15.1.1988 Homologische Algebra und modulare Darstellungstheorie

U. Stammbach, ETH, Zürich.

Es sei G eine endliche Gruppe, p eine Primzahl mit $p \mid |G|$, k ein Körper der Charakteristik p. Ferner bezeichne kG die Gruppenalgebra über k und $k = S_1, S_2, \dots, S_n$ die (Isomorphieklassen der) einfachen kG-Moduln. Es ist ein einfaches Resultat, dass $\mathrm{Ext}^*_{kG}(S_i, S_j)$ nur dann nichttrivial sein kann, wenn die Moduln S_i, S_j im selben Block von kG liegen. Hier wird die Frage betrachtet, unter welchen Umständen die Umkehrung gilt. Im allgemeinen ist die Umkehrung falsch: Ist $G = A_5$, $p = 2$ und k genügend gross, so gilt für die beiden 2-dimensionalen Moduln M_1, M_2, die beide im Hauptblock liegen, $\mathrm{Ext}^*_{kG}(M_1, M_2) = 0$. In Arbeiten von Brockhaus, Linnell, Linnell-Stammbach wurde schrittweise das folgende Resultat erhalten.

Satz (a) G p-constrained, S_1, S_2 einfache Moduln im Hauptblock von kG. Dann gilt $\mathrm{Ext}^*_{kG}(S_1, S_2) \neq 0$.

(b) G p-auflösbar, S_1, S_2 einfache Moduln im selben Block von kG. Dann gilt $\mathrm{Ext}^*_{kG}(S_1, S_2) \neq 0$.

Der Beweis dieses Satzes benützt tiefere Hilfsmittel, sowohl der modularen Darstellungstheorie (Fongreduktionen) wie auch der homologischen Algebra (Even's Norm Abbildung; Lyndon-Hochschild-Serre-Spektralreihe, insbesondere deren Produkt- und Modulstruktur).

U. Stammbach

22.1.1988 Torsionsgruppen elliptischer Kurven über algebraischen Zahlkörpern
H. G. Zimmer, Saarbrücken

Welche endlichen abelschen Gruppen können als Torsionsgruppen elliptischer Kurven E über algebraischen Zahlkörpern K auftreten? Unter Anwendung der Néronschen Reduktionstheorie und Kubertscher Parametrisierungen kann diese Frage für elliptische Kurven E mit <u>ganzer</u> absoluter Invariante j über quadratischen und rein-kubischen Zahlkörpern K beantwortet werden:

<u>Satz 1</u> K quadratisch:

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$,
$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$,
$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$,
$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

<u>Satz 2</u> K rein-kubisch:

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$,
$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$,
$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

Bis auf die Fälle $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ gibt es nur endlich viele elliptische Kurven E und quadratische bzw. rein-kubische Grundkörper K, über denen bzw. für welche die obigen endlichen abelschen Gruppen als Torsionsgruppen auftreten, und diese sind alle berechnet worden. (Im Falle $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gibt es nur endlich viele j-Invariante und Grundkörper K). Mit Hilfe des Computers wurden die entsprechenden Tabellen berechnet und sind verfügbar. H. G. Zimmer

29.1.88 Dynamik der Polynomen und die Structur der Mandelbrotschen Menge.

Sei $P_c(z) = z^2+c$, und $P_c^{\circ n}(z) = P_c(\dots(P_c(z)\dots))$.

Sei $K_c = \{ z \,/\, P_c^{\circ n}(z) \not\to \infty \}$.

Satz 1. Entweder $0 \in K_c \iff K_c$ ist zusammenhängend, oder $0 \notin K_c \iff K_c$ ist eine Cantormenge.

Definition: M (die Mandelbrotsche Menge) ist

$\{ c \,/\, K_c$ ist zusammenhängend$\} = \{ c \,/$ die Folge $c,\ c^2+c,\ (c^2+c)^2+c, \dots$ ist beschränkt$\}$.

Die Menge M ist sehr compliziert, trotzdem verstandbar.

Satz 2. M ist zusammenhängend.

