Refinements of the Bruhat Decomposition

Let G be a connected reductive algebraic group over an algebraically closed field K. Some problems in algebraic geometry connected with G arise from the representation theory of reductive groups over finite fields. One such problem is discussed in this lecture. Assume that K is the algebraic closure of a finite field $\mathbb{F}_q$, and that G has a rational structure with Frobenius map $F: G \to G$ such that the group of fixed points G^F is finite. Let $T \subset B$ be an F-stable maximal torus contained in an F-stable Borel subgroup B. Let $N = N_G(T)$, and $W = N/T$ the Weyl group of G. (Assume we are in the split case so F acts trivially on W). Then G^F has a BN-pair with Borel subgroup B^F and Weyl group W. The resulting Bruhat decomposition of G^F is

$$G^F = \bigcup_{w \in W} B^F \dot{w} B^F \qquad (\dot{w} \in N \to w \in W).$$

The Hecke algebra (or Iwahori algebra) $\mathcal{H}(G^F, B^F)$ is the algebra ~~set~~ of functions $f: G^F \to \mathbb{C}$ constant on double cosets, and is isomorphic to $\mathrm{End}_{\mathbb{C}G}((1_{B^F})^{G^F})^{\circ}$. The standard basis $\{b_w\}_{w \in W}$ of $\mathcal{H}(G^F, B^F)$ consists of the characteristic functions on the (B^F, B^F)-double cosets. Their structure constants are polynomials in q. In fact, for w, w', w'', Kawanaka proved that $[b_w b_{w'} : b_{w''}] = \sum_{\tau} q^{a(\tau)}(q-1)^{b(\tau)}$, where $\{\tau\}$ is a set of subexpressions of a fixed reduced expression of w, and $a(\tau), b(\tau)$ are nonnegative integers determined by τ.

The main result is a geometric interpretation of Kawanaka's formula for an arbitrary reductive group G, with Borel subgp B, maximal torus $T \subset B$, Weyl group W. For $w, w', w'' \in W$ let $U(w, w', w'') = \{ u \in U_w : u\dot{w}B \cap w'' U_{w'^{-1}}(w')^{-1} \neq \emptyset \}$ where U_w is the usual cross section of BwB/B. Then

$$U(w, w', w'') = \dot{\bigcup_{\tau}} U_{\tau}$$

over the same sequences as above, and each U_τ is a locally closed subvariety of U_w isomorphic as an algebraic variety to $K_+^{a(t)} \times (K^*)^{b(t)}$. In case K is the algebraic closure of $\mathbb{F}_q$, $|\mathcal{U}(w, w', w'')^F|$ is the structure constant $[b_w b_{w'} : b_{w''}]$. A rational version of the preceding theorem can also be applied to determine the multiplication in the Hecke algebra of a Gelfand-Graev representation of G^F.

Charles W. Curtis, University of Oregon
9 January 1987.

Hyperbolische Coxeter-Gruppen

Eine hyperbolische Coxeter-Gruppe Γ ist eine diskrete, von den Spiegelungen an endlich vielen Hyperebenen des hyperbolischen Raumes H^n erzeugte Gruppe.
Zu Γ gehört ein Fundamentalpolyeder P in H^n, ein Polyeder dessen Diederwinkel alle von der Form $\frac{\pi}{p}$, $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ sind. Im Gegensatz zu den sphärischen (= endlichen) und den euklidischen Coxeter-Gruppe sind die hyperbolischen Coxeter-Gruppen bei weitem nicht klassifiziert.
Einige Teilklassen von Fundamentalpolyedern werden vorgestellt, sowie Methoden zur Konstruktion weiterer einzelner Beispiele von hyperbolischen Coxeter-Gruppen
Hyperbolische Coxeter-Gruppen mit kompaktem P sind bekannt für $n \leq 7$, mit nicht-kompaktem P endlichen Volumens für $n \leq 19$.
Andererseits gibt es keine hyperbolischen Coxeter-Gruppen
- mit kompakten P für $n \geq 30$ (Vinberg)
- mit nichtkompaktem P endlichen Volumens für $n \geq 996$ (Chovanskii / Prochorov).

16. Januar 1987 Hans-Christoph Im Hof, Basel

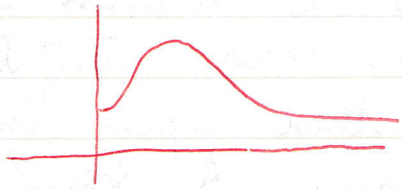
21.1.1987

Autocatalysis, pattern formation and antidiffusion

There are many phenomena in nature, economics, physics, chemistry, geology which have a clear autocatalytic component in the sense that small disturbances tend to get larger and larger. Examples are 'ghetto formation', 'leaf venation', 'neural pathways', 'Liesegang rings' (maybe), 'road systems', 'river basin'.
At the same time these phenomena seem to exhibit pattern formation properties. Now it is well known that reaction-diffusion systems can generate patterns. However for many of the phenomena listed above only one substance is involved. And the question arises whether patterns can be generated by 'one substance equations'. This leads also via a scaling limit of a river basin model proposed by Thom to the study and simulation of equations like

$$u_t = -\varphi(u)_{xx} + \gamma u_{xxxx} \quad , \quad \gamma \text{ small and } > 0$$

where φ is a function like



This talk reports on numerical and analytic investigations for these equations and applications to Liesegang rings, spinoidal decompositions

Michiel Hazewinkel, CWI

Nilpotent orbits and their applications in representation theory.

Let $\mathfrak{g}$ be a semisimple Lie algebra over $\mathbb{C}$ and G be the adjoint group of $\mathfrak{g}$. The nilpotent elements of $\mathfrak{g}$ fall into finitely many G-orbits. The nilpotent orbits were first classified by Dynkin and an alternative description of these orbits in terms of parabolic subgroups of G was given by Bala and Carter. There is a 1-1 correspondence between nilpotent orbits of G on $\mathfrak{g}$ and conjugacy classes of unipotent elements of G.

In recent years the theory of nilpotent orbits has been shown to be relevant to several apparently unrelated areas of representation theory. For example:

Every irreducible representation of the Weyl group W determines a nilpotent orbit of $\mathfrak{g}$. (T.A. Springer)

Every primitive ideal in the enveloping algebra of $\mathfrak{g}$ determines a nilpotent orbit of $\mathfrak{g}$. (A. Joseph, W. Borho).

Every irreducible representation (over $\mathbb{C}$) of a finite Chevalley group determines a nilpotent orbit of $\mathfrak{g}$. (G. Lusztig).

Every representation of the p-Lie algebra corresponding to $\mathfrak{g}$ determines a nilpotent orbit of $\mathfrak{g}$. (at least in certain cases. J.C. Jantzen).

The relation between these topics in representation theory is discussed. A special role is played by the so-called 'special nilpotent orbits'. Although no simple definition of a special orbit seems to be known, the special orbits have useful properties which the set of all nilpotent orbits does not have. For example the special orbits admit an order-reversing involution. The special orbits are in 1-1 correspondence with the 2-sided cells of the Weyl group.

Every primitive ideal with trivial central character determines a special nilpotent orbit, and every unipotent character of a finite Chevalley group does also.

Thus there is an intriguing similarity

between the theory of primitive ideals and the character theory of finite Chevalley groups.

R. W. Carter 23 January 1987.

Warwick University.

Weak Permutability Between Groups – Finiteness Criteria and Representations

Saïd Sidki (Brasília, Aachen) Jan. 30, 1987

The degree and type of interaction between finite groups within a larger group that we study is exemplified by the following result

Theorem (J. of Alg. 1980) Let H and K be finite groups of equal order n & $\gamma: H \to K$ a bijection s.t. $\gamma(e) = e$. Suppose H and K are subgroups of some group G (not necessarily finite) s.t.

$$HK \cap KH \supseteq \{ h\gamma(h) \mid h \in H \}.$$

Then,

$$\langle H, K \rangle \text{ is a finite group of order } \leq e^{n-1} \cdot n.$$

In a search for a more general statement involving a system of subgroups we define the class

$$Y(m,n) = \{ a_i \ (1 \leq i \leq m) \mid a_i^n = e \ (1 \leq i \leq m),$$
$$(a_i^k a_j^k)^2 = e \quad (1 \leq i < j \leq m, \quad 1 \leq k \leq \tfrac{n}{2}) \}$$

Computer and representation theory evidence is presented for the finiteness of such groups and for their type.

