k) = \sqrt{k} - \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k}$; im Reellen existiert X_k mit $\lambda(X_k) \geq \sqrt{k} - 1$. Hier bestehen Zusammenhänge mit endlichen projektiven Geometrien (Arbeiten von Lemmens-Seidel).

Hermann König

Topologische Fragen der Bewertungstheorie 17.10.86

K sei ein nicht notw. komm. Körper. Ein Teilring B von K heißt ein Bewertungsring, wenn $a \in K \setminus B$ stets $a^{-1} \in B$ impliziert. B heißt invariant, wenn außerdem $aBa^{-1} = B$ für alle $a \in K^{\times}$ gilt. Jedem Bewertungsring läßt sich eine Bewertung zuordnen, wenn man den allgemeinen Bewertungsbegriff von F. Radó zugrunde legt. Ist der Bewertungsring invariant, so erhält man Schillingsche Bewertungen.

Führt man in üblicher Weise eine Bewertungstopologie auf dem Körper ein, so braucht diese im allgemeinen Fall keine V-Topologie zu sein. Es wird ein Satz angegeben, der durch mehrere gleichwertige Bedingungen den Fall beschreibt, wann eine V-Topologie vorliegt. Ferner wird ein Beispiel beschrieben, in dem eine Bewertung keine V-Topologie induziert.

Bei der Diskussion des Approximationssatzes zeigt sich, daß man in dem betrachteten allgemeinen Fall mehrere Unabhängigkeitsbegriffe für Bewertungen zu unterscheiden hat.

Karl Mathiak
Braunschweig

Polynomial Invariants of Quivers

Lieven Le Bruyn (Antwerp) 24.10.'86

Let Q be an arbitrary quiver on n vertices and $\alpha \in \mathbb{N}_+^n$. We are interested in the variety parametrizing isoclasses of semisimple representations of dimension α of Q. By Mumfords theory, the coordinate ring of this variety is the ring of invariants of $\mathbb{C}[x_{ij}(\varphi) : 1 \le i \le \alpha(t\varphi), 1 \le j \le \alpha(h\varphi), \varphi \text{ arrow}]$

where $\overset{t\varphi}{\circ}\xrightarrow{\varphi}\overset{h\varphi}{\circ}$ under the natural action of the group $GL(\alpha) = GL_{\alpha(1)}(\mathbb{C}) \times \dots \times GL_{\alpha(n)}(\mathbb{C})$. The first thing we show is that this invariant ring is generated by traces of oriented cycles in the quiver.

Since the corresponding variety, say V_α, parametrizes semisimple representation we can associate to each point ξ its "type" say $(e_1, \alpha_1; \dots; e_l, \alpha_l)$ where we mean that a representant of ξ is build from l distinct simple representations V_i of dimension vector α_i and occuring with multiplicity e_i. In order to compute all possible types we have to know what the dimension vectors of simples are. We gave a purely combinatorial description of them in terms of the form $R = (\delta_{ij} - r_{ij})_{i,j}$ where $r_{ij} = \# \{ \varphi : \underset{i}{\circ}\xrightarrow{\varphi}\underset{j}{\circ} \}$.

Given a possible type τ we can look at the subset V_α^τ of V_α consisting of all points of type τ. Applying a result of D. Luna we show that $\{ V_\alpha^\tau : \tau \}$ is a finite stratification of V_α by locally closed irreducible smooth subvarieties.

Next, we study the local structure of V_α in a point of type $\tau = (e_1, \alpha_1; \dots; e_l, \alpha_l)$. Construct a new quiver Q_τ on l vertices s.t. there are $1 - R(\alpha_i, \alpha_i)$ loops in vertex i and there are $R(\alpha_i, \alpha_j)$ arrows from i to j. We show that the analytic structure of V_α near ξ is the same as that of the variety of semisimple representation of Q_τ of dimensionvector $(e_1, \dots, e_l)$ near the origin.

The generic type τ_g is the one s.t. $V_\alpha^{\tau_g}$ contains an open set of V_α. It can be calculated purely combinatorially. If $\tau_g = (e_1, \alpha_1; \dots; e_l, \alpha_l)$ then the dimension of V_α is equal to $\sum e_i(1 - R(\alpha_i, \alpha_i))$. Moreover, if each $\alpha(i)$ is "sufficiently large" one can show that the singular locus of V_α is precisely $V_\alpha - V_\alpha^{\tau_g}$.

We end with a question: suppose α is the dimensionvector of a simple representation of Q, is V_α rational? This would have several pleasant consequences. For example for the quiver & this would imply Merkurjev-Suslin, would prove the rationality of the moduli space of stable rank n vectorbundles over $\mathbb{P}_2$ with Chern-classes $(0, n)$ and would prove the rationality of the variety described by couples $(Y, \mathcal{L})$ where Y is a smooth plane curve of degree n and $\mathcal{L} \in Jac(Y)$.