Hilfsatz 1 $\exists!\ \varphi_c : (\mathbb{C}, \infty) \to (\mathbb{C}, \infty)$ mit $\varphi_c(P_c(z)) = (\varphi_c(z))^2$.

$(\mathbb{C}, \infty)$ heisst in eine Umgebung von ∞.

Hilfsatz 2. a) Wenn $c \in M$ ist, dann kann man φ_c erweitern, und dann ist $\varphi_c : \mathbb{C} - K_c \to \mathbb{C} - \bar{D}$ die Riemannsche Abbildung.

b). Wenn $c \notin M$ ist, dann kann man φ_c nach c erweitern.

Beweis von Satz 2. Die Abbildung $\Phi : c \mapsto \varphi_c(c)$ ist ein Isomorphismus $\Phi : \mathbb{C} - M \to \mathbb{C} - \bar{D}$.

Def. $R_M(\theta) = \{ \Phi(re^{2\pi i\theta}) , 1<r<\infty \}$ ist die Aussere Strahl von M mit Winkel θ.

Satz 3. Sei ~~t~~ $\theta = \frac{p}{2^k(2^l-1)}$ eine rationale zahl, geschrieben mit k, l so klein wie möglich.

a) $\gamma_M(\theta) = \lim_{r\to 1} \Phi(re^{2\pi i\theta})$ existiert.

b) Wenn $k>0$, dann ist P_c $(c=\gamma_M\theta)$. ein Polynom, für welche der Bahn von 0, das heisst die Folge $0, c, c^2+c, \ldots$ wird periodisch mit eine periode ~~die~~ die l teilt; die erste $k+1$ termen sind nicht periodisch und dann ~~sind~~ sind sie periodisch.

c). Wenn $k=0$, dann ist P_c ein polynom mit eine indifferenter periodischer Punkt, deren periode l teilt.

Satz 3 kann man mit eine Iteration in eine gewisse Teichmüller Raum beweisen.

John H. Hubbard

5.2.88 Einige Klassifikationsaufgaben in der mathematischen Kristallographie

W. Plesken (Aachen)

Nach Bieberbach (1910) gibt es bis auf affine Konjugation nur endlich viele kristallographische Raumgruppen in einer gegeben Dimension. Es wird beschrieben, wie Bieberbachs Klassifikation sich zu einer Klassifikation unter der Euklidischen Gruppe verfeinern läßt. Da diese Klassifikation zu unendlich vielen Klassen führt, ist sie nur von bedingtem Nutzen für die Kristallographie. Jedoch läßt sich noch eine endliche Klassifikation durchführen, wenn man die Paare; Raumgruppe R zusammen mit der Euklidischen Normalisator $N_{E_n}(R)$, unter affiner Konjugation klassifiziert. Da der Kristallograph aber nicht die Raumgruppen selbst, sondern nur Bahnen unter Raumgruppen in der Natur beobachtet, stellt sich die Frage nach einer endlichen Klassifikation dieser Bahnen. Es zeigt sich, daß das Konzept der Gitterkomplexe und eine Klassifikation durch "generische" Eigensymmetrie äquivalent sind. Als letztes Klassifikationsproblem werden die Bravaisklassen von Gittern besprochen, also die Klassifikation der Gitter im Euklidischen Raum ~~durch~~ durch ihre Automorphismengruppen. Diese Klassifikation ist bis zur Dimension 6 vollständig durchgeführt.

W. Plesken

12.2.88 Twistorräume und algebraische Geometrie

Herbert Kurke (Humboldt-Univ.-Berlin)

Zu einer glatten orientierten 4-Mannigfaltigkeit X mit einer konformen Struktur Q ist der Twistorraum $Z \xrightarrow{\pi} X$ definiert als das Bündel, dessen Fasern $\pi^{-1}(x)$ der Raum der mit Q verträglichen komplexen Strukturen des Tangentialraumes $T_x(X)$ sind, die die entgegengesetzte Orientierung induzieren. Sie sind isomorph zu $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ und andererseits homogene Räume $SO(4)/U(2)$ (da 2 solcher Strukturen $SO(4)$-konjugiert sind).