It is an old result of Carmichael that $Y(m,3) \cong Alt(m+2)$. From certain representations of $Y(m,n)$ for n odd & $m \geq 3$, we know that $Y(m,n)$ has images $\Omega^{\pm}(m+1, F)$ for $m \equiv \pm 1 \pmod{4}$, $\Omega(m+1, F)$ for $m \equiv 0 \pmod{4}$

and $F^n \Omega^{\pm}(m, F)$ for $m \equiv 2 \pmod{4}$, for certain appropriate finite fields of characteristic 2, and Witt index.

Saad Adki

Identifikation parabolischer Systeme

Sei G eine Gruppe, p eine Primzahl und $S \in Syl_p(G)$. Sei weiter $B = N_G(S)$ und $\mathcal{M}(p) = \{ U \mid U \leq G,\ B < U,\ B$ ist in genau einer maximalen Untergruppe von $U \}$. Eine minimale Menge von Gruppen aus $\mathcal{M}(p)$, die G erzeugen, nennen wir ein minimales parabolisches System $\{P_1, \ldots, P_n\}$. Ein solches System heißt klassisch, falls $P_i / O_p(P_i)$ eine Rang 1 Liegruppe und $\langle P_i, P_j \rangle / O_p(\langle P_i, P_j \rangle)$ eine Rang 2 Liegruppe für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ ist. Nachdem in den letzten Jahren die Klassifikation der klassischen parabolischen Systeme (d.h. Bestimmung der exakten Struktur der P_i) gelungen ist, ergibt sich nun die Frage, ob es auch möglich ist, die dazugehörigen Gruppen zu bestimmen. An zwei Beispielen $U_3(5)$ und McL, wird gezeigt, wie so etwas gehen könnte.

Es gibt aber Fälle, in denen die Gruppe nicht durch ihr parabolisches System bestimmt ist, da es z.B. zu gegebenen parabolischen System unendlich viele Gruppen gibt. Um diese zu unterscheiden wird der Begriff eines allg. Apartments (Weylgruppe) eingeführt. Für die Gruppe M_{24} wird eine solche Weylgruppe angegeben. Ist N der Stabilisator eines Apt. so ist $BNB = G$ äquivalent dazu, daß je zwei Kammern in einem Apt. liegen. Es wird ~~dadurch~~ die Frage aufgeworfen, ob dies dazu äquivalent ist, daß G eine Gruppe vom Lie-typ ist.

Helmut Voelklein? (Berlin-FU)

6.2.87

Nichtstandardanalysis in der topologischen Algebra-
Variationen über ein klassisches Thema.

Es soll gezeigt werden, daß Nichtstandardanalysis in der Theorie der topologischen Ringe und Körper ein geeignetes Werkzeug ist, um topologische Eigenschaften zu algebraisieren. Dadurch werden Beweise intuitiver und aussagekräftiger. Nach einer kurzen Einführung in die Nichtstandardanalysis sollen Strukturaussagen mit den neuen Methoden formuliert werden. Als Beispiele werden einige Sätze über V-topologische Körper und lokalkompakte Ringe mit den o. a. Methoden bewiesen. Zum Schluß soll an dem Beispiel der feinsten Ringtopologie, die ~~feiner~~ gröber ist als ein beliebiger Filter von Mengen, die alle die 0 enthalten, gezeigt werden, wo die Grenzen dieser Methoden liegen.

6. Februar 1987 Klaus Potthoff, Kiel

Geometrische Invarianten von Gruppen

Der Vortrag sollte einen Überblick über die Anwendungen der Invarianten, welche R. Bieri (Frankfurt), W.D. Neumann (Ohio), B. Renz (Frankfurt) und R. Strebel (Zürich) eingeführt und untersucht haben, geben und die Zusammenhänge mit Gebieten außerhalb der Gruppentheorie andeuten.

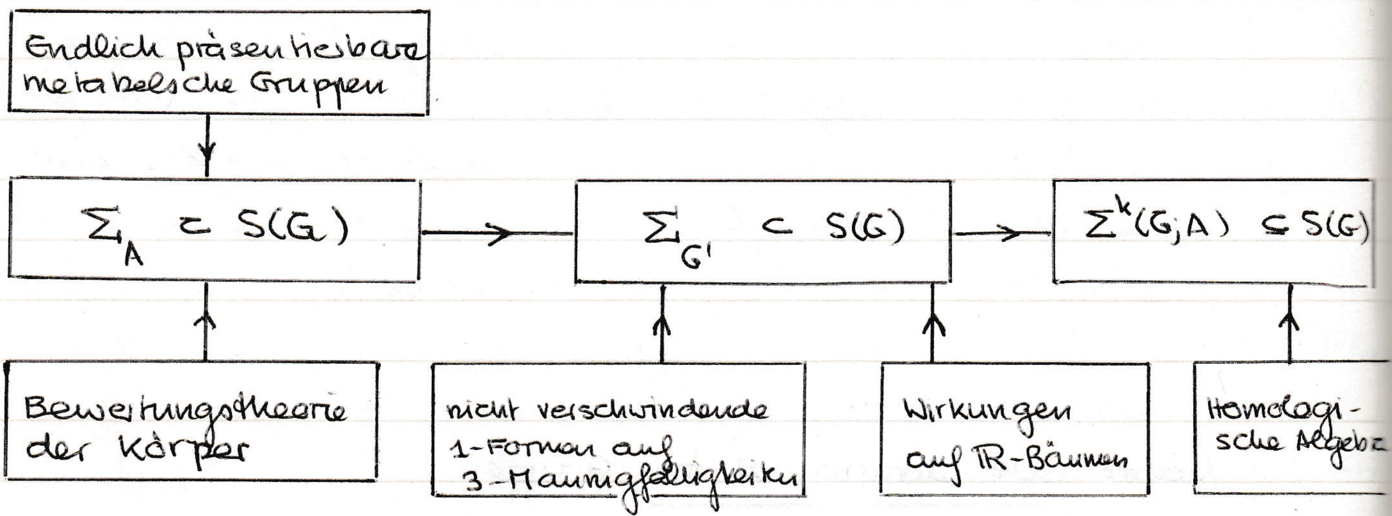
In allen Fällen betrachtet man eine endlich erzeugbare Gruppe G und ordnet ihr eine Sphäre S(G), welche eine Schar von Monoiden parametrisiert, zu. Die Invarianten sind stets Teilmengen der Sphäre S(G), und bestehen aus denjenigen Punkten, für welche das zugehörige Monoid eine für die Invariante charakteristische Eigenschaft hat; im Falle der Invariante $\Sigma_{G'}$ sehen die Definitionen so aus:

$$S(G) = (\mathrm{Hom}(G,\mathbb{R}) \setminus \{0\})/\mathbb{R}^{\times}_{>0} \cong S^{rg(G_{ab})-1} \qquad \text{Sphäre}$$

$$G_\chi = \{ g \in G \mid \chi(g) \geq 0 \} \qquad \text{Monoid}$$

$$\Sigma_{G'} = \{ [\chi] = [\lambda\chi \mid 0 < \lambda \in \mathbb{R}] \mid [G,G] = G' \text{ endlich erzeugbar über endlich erzeugbarem Teilmonoid von } G_\chi \}$$

Eine Übersicht über die Zusammenhänge vermittelt das nachfolgende Diagramm:



9. Februar 1987 R. Strebel

Gruppen mit parabolischen Systemen

Sei G eine Gruppe mit Untergruppen $S, X_1, \ldots, X_n$ und folgenden Eigenschaften: (i) $G = \langle X_1, \ldots, X_n \rangle$

(ii) $S \leq \bigcap_{i=1}^{n} X_i$ ist endliche p-Gruppe,

(iii) $O^{p'}(X_i/O_p(X_i))$ ist zentrale Erweiterung einer Rang 1-Lie Typ Gruppe in Char p

(iv) $O^{p'}(\langle X_i, X_j\rangle / O_p(\langle X_i, X_j\rangle))$ ist zentrale Erweiterung einer Rang 2-Lie Typ Gruppe in Charakteristik p

(v) $S \in Syl_p(\langle X_i, X_j\rangle)$ für alle $i,j \leq n$

Dann heißt $(S, X_1, \dots, X_n)$ ein starkes parabolisches System in G, falls für $O^{p'}(\langle X_i, X_j\rangle / O_p(\langle X_i, X_j\rangle))$ ein Produkt von Rang-1-Lie-Typ Gruppen dieses Produkt stets ein direktes zentrales Produkt ist.
Es heißt parabolisches System, falls dieses Produkt zentral ist oder isomorph zu $(Z_3 \times Z_3)Z_2 \subseteq L_2(2) \times L_2(2)$ oder $(2^2 \times 2^2)3 \subseteq L_2(3) \times L_2(3)$.