Die konforme Struktur Riemann'scher Flächen mit Rand, die eine Minimalfläche uniformisieren.

Sei $\mathfrak{X}$ eine Minimalfläche in $\mathbb{R}^3$ mit Rand $\partial\mathfrak{X}=\Gamma$, Γ eine Jordankurve. $\mathfrak{X}$ ist uniformisierbar, ex. Riem. Fläche R, ex $F \subset R$ mit Rand ∂F, ex. $h: F \to \mathfrak{X}$,
(*) $\Delta h \equiv 0$, $h: \partial F \to \Gamma$ monoton.
Wie ändern sich F und R, wenn Γ "verwackelt" wird.
Ist das Plateauproblem (*) korrekt "stellbar"? Ja, durch Verwackeln von ∂F in R. Denn:
Es gibt in $Emb^0(S^1, R)$ nahe $\omega_0: S^1 \to \partial F$ eine Umf $\mathcal{K}(F)$, lokal, der Kodimension $6g-3$ von Randkurven α, die ein F_α berandet, das zu F konf. äquivalent ist.
Jeder transversale Schnitt $\Omega \pitchfork \mathcal{K}(F)$ durch ω_0 ist ein Modell für alle Klassen von konformen Strukturen auf $|F|=F$, in der Nähe von F. Der Beweis ist i.W. die Berechnung des Index von (*) für den Bildraum R (statt $\mathbb{R}^3$).
Eigentlich sollte schon M. Atiyah diesen Index zu berechnen gewusst haben; die Argumente sind elementar.

R. Böhme

(31.10.86) (Bochum)

Algorithmische Methoden für nichtkommutative Polynomideale 14.11.86

Für kommutative Polynomideale hat die Buchberger'sche Methode der Gröbner Basen einen wichtigen Beitrag zur algorithmischen Lösung grundlegender Fragen geliefert. In allgemeinen nichtkommutativen Polynomringen stößt diese Methode, wie auch jede andere, auf prinzipielle Schranken. Polynomringe von auflösbarem Typ stehen zwischen diesen beiden Fällen: Ihre Elemente sind kommutative Polynome aber die Multiplikation ist nichtkommutativ. Sie tauchen in vielen mathematischen Zusammenhängen auf (Einhüllende von Lie Algebren, Ore Erweiterungen, Weyl Algebren). Für diese Ringe läßt sich die Gröbner Basis Methode in vollem Umfang durchführen.

Volker Weispfenning (Heidelberg).

Algebraische Methoden in der Kombinatorik und einige Anwendungen

Peter Kleinschmidt (Passau) 21.11.86

Let $\mathcal{C}$ be a simplicial complex with a given dimension and number of 0-dimensional cells. We indicate how upper bounds for the number f_i of i-dimensional cells of $\mathcal{C}$ can be obtained if $\mathcal{C}$ is (i) shellable or (ii) has a special local structure. For shellable $\mathcal{C}$ we study its Stanley-Reisner ring $A_{\mathcal{C}}$ and present an explicit basis for $A_{\mathcal{C}}$ as a $k[\Theta_1,\dots,\Theta_d]$-module where $\Theta_1,\dots,\Theta_d$ is a system of parameters. This proves that $A_{\mathcal{C}}$ is Cohen-Macaulay and allows an approach due to Stanley to prove upper bounds for the f_i. An application of the explicit basis to a representation of spaces of continuous Spline-polynomials is presented. This approach is due to Billera.

For complexes with prescribed local structure we use the theory of toric varieties to deduce the corresponding bounds for the f_i. This proves upper bounds for the face numbers of unbounded polyhedra as well. The free bases of the rings A_e as $k[\theta_1, \dots, \theta_d]$-modules are interpreted as subvarieties of a certain toric variety X. These subvarieties generate $H^*(X, \mathbb{Q})$.

Peter Kleinschmidt

Number Theory, Automorphic Representations and Base Change.

James Arthur (Toronto), 28.11.86

Suppose that

$$r : Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$$

is a (continuous) representation of the Galois group. The Frobenius elements provide a family

$$\{\Phi_p(r) : p \notin S\}$$

of conjugacy classes in $GL(n, \mathbb{C})$, one for almost every prime. Suppose that

$$\pi = \pi_{\mathbb{R}} \otimes \pi_2 \otimes \pi_3 \otimes \pi_5 \otimes \dots$$

is an irreducible automorphic representation of

$$GL(n, \mathbb{A}) = GL(n, \mathbb{R}) \otimes GL(n, \mathbb{Q}_2) \otimes \dots$$

Then for almost all p, π_p is an unramified principal series. Again one obtains a family

$$\{\Phi_p(\pi) : p \notin S\}$$

of conjugacy classes in $GL(n, \mathbb{C})$, one for almost every prime.

<u>Conjecture</u>: (Langlands) For every r there is a π (essentially unique) such that

$$\Phi_p(\pi) = \Phi_p(r)$$

for almost every p.