<u>Satz</u> (Niles, Timmesfeld, Stellmacher, Stroth, M.) Sei G eine Gruppe mit starkem parabolischen System (irreduziblem Typ) in Char p. Dann ist $O^{p'}(G/O_p(G))$ zentrale Erweiterung einer endlichen einf. Gruppe von Lie-Typ in Char p oder das zugehörige Diagramm ist oder über $GF(2)$, und das (starke) parabol. System ist wohlbestimmt.

<u>Satz</u> Sei G eine Grp mit parabol. System (irred. Typ) in Char p, so ist $O^{p'}(G/O_p(G))$ zentrale Erweiterung einer endlichen einfachen Gruppe von Lie-Typ in Char p oder das zugehörige Diagramm ist , , , , , , , , über $GF(2)$, über $GF(3)$ oder ein kompletter bipartiter Graph mit lauter Doppel- oder Dreifachbindungen über $GF(2)$ oder $GF(3)$ und die parabol. Systeme sind eindeutig bestimmt.

<u>Satz</u> Ist G kammertransitive Automorphismengrp eines klassischen Tits-Kammersystems mit endlichem Kammerstabilisator, so besitzt G ein parabol. System oder das zugehörige Diagramm ist über $GF(7)$, über $GF(5)$, ein kompletter Graph über $GF(2)$ oder $GF(8)$ oder ein Stern mit lauter Doppelbindungen über $GF(3)$.

Beweise: Timmesfeld, Stroth, M.

Beispiele sind jeweils bekannt: endliche; bei affinen Diagrammen auch mitunter die (klassischen) universellen Überlagerungen.

11.2.87

Th. Meixner, Gießen

Varianten der Calderón-Zygmund-Theorie

Der Vortrag beschäftigt sich mit einer Übertragung des Hörmandersatzes für Fouriermultiplikatoren in M^p, $1<p<\infty$, die es gestattet von „lokalen" Beschränktheitseigenschaften auf globale zu schließen: Genauer: Falls für alle $k\in\mathbb{Z}$ die Funktion $\varphi(\frac{\cdot}{2^k})m$ (für eine C_0^∞-Funktion mit Träger in $\{|x|\in(\frac{1}{2},2)\}$) in M^p liegt, so ~~gilt~~ möchte man schließen, daß unter geeigneten Zusatzannahmen bereits m in M_p ist. Es gilt

Satz 1. Sei $\sup_{t>0}\|\varphi m(t\cdot)\|_{M_p}\le A$, $\sup_{t>0}\|\mathcal{F}^{-1}[\varphi m(t\cdot)]\|_{L^1((1+|x|)^\varepsilon dx)}\le B$ (für ein $\varepsilon>0$), so ist $m\in M_p$ mit Norm $\|m\|_{M_p}\le c\,A\log(2+\frac{B}{A})$.

Korollar: Falls $\sup_{t>0}\|\varphi m(t\cdot)\|_{\Lambda_\varepsilon}+\|\varphi m(t\cdot)\|_{M_p}<\infty$ (Λ_ε Lipschitzraum) so folgt $m\in M_r$, $p<r<p'$.

Diese Ergebnisse sind teilweise auch von A. Carbery erzielt worden.

Anwendungen dieses Satzes betreffen hingegen über diskrete (Bochner-Riesz) [illegible]

Der Beweis besteht in einer geeigneten Kombination von ~~Methoden~~ Technik der Calderón-Zygmund-Theorie mit Anwendung von Littlewood-Paley-Abschätzungen. Es existieren Versionen im Rahmen der Eigenfunktionen-entwicklungen von elliptischen ΨDO's auf kompakten Mannigfaltigkeiten. Eine Übertragung des Marcinkiewicz-Kriterium in $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ (die Multiplikatorkriterien sind invariant bez. einer zweiparametrigen Dilatationsgruppe) ist möglich, mit einem viel komplizierteren Beweis. Analoge Sätze in Produkträumen $\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}\times\mathbb{R}^{n_3}\times\dots$ (mit mehr als 3 Faktoren) sind noch unbekannt.

A. Seeger 13.2.8[illegible]

Anwendungen von Summierbarkeitseigenschaften in der Fourieranalysis

Es werden Riesz- und absolute Riesz-Summierbarkeit des Fourierumkehrintegrals betrachtet und aus diesen Eigenschaften hinreichende Kriterien für radiale Fouriermultiplikatoren und den ihnen zugeordneten Maximalfunktionen gezogen (das gleiche Programm kann auch bei Entwicklungen nach "spherical harmonics", Jacobi-, Laguerre-, Hermite Polynomen, usf. diskutiert werden.). Seien

$$R_\lambda(f;x;t) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(1-\frac{|\xi|}{t}\right)_+^\lambda f^\wedge(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi$$

die Rieszmittel des Fourierumkehrintegrals. Unter gewissen Voraussetzungen an λ und p gilt (vgl. Arbeiten von Carleson & Sjölin, C. Fefferman, Stein, Tomas)

$(\ast)$ $$\|R_\lambda(f;t)\|_p \le C_p \|f\|_p .$$

<u>Folg. 1:</u> Falls $(\ast)$ gilt für ein $\lambda \ge 0$ und $m: [0,\infty) \to \mathbb{C}$ genügend glatt mit $\lim_{t\to\infty} m(t) + \int_0^\infty t^\lambda |m^{(\lambda+1)}(t)|\, dt = A < \infty$, so gilt

$$\|\mathcal{F}^{-1}[m(|\xi|) f^\wedge]\|_p \le C A \|f\|_p .$$

Sei $$g_\lambda(f;x) = \left(\int_0^\infty |R_\lambda(f;x;t) - R_{\lambda-1}(f;x;t)|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2}.$$

Nach Ergebnissen von Igari & Kuratsubo, Christ, Seeger gilt für gewisse p und $\lambda > 1/2$

$(\ast\ast)$ $$\|g_\lambda(f)\|_p \le C \|f\|_p , \quad 1<p<\infty.$$

<u>Folg. 2:</u> Falls $(\ast\ast)$ für ein $\lambda > 1/2$ gilt, ϕ eine "bump function" auf $\mathbb{R}^+$ ist, so folgt

$$\|\mathcal{F}^{-1}[m(|\xi|) f^\wedge]\|_p \le C \sup_{t>0} t^{\lambda-1/2} \left\| \left(\phi\left(\tfrac{\cdot}{t}\right) m(\cdot)\right)^{(\lambda)} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \|f\|_p$$

(Carbery & Gasper & Trebels)

<u>Folg. 3:</u> Falls $(\ast\ast)$ für ein $\lambda > 1/2$ gilt, so folgt

$$\|M_m f\|_p \le C \left\{ \int_0^\infty t^{\lambda-1} |m^{(\lambda)}(t)|\, dt + \left(\int_0^\infty |t^\lambda m^{(\lambda)}(t)|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2} \right\} \|f\|_p ,$$

wobei $$M_m f(x) = \sup_{t>0} |\mathcal{F}^{-1}[m(t|\xi|) f^\wedge](x)|$$

(Carbery, Dappa & Trebels)

Beim Beweis dieser Folgerungen und Varianten hiervon wird wesentlich folgender Spezialfall des Subordinationsprinzips benutzt

$$m(|\xi|) = C \int_0^\infty \left(1-\frac{|\xi|}{t}\right)_+^\lambda t^\lambda m^{(\lambda+1)}(t)\, dt .$$

14. Febr. 1987 W. Trebels / Darmstadt

"Konjugationsklassen in Kac-Moody-Gruppen"

Kac-Moody-Gruppen sind Verallgemeinerungen halbeinfacher algebraischer Gruppen, die sich sogenannten verallgemeinerten Cartan-Matrizen $A \in M_\ell(\mathbb{Z})$ zuordnen lassen ($A_{ii} = 2$, $A_{ij} \leq 0$ $i \neq j$, $A_{ij} = 0 \Leftrightarrow A_{ji} = 0$). In früheren Arbeiten habe ich in der Folge von Brieskorn den Zusammenhang einfacher algebraischer Gruppen mit den sogenannten einfachen Singularitäten untersucht. Dabei spielt der adjungierte Quotient

$$\chi : G \to T/W$$

einer solchen Gruppe eine wesentliche Rolle. Motiviert durch das Studium komplizierterer Singularitäten ($T_{p,q,r}$-Diagramme) wurde ich zur Konstruktion eines "adjungierten Quotienten"

$$\chi : G \to \hat{T}/W$$

für Kac-Moody-Gruppen geführt. Hier ist $\hat{T}$ eine Toruseinbettung eines maximalen Torus T von G, die durch den assoziierten Tits-Kegel bestimmt wird. Die Definition von χ selbst benötigt Fixpunkteigenschaften der G-Aktion auf dem Tits-Gebäude I von G. Die Fasern von χ, die Vereinigungen von Konjugationsklassen sind, lassen sich teilweise mittels einer proalgebraischen Jordanzerlegung analysieren. Vermutlich läßt sich auch eine partielle charaktertheoretische Definition von χ geben. Eine von mir in diesem Zusammenhang aufgestellte "stabilitätstheoretische" (i.S. Mumfords) Vermutung ist kürzlich von Kac-Peterson bewiesen worden.

Peter Slodowy, 24.4.87
(Liverpool)

Geschichte und gegenwärtigen Stand des M. Rieszchen Satzes über Konjugierte Fouriersche Reihen

Für $f \in L_1(-\pi,\pi)$ ist die Fourier-Transformierte $\hat{f}$ bekanntlich definiert durch

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\exp(-int)\,dt \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

Ein berühmter Satz von Marcel Riesz besagt daß für $f \in L_p(-\pi,\pi)$ mit $1<p<\infty$, die Funktion

$$g(n) = -i\,\operatorname{sgn}(n)\hat{f}(n) \qquad n \in \mathbb{Z}$$

ebenfalls die Fourier-Transformierte einer Funktion $\tilde{f} \in L_p(-\pi,\pi)$ ist:

$$g = \hat{\tilde{f}}.$$

Nachträglich hat man die Ungleichung

$$\|\tilde{f}\|_p \le M_p \|f\|_p,$$

wobei

$$M_p = \tan\left(\tfrac{1}{2}\tfrac{\pi}{p}\right) \text{ für } 1<p\le 2, \quad M_p = \operatorname{ctn}\left(\tfrac{1}{2}\tfrac{\pi}{p}\right) \text{ für } 2\le p<\infty.$$

Einem klassischen Satz von Привалов nach, kann man $\tilde{f}$ explizit berechnen:

$$\tilde{f}(t) = \lim_{r\uparrow 1}\left[-i\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} r^{|\nu|}\operatorname{sgn}(\nu)\hat{f}(\nu)\exp(i\nu t)\right] \qquad \text{f.ü.}$$

Bochner (1939) hat die erste Aussage auf alle kompakten abelschen Gruppen verallgemeinert, wobei Helson das Resultat als eine Aussage über kompakte abelschen Gruppen mit geordneter Dualgruppe interpretiert hat. In den letzten Jahren haben Asmar, Hewitt, und Ritter beide Teile des Satzes für beliebige lokalkompakte abelsche Gruppen mit einer Haar-meßbaren Ordnung in der Dualgruppe bewiesen.

Edwin Hewitt Bielefeld den 28.04.87.

Algebraische Gruppen mit Involutionen.

Es sei G eine zusammenhängende reduktive lineare algebraische Gruppe über $\mathbb{C}$ (oder allgemeiner ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $p \neq 2$), und θ eine Involution (= Automorphismus der Ordnung 2 von G.
Im Vortrag wurde eine Übersicht gegeben von einigen rezenten Ergebnissen in dieser Situation. Folgende Themen wurden besprochen (sehr kurz):
(a) die anisotropen Tori in G in Bezug auf θ;
(b) die Beschreibung der Bahnen der Fixpunktgruppe G^θ in der Fahnenmannigfaltigkeit von G;
(c) Kompaktifizierung des homogenen Raumes G/G^θ.

(8.5.87) T.A. Springer (Utrecht).

Ebene Transformationen

B. H. NEUMANN (Australian National University, and Commonwealth Scientific and Industrial Research Organization, Division of Mathematics and Statistics, Canberra, Australien)

Ausgehend von den zweidimensionalen Analogen der Schwimmoberflächen von Charles DUPIN (~1820) wird für das Äussere eines ebenen Bereichs mit stetig positiv drehender Tangente des Randes eine flächentreue Transformation definiert, indem jedem Punkt P der Punkt TP zugeordnet ist, der auf der positiven Tangente von P an den Rand des Bereichs liegt, und zwar als Spiegelbild von P im Berührungspunkt der Tangente. Das führt zu mehreren ungelösten Fragen, z. B. ob der Orbit $\{\ldots, T^{-1}P, P, TP, T^2P, \ldots\}$ sich ins Unendliche erstrecken kann, und ob es invariante Jordankurven gibt. Gewisse Verallgemeinerungen der oben beschriebenen Transformation führen auch zu derlei Fragen.

Computerexperimente mit solchen Transformationen deuten an, dass der Orbit eines Punktes chaotisch sein kann, was mit neueren Ergebnissen über dynamische Systeme durchaus verträglich wäre.

1987-05-15. B. H. Neumann

Distribution of Weil-Deligne numbers

R.W.K. ODONI
(University of Exeter, England).

(22/5/87)

Let $n \in \mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} ; n > 0\}$. An algebraic integer α is called a *Weil-Deligne n-number* (written $\alpha \in W(n)$) if none of its conjugates is real, while $|\alpha^\sigma|^2 = n$ for all $\sigma \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{C}$.

Examples — classical *Gauss-* and *Jacobi sums* (and their generalisations by Lamprecht), "*Galois*" *Gauss sums* (occurring in the functional equations of Artin L-functions, and first properly defined by Fröhlich), and, most significantly, *eigenvalues* of the (induced) *Frobenius* morphisms on (étale) cohomology of varieties over finite fields. Honda (1968) proved the astounding theorem that for given $j \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ prime, every $\alpha \in W(p^j)$ occurs as such a Frobenius eigenvalue for some *abelian* variety over $\overline{\mathbb{F}}_p$. In my lecture I considered what can be said about the fields $\mathbb{Q}(\alpha)$, where $\alpha \in W(p^j)$. It is easily shown that such $\mathbb{Q}(\alpha)$ must be CM fields. Now define $W^*(p^j) = \{\alpha \in W(p^j) ; p \text{ unramified in } \mathbb{Q}(\alpha)\}$. In joint work with my student Tony Greaves I have obtained the following theorems:

THEOREM 1. Let K be a given CM field and let $j \in \mathbb{N}$ be given. Let $\hat{K}$ be the Galois hull of K over $\mathbb{Q}$, and let $H(\hat{K})$ be its Hilbert classfield. Suppose that p and q are primes in $\mathbb{N}$, unramified in K, and that p and q determine the same Frobenius class in $\mathrm{Gal}\, H(\hat{K})/\mathbb{Q}$. Then if we can find an $\alpha \in W^*(p^j)$ such that $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ we can also find a $\beta \in W^*(q^j)$ such that $K = \mathbb{Q}(\beta)$. □

(H.W. Lenstra jr. has recently simplified our proof of this theorem).

It follows that there is a family $\{\mathcal{C}_\gamma\}_{\gamma \in \Delta(K,j)}$ of conjugacy classes in $\mathrm{Gal}\, H(\hat{K})/\mathbb{Q}$ such that $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ for some $\alpha \in W^*(p^j)$ if and only if $\mathrm{Frob}(p)$ is one of the $\mathcal{C}_\gamma$. Unfortunately there is nothing in Theorem 1 to prevent $\Delta(K,j)$ being empty. However, by applying some combinatorics in groups containing a central involution, we have obtained precise necessary and sufficient conditions for $\Delta(K,j)$ to be empty. Namely we have :—

THEOREM 2. (i) If $j \geq 2$ then $\Delta(K, j) \neq \emptyset$ for all CM fields K;

(ii) If $j = 1$ and K is CM, but not biquadratic over $\mathbb{Q}$, then $\Delta(K, 1) \neq \emptyset$;

(iii) Let K be CM biquadratic, and let its quadratic subfields be $\mathbb{Q}(\sqrt{+a})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-b})$ and $\mathbb{Q}(\sqrt{-c})$, where $a, b, c \in \mathbb{N}$ are squarefree $(a \geq 2)$. Then $\Delta(K, 1) = \emptyset$ if and only if $(a, b) > 2$ and $(a, c) > 2$. □

By means of Čebotarev's density theorem, and my method of Frobenian functions, one can then obtain the following asymptotic expansions:

(1) $\# \{ p \text{ prime in } \mathbb{Z},\ 2 \leq p \leq x\ ;\ K = \mathbb{Q}(\alpha) \text{ for some } \alpha \in W(p^j) \}$

$$= \delta_{K,j} \cdot \int_2^x \frac{dt}{\log t} + O(x e^{-c\sqrt{\log x}})$$

where $\delta_{K,j}$ is the proportion of $\mathrm{Gal}\, H(\hat{K})/\mathbb{Q}$ occupied by $\bigcup_{\gamma \in \Delta(K,j)} \mathcal{C}_\gamma$

(and, if $\delta_{K,j} = 0$, the right hand side of (1) is $\equiv 0$);

(2) $\# \{ n \in \mathbb{N},\ n \leq x,\ K = \mathbb{Q}(\alpha) \text{ for some } \alpha \in W(n) \}$

$$= A(K, j)\, x (\log x)^{\partial - 1} \left\{ 1 + O\left(\frac{\log \log x}{\log x} \right) \right\},$$

where $A > 0$ and ∂ is the Dirichlet density of primes p in $\mathbb{Z}$ for which $(p) = \varpi^{1+\tau}$ is soluble in K with ϖ integral (τ = complex conjugation). Full details will appear in a forthcoming pair of papers.