Langlands actually formulated this conjecture in greater generality. In particular, it was stated with $\mathbb{Q}$ replaced by an arbitrary number field F. Langlands has proved the conjecture for $n = 2$ and for solvable Galois groups. He did so by first establishing base change for $GL(2)$, extending work of Saito-Shintani. Base change is an operation on automorphic representations that is the analogue of restricting Galois representations to normal subgroups of cyclic quotient.

<u>Theorem</u> (Arthur-Clozel): (a) Base change is valid for automorphic representations of $GL(n)$

(b) The conjecture is true for any n whenever the Galois group is <u>nilpotent</u> (i.e. the image of r in $GL(n, \mathbb{C})$ is nilpotent.)

James Arthur

Zur Konstruktion von Gröbner-Basen

Hans Michael Möller (Hagen) 5.12.86

Gröbner-Basen für Ideale aus $K[x_1, \dots, x_n]$, K ein Körper, sind ein praktisches Hilfsmittel für die Lösung vieler Probleme aus verschiedenen Gebieten der Mathematik, z.B. der kommutativen Algebra, der Geometrie, der numerischen Mathematik, wie an Beispielen gezeigt wurde. Zur Berechnung von Gröbner-Basen wird im allgemeinen Buchbergers Algorithmus herangezogen, der in einigen Computer-Algebra-Systemen installiert ist. Entscheidend für die Komplexität dieses Algorithmus sind einige schon von Buchberger angegebene Kriterien, die hier neu interpretiert werden als Ent=

decken von redundanten Syzygien in der Basis eines Syzygienmoduls. Das Verfahren, von Gebauer und dem Verf. 1986 entwickelt, zur Konstruktion einer minimalen Basis des Syzygienmoduls führt zu einer äußerst effektiven Variante des Buchberger-Algorithmus, die jetzt in den Computer-Algebra-Systemen SCRATCHPAD II und REDUCE installiert ist.

H. Michael Möller

Transzendenzeigenschaften rationaler Integrale

Viele in der "Natur" vorkommende transzendente Zahlen lassen sich als rationale Integrale auf algebraischen Mannigfaltigkeiten schreiben. Zum Beispiel gilt

$$\pi = \int_{|z|=1} \frac{dz}{2iz}, \quad \log \alpha = \int_1^\alpha \frac{dz}{z} \quad \text{etc.}$$

Es liegt daher nahe, solche rationalen Integrale systematisch zu studieren und in möglichst allgemeinster Weise Aussagen über Transzendenzeigenschaften zu gewinnen. Für Integrale über geschlossene 1-Formen ist dies gelungen. Im Mittelpunkt steht der folgende Satz über algebraische Gruppen, in dem G eine kommutative algebraische Gruppe bezeichne, $A = \exp_G(\mathfrak{a})$ eine analytische Untergruppe mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Lie}\, G$ eine über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierte Unter-Liealgebra.

Satz. Gilt $A(\overline{\mathbb{Q}}) := A(\mathbb{C}) \cap G(\overline{\mathbb{Q}}) \neq 0$, so gibt es eine algebraische Untergruppe $H \subseteq G$ mit:
(i) $\dim H > 0$, (ii) H ist über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert, (iii) $H \subseteq A$.
Gibt es umgekehrt eine solche Untergruppe H, so ist $A(\overline{\mathbb{Q}}) \neq 0$.

Aus diesem Satz kann man zum Beispiel ableiten, daß Perioden rationaler Integrale entweder Null oder transzendent sind.

G. Wüstholz

(Univ. Wuppertal + MPI Bo…

Exponentialsummen und die Riemann'sche Zetafunktion

Martin Huxley (Cardiff) 19-12-86

Die neue von Bombieri und Iwaniec eingeführte Exponentialsummen=
=methode ist beim Verfasser und dem Studenten Watt etwas kürzer geworden. Sie besteht aus sechs Stufen:

1) Annäherung einer transzendenten Funktion auf kurzen Intervallen durch ein Polynom dritten Grades aus $\mathbb{Q}[x]$.
2) Gauss'sche Summen (die bei kleinem Nenner genügen.)
3) Poisson'sche Summenformel.
4) Das grosse Sieb (selbstdual formuliert)
5) Dreihälbige Potenzen ganzer Zahlen
6) Benachbarte Punkten in einer $\subseteq \mathbb{R}^4/\mathbb{Z}^3$ Punktmenge den Annäherungspolynomen grossen Nenner entsprechend.

Die 5 hat Watt aus der Geometrie geregelten Flächen gebracht. Die 6 könnten Bombieri und Iwaniec nur beim Logarithmus machen. Wir können aber was Neues für beliebigen Funktionen. Dann steht nicht nur

$$\zeta(\tfrac{1}{2}+it) = O\left(t^{9/56}(\log t)^{A}\right)$$

sondern auch bessere Exponenten bei verschiedenen Problemen der analytischen Zahlentheorie.

Martin Huxley