RWK Odoni 22/5/87

How do you find a Galois group?

William M. Kantor (U. of Oregon) 5/29/87

Given $f \in \mathbb{Z}[x]$, how do you efficiently find its Galois group $G = \mathrm{Gal}(f)$? Efficiency is measured in terms of the input length of f: the total number of digits required to write f (0 terms included). Thus, this length $> n := \deg f$. Since a splitting field for f will, in general, have exponential degree $|\mathrm{Gal}(f)|$ over $\mathbb{Q}$, it follows that a (basis for a) splitting field cannot be written down efficiently. Standard methods for computing G depend on having a splitting field, or having all elements (or even, all subgroups) of S_n available.

This lecture concerned polynomial-time Galois theory: algorithms for studying $G = \mathrm{Gal}(f)$ that run in time polynomial in the input length of f for all $f \in \mathbb{Z}[x]$. These depend in part on orbit-length computations, obtained by means of the polynomial-time factorization algorithm of Lenstra-Lenstra-Lovász. Primitive permutation groups play a crucial role: if f is irreducible, adjoin <u>one</u> root α of f to obtain $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}[x]/(f)$, and then a chain of subfields $\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_r = \mathbb{Q}(\alpha)$ can be found with each K_i maximal in the next. It follows easily that the solvability of f can be decided in polynomial time (Landau-Miller).

Using detailed information about all finite simple groups, E. Luks and I proved the following. Assume that $G = \mathrm{Gal}(f)$ acts primitively on the roots of f (a polynomial-time testable property). Then, in polynomial time, one can decide whether or not $S \trianglelefteq G \leq \mathrm{Aut}\, S$ for some finite simple group S; and, if so, name S. This and related results were described in the lecture, including our efforts to decide whether or not $S = G$. The emphasis was on the fact that little is known concerning the question in the title.

William M. Kantor

Überdeckungen topologischer Räume durch einfachere Teilräume (Variationen über Ljusternik – Schnirelman)

Dieter Puppe (Universität Heidelberg) 5.6.87

Ljusternik und Schnirelmann haben um 1930 die „Kategorie" cat X eines Raumes X als die kleinste Zahl k definiert, für die es eine Überdeckung von X mit k offenen Teilmengen $X_1, \ldots, X_k$ gibt, so daß alle Inklusionen $X_i \hookrightarrow X$ nullhomotop sind. Später wurde analog die „geometrische Kategorie" gcat X definiert, wobei verlangt wird, daß jedes X_i in sich zusammenziehbar ist. Während cat X eine Invariante des Homotopietyps von X ist, ist gcat X weit davon entfernt. Kürzlich haben Mónica Clapp und Luis Montejano (Mexiko) Räume Q_n konstruiert mit gcat $Q_n \geq n+2$ und gcat$(Q_n \times I) \leq \left[\frac{n}{2}\right] + 3$ für alle n. Dennoch gibt es interessante Zusammenhänge zwischen cat und gcat:

Satz (Clapp-Montejano-P.) Sei X ein p-zusammenhängender CW-Komplex mit cat $X = k$ ($p \geq 1$ oder X kompakt). Dann gibt es einen CW-Komplex X' vom gleichen Homotopietyp wie X und eine Überdeckung von X' mit k Unterkomplexen $X'_1, \ldots, X'_k$, so daß jedes X'_i den Homotopietyp eines CW-Komplexes hat, der außer einer 0-Zelle höchstens in den Dimensionen von $k(p+1)-2$ bis $\dim X - (k-1)(p+1)$ besitzt.

Korollar. Ist $\dim X \leq (2k-1)(p+1)-3$, so ist jedes X'_i zusammenziehbar, also gcat $X' = k$.

Das verschärft einen Satz von T. Ganea (1967), in dem $k+1$ statt $2k-1$ steht.

D. Puppe

Hilbert Satz 90 für Milnor-K_3

(Markus Rost, Regensburg, 12. 6. 1987)

Für eine quadratische Erweiterung $L = F(\sqrt{a})$ mit Galoisgruppe $Gal(L|F) = \{1, \sigma\}$ besagt Hilbert Satz 90 für K_n, daß die Sequenz

$$K_n L \xrightarrow{1-\sigma} K_n L \xrightarrow{N_{L|F}} K_n F$$

exakt ist ($K_n F$ = Milnor's K-Gruppe von F). Hilbert Satz für K_n ist äquivalent * zur vermuteten Beschreibung der 2-Torsion von $K_n F$, nämlich der Exaktheit von

$$K_{n-1} F \xrightarrow{\{-1\}} K_n F \xrightarrow{2} K_n F,$$

zusammen mit der Bijektivität des Galoissymbols

$$h_n : K_n F/2 \longrightarrow H^n(F; \mathbb{Z}/2).$$

Diese Vermutungen sind für $n=2$ (Merkurjev, Suslin 1982) und für $n=3$ (Merkurjev, Suslin – Rost 1986) bewiesen. In beiden Fällen spielt die Untersuchung der Lokalisierungssequenz für Konicen Y eine zentrale Rolle. Hilbert Satz 90 für K_3 ist eine Konsequenz der Exaktheit von

$$K_3 F(Y) \xrightarrow{d} \bigoplus_{v \in Y^{(1)}} K_2 F_v \xrightarrow{N} K_2 F$$

Diese Exaktheit ~~ist~~ erhält man aus der Berechnung coker $d = K_2 D$ (wobei D die zu Y gehörige Quaternionenalgebra bezeichnet), die wesentlich Rehmann's Beschreibung von $K_2 D$ benutzt, und aus der Injektivität der reduzierten Norm $K_2 D \to K_2 F$. Das zweite Resultat beruht auf einer eingehenden Untersuchung der K-Cohomologie gewisser 3-dimensionaler Quadriken, die sich vor allem auf die Berechnung der K-Theorie der Quadriken durch Swan stützt.

M. K

Über ein geometrisches Problem von P. Fermat

O. Neumann (Univ. Jena), 23.6.1987

Das auf Fermat zurückgehende Problem:
Gegeben sind n Punkte $P_1, \dots, P_n$ in einem m-dimensionalen euklidischen Raum E^m; betrachtet wird die Funktion

$$P \in E^m \longmapsto S(P) = \sum_{i=1}^{m} \|PP_i\| ;$$

was läßt sich über die Menge $\mathfrak{M} \subset E^m$ der Punkte, in denen S jeweils ein lokales Minimum annimmt, sagen?
[Es gibt zahlreiche Verallgemeinerungen dieser Frage, s. P. Schreiber: Zur Geschichte des Steiner-Weber-Problems, Wiss. Z. Univ. Greifswald, Math.-naturwiss. Reihe 1986.]
Es gelten die folgenden Behauptungen:
1° Es sei $\overrightarrow{E^m}$ der zugehörige Vektorraum; für alle $v, w \in \overrightarrow{E^m}$ ist die Funktion

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \|v + tw\|$$

konvex ($\Leftarrow$ Cauchysche Ungleichung);
2° die Funktion S ist auf jeder Geraden in E^m konvex;
3° die Menge $\mathfrak{M}$ ist in der konvexen Hülle von $\{P_1, \dots, P_n\}$ enthalten;
4° wenn $P_1, \dots, P_n$ nicht auf einer Geraden liegen, dann besteht die Menge $\mathfrak{M}$ aus genau einem Punkt (den wir als Minimumpunkt M bezeichnen);
5° wenn $P_1, \dots, P_n$ nicht auf einer Geraden liegen, dann gilt für M:

$$M \notin \{P_1, \dots, P_n\} \iff \sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{MP_i}}{\|MP_i\|} = \vec{0}$$

$$\text{o.B.d.A. } M = P_1 \iff \left\| \sum_{i=2}^{n} \frac{\overrightarrow{MP_i}}{\|MP_i\|} \right\| \leq 1$$

sind alle Fasern $S^{-1}(c)$ mit $c > S(M)$ sind homöomorph zu S^{n-1}, und ihr Inneres ist konvex.
Es wurden die Fälle $n=3$, $n=4$ diskutiert und damit anscheinend alle bisher bekannten Tatsachen methodisch einheitlich abgeleitet (die Aussagen 4° und 5° für $S^{-1}(c)$ sind in der Literatur anscheinend nicht zu finden). Es wurde darauf hingewiesen, daß für $n \geqq 5$ nichts Weiteres bekannt ist, insbesondere über die Galoisgruppe der Galoisschen Hülle der Koordinaten von M.

Bericht über
R. Zerck: Homologie proendlicher Gruppen, Schurmultiplikator und maximale p-Erweiterungen algebraischer Zahlkörper. Dissertation Univ. Jena 1986.
(O. Neumann, Univ. Jena 24.6.87)
Es werden Ansätze und Ergebnisse von J. Neukirch, L.V. Kuzmin, K. Wingberg, H. Koch, O. Neumann u.a. weitergeführt (und z.T. korrigiert) und insbesondere auf 2-Erweiterungen (die in manchem schwieriger als p-Erweit. mit $p \neq 2$ sind) ausgedehnt.
Satz. Wenn für den endlichen Zahlkörper k die maximale nur in den Teilern von 2 verzweigte 2-Erweiterung K im Kreisteilungskörper $\bigcup_{i \geqq 2} k(\zeta_{2^i})$ enthalten ist und wenn $\widetilde{k(2)}$ die maximale 2-Erweiterung von k bezeichnet, dann ist

$$Gal(\widetilde{k(2)}/K) = (\ast\, \tilde{G}_{\mathfrak{q}}) \ast (\underset{\mathfrak{v}}{\ast}\, H_{\mathfrak{v}})$$

dabei durchläuft $\mathfrak{q}$ die endlichen nicht über 2 gelegenen Primstellen von K, mit $\tilde{G}_{\mathfrak{q}}$ ist irgendeine ausgewählte Zerlegungsgruppe bezeichnet, $\mathfrak{v}$ durchläuft alle archimedischen Primstellen von k, $H_{\mathfrak{v}}$ bezeichnet die von allen Zerlegungsgruppen der über $\mathfrak{v}$ gelegenen Primstellen von K erzeugte Untergruppe.
(→ Korrektur d. Behaupt. v. K. Wingberg in J. Crelle 341.)

Eigenwerte des Laplace-Operators für hyperbolische Mannigfaltigkeiten

(Fritz Grunewald, Bonn)

Sei $\mathbb{H}^n$ der n-dimensionale hyperbolische Raum und $\mathrm{Iso}(\mathbb{H}^n)$ seine Isometriegruppe. $\Gamma \leq \mathrm{Iso}(\mathbb{H}^n)$ sei eine diskontinuierlich operierende Gruppe, die auch noch endliches Covolumen hat. Der Laplace-Operator Δ von $\mathbb{H}^n$ operiert dann als selbstadjungierter, negativer Operator auf $L^2(\Gamma \backslash \mathbb{H}^n)$. In meinem Vortrag habe ich das diskrete Spektrum von $-\Delta$ diskutiert, insbesondere wurde folgender Satz diskutiert: Ist Γ eine nicht kokompakte Kongruenzuntergruppe von $\mathrm{Iso}(\mathbb{H}^n)$, dann ist der kleinste Eigenwert $\neq 0$ von $-\Delta$ größer als $\frac{1}{4}(2n-3)$ wenn $n \geq 3$.

Hier handelt es sich um eine Verallgemeinerung von Argumenten von Selberg im Falle $n = 2$.

Fritz Grunewald (26.6.87)

The Symbolic-Numeric Interface

(Hans van Hulzen, Enschede, Netherlands)

Problem solving in science and engineering is often a two stage process. First the problem is modelles mathematically and derived symbolically to produce a set of formulae, which describe a numerical solution method for the problem. Then the numerical computations are performed, leading to a, hopefully reliable, solution of the given problem.
A computer algebra system, such as REDUCE, can assist in performing the first step. But to be able to carry out the second step, for instance using FORTRAN, the relevant REDUCE results

have to be translated into FORTRAN. This interfacing of symbolic and numeric computations knows a number of aspects, which we intend to discuss in a tutorial manner. Worth mentioning are program generation, code optimization and a priori error analysis.

Hans van Hulzen 1-7-87.

DER BISHOP-STONE-WEIERSTRASS SATZ

Es wird ein Überblick über die Entwicklung von Approximationssätzen gegeben, die im Anschluß an den Satz von Weierstraß (1885) stattgefunden hat. Diese Sätze sind von der folgenden Form: eine Unteralgebra A von C(X) [X kompakt, Hausdorff] die zusätzliche Bedingungen erfüllt, liegt dicht in C(X). Allgemeiner kann man eine sehr nützlich Beschreibung derjenigen Funktionen geben, die zu der abgeschlossenen Hülle von A gehören (Satz von Bishop). Für eine vektorwertige Verallgemeinerung von S. Machado (1977) hat T. Ransford (1984) einen neuen, unglaublich kurzen, aber immer noch elementaren Beweis gefunden, dessen Einzelheiten vorgeführt werden.

R. B. Burckel 3. 7. 87

Dreiteilig: (i) Unterscheidende Beispiele zwischen Exaktheit u. Normalität für punktierte Kategorien; (ii) die alte Isbell'sche Bemerkung über skeletare strikt-associative kartesische Kategorien; (iii) Malcev-Operationen (u.s.w.) für Heyting'sche Algebren, u.a.

— Fred E. J. Linton 06.07.1987

Funktionentheorie und Platonische Körper

ein Bericht in moderner Terminologie über die Arbeit von H. A. Schwarz im 75. Band des Crelleschen Journals (1872): Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Funktion ihres vierten Elementes darstellt: Ausgangspunkt ist die hypergeometrische Differentialgleichung

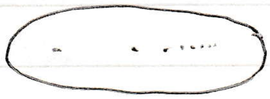
$$y'' + \frac{\gamma-(\alpha+\beta-1)x}{x(x-1)}\, y' - \frac{\alpha\beta}{x(1-x)}\, y = 0, \qquad \alpha,\beta,\gamma \text{ reell.}$$

Sie besitzt ~~ein~~ zwei auf der oberen Halbebene definierte linear unabhängige Lösungen y_1, y_2. Der Quotient $s = \frac{y_2}{y_1}$ kann auf $\mathbb{R}$ stetig fortgesetzt werden, wenn man Σ = Riemannsche Zahlenkugel als Wertemenge nimmt. Die Intervalle $]-\infty,0[$, $]0,1[$ und $]1,\infty[$ werden durch s auf die Teilbögen von drei Kreisen K_1, K_∞ und K_0 abgebildet. Die analytische Fortsetzung $\tilde{s}$ von s lebt auf einer Riemannschen Fläche M, die aus Dreiecken zusammengesetzt ist, und zwar je ein Dreieck für jedes Element der Gruppe $\hat{G}$, die von den Spiegelungen an K_1, K_∞ und K_0 erzeugt wird. s ist genau dann eine algebraische Funktion, wenn M endlich blättrig, d.h. $\hat{G}$ endlich ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn K_1, K_∞ und K_0 Großkreise der Riemannschen Zahlenkugel sind, welche durch drei Ebenen E_1, E_∞ und E_0 des $\mathbb{R}^3$ ausgeschnitten werden, die Symmetrieebenen eines Platonischen Körpers sind. Das Polynom $P(s,x)$, welches s als Lösung besitzt, kann aus der Geometrie des Platonischen Körpers und der Lage der Ebenen E_1, E_∞ und E_0 explizit bestimmt werden. Zu jedem Platonischen Körper gehört ein einfachster Fall wo $M = \Sigma$ und $\tilde{s} = id$ ist. Dann ist die Umkehrfunktion von s rational. Im allgemeinen hat M jedoch höheres Geschlecht.

K. Lamotte, Köln, 10. Juli 1987

Some Wild Knots

We define the concept of an infinite braid which has an infinite number of strings each of which is a union of a finite number of line segments. Associated with such a braid σ is an endomorphism $\bar{\sigma}$ of the topologist's free group $\underset{i\geq 1}{T}\langle x_i\rangle$ — the fundamental group of a disc with an infinite number of holes of the form (Griffiths)



.

One can also associate a link with σ which we denote by $L(\sigma)$. The group of this link $L(\sigma)$ is the factor group of $\underset{i\geq 1}{T}\langle x_i\rangle$ modulo the closed normal subgroup generated by all elements of the form

$$x_i^{-1}.(x_i\bar{\sigma}) \quad \text{for } i \geq 1.$$

S. Moran (Canterbury) 17th July 1987

October 23, 1987

Minimal topological groups

L. N. Stojanov
Inst. Math., Sofia, Bulgaria

A Hausdorff topological group G is called minimal if the topology of G is a minimal element in the set of all Hausdorff group topologies on G. Minimal groups have been studied since 1971 (first by R. Stephenson, 1971 and D. Doitchinov - 1972), and till now a lot of results have been obtained.

The aim of this talk is to present some of the results in the theory of minimal groups.

1. General results - Criterions for minimality, minimality of closed subgroups, examples.
2. Precompactness and minimality - Examples of S. Dierolf and U. Schwanengel, unitary groups of Hilbert spaces, precompactness of the minimal abelian groups.
3. Products - Some results of V. Eberhardt, S. Dierolf and U. Schwanengel, quasi-torsion elements of top. groups, A-classes of minimal groups.
4. Open problems.

30.10.87 Rechenverfahren bei polynomialen Gleichungssystemen. (W. Trinks, Univ. Karlsruhe)

Es wird ein Überblick gegeben, mit welchen Methoden man bisher versucht hat, alle Lösungen eines nichtlinearen Gleichungssystems zu finden: (a) Homotopieverfahren, (b) auf dem Abbildungsgrad beruhende Verfahren, (c) Resultanten, (d) Buchberger-Algorithmus. Die Methoden (a), (b) erlauben es nicht, Lösungen mit bestimmten algebraischen Eigenschaften gezielt anzusteuern. (c), (d) leiden unter hohem Rechenaufwand. Wenn man (d) nur teilweise benützt und p-adische Verfahren hinzufügt, kann man selektiv solche Lösungen finden, die über einem Grundkörper niedrigen Grades definiert sind. Das ist der Fall bei den bisherigen Hauptanwendungen: Systemen aus der Konstruktiven Galoistheorie von Matzat.

6. November 1987, Kodierungstheorie und Shimuramannigfaltigkeiten
(Thomas Zink, Bonn)

Es sei $\mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper, $q = p^a$. Ein linearer Code ist ein Teilvektorraum $V \subset \mathbb{F}_q^n$. Die Länge eines Codewortes $(x_1, \dots, x_n) \in V$ ist die Anzahl der von Null verschiedenen x_i. Man nennt $R = \dim V/n$ die Transmissionrate des Codes und $d/n = \delta$ die relative minimale Distanz, wobei d die Länge eines minimalen von Null verschiedenen Wortes ist.

Ein Grundproblem der Kodierungstheorie ist die Frage, welche (R, δ) sich für beliebig großes n durch Code realisieren lassen. Es sind dies genau alle Paare die unterhalb des Graphen einer monoton fallenden Funktion $R = \alpha(\delta)$ liegen. Man sucht Abschätzungen für die Funktion α.

Es sei $X/\mathbb{F}_q$ eine geometrisch irreduzible glatte Kurve und n die Anzahl ihrer rationalen Punkte. Dann liegt die Gerade $R + \delta = 1 - \frac{g}{n}$ ganz unterhalb von α, wobei g das Geschlecht von X bezeichnet. Es sei γ der untere Limes von $\frac{g}{n}$ für alle Kurven $X/\mathbb{F}_q$. Nach Drinfeld und Vladut weiß man, daß $\gamma \geq (\sqrt{q} - 1)^{-1}$. Wenn q ein Quadrat ist gilt die Gleichheit. Für allgemeines q ist unbekannt ob sich Gleichheit erreichen läßt. Für $q = u^3$ geben wir Beispiele von Kurven mit vielen rationalen Punkten, die zeigen, daß

$$\frac{1}{2} \frac{u+2}{u^2-1} \geq \gamma.$$

Man erhält diese Kurven aus der schlechten Reduktion von Shimuraflächen

3. Nov '87 - K-theory and Cohomology - Marc Levine - Bonn.

A constant theme in algebraic K-theory is the relation between K-theory and various ~~cohomologie~~ cohomology theories. The most basic is the topological Chern class $c_p^{top} : K_0(X) \to H^{2p}(X, \mathbb{Z})$. Here the main question is the classical Hodge conjecture: Is $\mathrm{Im}(c_p^{top}) \cdot \mathbb{Q} = H^{2p}(\mathbb{Q}) \cap H^{p,p}$? Leaving this aside, one can look at the kernel of c_p^{top}, which is essentially the group of cycles mod rational equivalence, which are homologous to zero, $CH^p(X)_h$. To classify these, there is the Griffiths intermediate Jacobian $J^p(X)$

$$J^p(X) = \left(\bigoplus_{i=0}^{N-p} H^{2N-2p+1-i,\, i}\right)^* \Big/ \mathrm{Im}\, H_{2N-2p+1}(X, \mathbb{Z}) \qquad (N = \dim X)$$

$$= H^{2p-1}(X, \mathbb{C}) \Big/ F^p H^{2p-1}(X, \mathbb{C}) + \mathrm{Im}\, H^{2p-1}(X, \mathbb{Z})$$

with Abel-Jacobi map $\psi_p : CH^p(X)_h \to J^p(X)$. In case $p = 1$, this completely describes $CH^1(X)_h$; for $p > 1$ there is in general a big kernel, for $1 < p < N$ there is also a big cokernel if the Hodge decomposition has more than 1 term. This was generalized by Beilinson using Deligne cohomology, to give a chern class $c_p : K_0(X) \to H^{2p}_{\mathcal{D}}(X, \mathbb{Z}(p))$ which contains both the topological Chern class, and the Griffiths Abel-Jacobi map. He also gives a generalization of the classical Hodge conjecture and in fact defined Chern classes

$$c_{p,q} : K_{2p-q}(X) \to H^q_{\mathcal{D}}(X, \mathbb{Z}(p))$$

for higher K-theory. These are the ~~[illegible]~~ Hodge theory analogues of the étale Chern classes (Soulé, Gillet)

$$c_{p,q} : K_{2p-q}(X; \mathbb{Z}/n) \to H^q_{et}(X, \mu_n^{\otimes p})$$

The big question here is: does there exist a "universal cohomology theory" $H^q_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Z}(p))$, with Chern classes $c_{p,q} : K_{2p-q}(X) \to H^q_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Z}(p))$ including all possible Chern classes, in particular the ones ~~defined~~ described above?

Nov. 20, 1987 Normal subgroups of gauge groups

by L. N. VASERSTEIN.

Let G be a simple Lie group (i.e. its Lie algebra is simple), X a topological space, A a ring of continuous functions on X containing all constants and such that $(GL, A)^N$ is open in A for all natural numbers N.

Using the adjoint representation, we define $G(A)$ as a subgroup of the group ~~of~~ G^X of all continuous maps $X \to G$. For every ideal B of A we define the congruence subgroup $G(B)$ of $G(A)$ and its connected component of 1, $G(B)^0$.

Theorem ~~When~~ G is ~~of~~ classical type, then a subgroup H of $G(A)$ is normalized by $G(A)^0$ if and only if $G(B)^0 \subset H \subset G(B)$ for an ideal B of A.

I believe that the condition that G is of classical type is not necessary.

When X is a point, the theorem is due to E. Cartan and van der Waerden.

When X is a circle, $G(A)$ are known as loop group, and maximal normal subgroups were described by Presley-Segal and Harpe.

The Stein-Chen method for Poisson approximation, with combinatorial applications.

A. D. Barbour 27. Nov. '87.

Stein (1970) introduced a new technique for obtaining rates of convergence to the normal distribution, and applied it to the central limit theorem for stationary mixing sequences. This method is, however, not restricted to normal convergence, but can be adapted for use in a variety of other contexts. In particular, Chen (1975) showed how to use it for Poisson approximation.

In this paper, the Stein-Chen method for Poisson approximation is outlined, and is illustrated with reference to a variety of examples. In the easiest case, that of independent 0-1 summands, very good results are obtained rather simply. However, the chief attraction of the method lies in its applicability to a variety of problems concerning sums of dependent random variables. Broadly speaking, the method proves effective where the dependence is in some sense local, as for stationary mixing sequences and dissociated arrays, or diffuse, as in combinatorial and exchangeable applications, and seems less suitable where a natural flow of time is present. In this sense, the approach is complementary to that through martingales.

The success of the method in applications depends on how the argument is carried through, and in particular on careful choice of an appropriate coupling. However, the fact that, in many cases, optimal convergence rates can be obtained, makes Stein's method a powerful adjunct to the other techniques available.

Über der Theorie der Clonen

J. A. Malcev 30. 11. 87.

Sei A eine Menge und P_A eine Menge von allen Operationen auf A. Eine Algebra $\mathfrak{P}_A = \langle P_A; \zeta, \tau, \Delta, * \rangle$ mit Operationen

$(\zeta f)(x_1 \dots x_n) = f(x_2 x_3 \dots x_n\, x_1)$ $(\Delta f)(x_1 \dots x_{n-1}) = f(x_1\, x_1\, x_2 \dots x_n)$

$(\tau f)(x_1 \dots x_n) = f(x_2 x_1\, x_3 \dots x_n)$ $(f * g)(x_1 \dots x_{m+n-1}) = f(g(x_1 \dots x_m)\, x_{m+1} \dots x_{n+m-1})$

heißt preiterative Postsche Algebra über A. Die Unte-algebren von $\mathcal{P}_A$, die Projektionen $e_i^n(x_1 .. x_n) = x_i$ in sich enthalten, heißen Clonen. In der letzte Zeit ist diese Begriff sehr wichtig in Gebieten allgemeine Algebra, mathematische Logik und

Als Beispiel betrachten wir eine bestimmt Klasse von Clons. Sei $B_i \subseteq A$, $i \in J$ Eine Unteralgebra $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}_A$ heist QZ-Algebra, wenn $f \in \mathfrak{A} \Leftrightarrow \exists i\ f(A) \subseteq B_i$ Eine Algebra $A = \langle A; F \rangle$ heißt fast primale $\Leftrightarrow [F] = \mathfrak{A}$ Dise Nahme ist gewähl, weil die Eigenschaften von diesen Algebren nah zu denen von primale Algebren sind. Als Ziel haben wir die Beschreibung von Varietät, wo alle fast primale Algebren liegen.

Мамиев

Wege zwischen Klassifikation und Chaos. Eine Analyse neuerer Resultate über abelsche Gruppen — Rüdiger Göbel (Essen)

Ausgehend von Ulm's Klassifikation abzählbarer abelscher p-Gruppen durch Ulm-Kaplansky-Invarianten aus dem Jahre 1930 wird zunächst die Klasse der gut verstandenen total projektiven Gruppen diskutiert. Das ist eine maximale Klasse von p-Gruppen die sich durch Ulm-Kaplansky-Invarianten kennzeichnen lassen und was gerade die einfach präsentierbaren p-Gruppen sind. Die Kaplansky-schen Testprobleme haben hier eine positive Lösung.

Im Kontrast dazu erläutern wir – ausgehend von Resultaten von H. Leptin – den folgenden

Satz (Corner, Gö.): Sei R ein Ring und $\lambda > |R|$ eine Kardinalzahl. Dann sind äquivalent:

(1) R^+ ist (als abelsche Gruppe isomorph zu) $\widehat{\bigoplus J_p}$
(J_p = ganze p-adische Zahlen, $\widehat{\ }$ = p-adische Vervollständigung)

(2) $\exists$ viele abelsche p-Gruppen G mit $p^\omega G = 0$, $|G| = \lambda^{\aleph_0}$ und $\operatorname{End} G / E_s(G) \cong R$
($E_s(G)$ ist dabei das Pierce-sche Ideal der kleinen Homomorphismen.

Hieraus folgen viele Gegenbeispiele zum Testproblem.
Ausgehend vom o.g. "vollständigen" Ulmschen Satz für p-Gruppen, wird seine Erweiterung von Warfield, Hill Megibben... auf (lokale) gemischte Gruppen diskutiert. Es werden diejenigen lokalen Gruppen (= $\mathbb{Z}_{(p)}$-Moduln) charakterisiert, die sich durch die Ulm-Kaplansky-Inv. und die (torsionsfreien) Warfield-Invarianten bestimmen lassen. Die Grenzen dieses Klassifikationssatzes werden durch torsionsfreie bzw. gemischte Beispiele aus gemeinsamen Arbeiten mit Corner, Dugas, May, Wald und Ziegler illustriert.

4. 12. 87 Rüdiger Göbel

Allgemeine Darstellung der dichtetreuen Geradentransformationen der Ebene. Diese dichtetreuen Abbildungen $t_l \to t_r$ lassen sich geometrisch mit Hilfe der Cliffordschen Schiebungen eines quasielliptischen Raumes gewinnen, indem man die Punkte $\mathfrak{z} = (x, y, z)$ einer Fläche $z = z(x,y)$ samt ihren Tangentenebenen τ durch Cliffordsche Links- und Rechtsschiebungen in die [illegible] der z-Achse verschiebt. Die Tangentenebenen τ gehen dabei in Ebenenpaare τ_l, τ_r über, die mit der Ebene $z=0$ Spurgeraden t_l, t_r gemeinsam haben. Die Beziehung $t_l \to t_r$ ist dann dichtetreu. Jede dichtetreue Abbildung $t_l \to t_r$ kann auf diese Art geometrisch erzeugt werden. Die analytische Darstellung dieser einfachen Konstruktion verwendet Studys [illegible] "duale" [illegible]. Sie gestattet die Darstellung der dichtetreuen Abbildungen $t_l \to t_r$ durch Formeln, die umgekehrt auch für jede solche Abbildung gestatten, die dazu passenden zu rekonstruierenden Flächen $z = z(x,y)$ [illegible]

Karl Strubecker
11.12.1987

18.12.1987 Symbols in Classical groups
by ALEXANDER J. HAHN

Let R be a ring equipped with an anti-automorphism J and unit ε such that J^2 = conjug by ε and $\varepsilon^J = \varepsilon^{-1}$. Let $\Lambda_\varepsilon = \{ r - r^J\varepsilon \mid r \in R\}$ and $\Lambda^\varepsilon = \{ r \in R \mid r^J \varepsilon = -r\}$. Then $\Lambda_\varepsilon \subseteq \Lambda^\varepsilon$. A form parameter a la BAK is an additive subgroup Λ of R such that $\Lambda_\varepsilon \subseteq \Lambda \subseteq \Lambda^\varepsilon$ and $r^J \Lambda r \subseteq \Lambda$ all $r \in R$. Let M be a right R module and let (h, q) with

$$h : M \times M \to R \quad \text{and} \quad q : M \to R/\Lambda$$

be a Λ-quadratic form (again a la BAK) on M. If M is hyperbolic one can define elementary transformations in the unitary group $U(M)$ of $M = (M, h, q)$. These satisfy 7 basic relations, which in turn lead to the definition of the unitary Steinberg groups $StU_{2n}(R,\Lambda)$ and to unitary $KU_2(R,\Lambda)$. These unitary K_2 groups are related to the usual linear K_2 group via hyperbolic and forgetful maps. These maps behave nicely on the symbols in $K_2(R)$ ie take them to analogously defined symbols in KU_2.

In the symplectic special case this leads to the following exact commutative diagram which interrelates a number of earlier important theorems and results: Let R a field, char $R \neq 2$.

$$
\begin{tikzcd}
 & & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
 & 1 \arrow[r] \arrow[d] & K(R)/\{-1,\dot{R}\} \arrow[r, "squ."] \arrow[d, "hyp"] & K_2(R)^2 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathrm{Ker\,forg} \arrow[r] \arrow[d] & KSp_2(R) \arrow[r, "forg"] \arrow[d] & K_2(R) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & I^3(R) \arrow[r] \arrow[d] & I^2(R) \arrow[r] \arrow[d] & Br_2(R) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & 1 & 1 & 1 &
\end{tikzcd}
$$

SUSLIN 1982

Milnor 1970

Suslin K-Theory 1987

Sharpe's sequence 1972

is exact MERKURJEV'S THM

Alexander J Hahn