Der Raum Z besitzt eine natürliche fast komplexe Struktur, die genau dann integrabel ist, wenn die Komponente W^- des Weyl-Tensors der konformen Struktur verschwindet. („Selbst-duale konforme Strukturen"). Es werden Beispiele diskutiert, insbesondere die Frage, wann der Twistorraum Kählersch oder ein Moishezon-Raum ist.

Wenn Z einfach zusammenhängend, kompakt und die 2-te Betti-Zahl ≤ 4 ist, lassen sich die Twistorräume konkret beschreiben und liefern die selbstdualen Metriken positiver Skalarkrümmung auf S^4, $n\#\mathbb{P}^2\mathbb{C}$, $n \leq 3$.

Herbert Kurke

10 III 1988

Geometrie der positiven quadratischen Formen

Ryschkov (Moskau).

Wir betrachten die positiven (positiv definiten) quadratische Formen (PQF) der folgenden Art

$$f = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i x_j \; ; \; a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R} .$$

Die Menge der PQF bildet in Koeffizientenraum $\mathbb{E}^N$ $(N = n(n+1)/2)$ einen offenen, konvexen Kegel $\mathbb{K}$. Zugleich läßt sich jeder von 0 verschidenen quadratischen Form $f = \sum a_{ij} x_i x_j$ umkehrbar eindeutig eine Hyperebene H_f mit der Gleichung $\sum a_{ij} x_i x_j = C$ zuordnen, wobei $v_{ij} = v_{ji}$ die Koordinaten von $\mathbb{E}^N$ sind und $C > 0$ eine festgewählte reelle Zahl. Die Form f ist genau dann positiv, wenn H_f beschränkten Durchschnitt mit $\mathbb{K}$ hat.

Auf der anderen Seite ist jede PQF f die metrische Form von einer bis auf Bewegungen durch f eindeutig bestimmten Basis $\mathcal{E}_f$ in E^n. Die Klasse ~~der~~ der zu f ganzzahlig äquivalenten PQF entspricht dabei dem Gitter Γ_f, welches von $\mathcal{E}_f$ erzeigt wird.

Diese drei Beschreibungen von PQF's sind grundlegend für das Studium ihrer Geometrie.

Üblicherweise betrachtet man die Geometrie der PQF's in der Sprache der Gitter.

In dem Vortrag wurde gezeigt, daß sich viele wichtige Fragen aus der Gittertheorie dadurch beantworten lassen, daß man sie in Fragen über Geometrie im Koeffizientenraum E^N übersetzt. Beispiele sind Packungs- und Überdeckungsprobleme, die Untersuchung der Epsteinischen ζ-Function von Gittern und die Bestimmungen aller endlichen Untergruppen von $GL(n, \mathbb{Z})$.

(S. S. Ryschkov)

15/IV 1988 Non-commutative number theory

The main idea of algebraic K-theory is to pass from a ring R to matrix rings over R in order to simplify our problems. Although the problem become larger, more room becomes available to resolve it. This differs from traditional approaches in number theory, when one passes from the ring $\mathbb{Z}$ of integers to its localizations, factor rings, completions, integral extensions, adele rings, and other commutive rings.

In this ~~talk~~ talk, we observe what happens with a few classical problems of number theory when we pass from the ring $\mathbb{Z}$ to the ~~rings~~ ring $M_2\mathbb{Z}$ of integral 2 by 2 matrices. Some problems become easier. Sometimes, new interesting problem arise.

L. Vaserstein (Penn. State, MPI, IHES, Paris VII)

18.4.88 On a Roelcke - Selberg conjecture.

There is a importante problem in spectral theory of automorphic functions to investigate the spectrum of automorphic Laplacian A ~~A~~ for general Fuchsian group of the first kind. In the moment there are two different hypothesis on a discrete spectrum of operator A. 1) Roelcke - Selberg conjecture (roughly speaking) this spectrum is "big" for general group. 2) Phillips - Sarnak hypothesis that ~~is~~ this spectrum is small.

In the talk I begin with survey of the theory ~~th~~ around these conjectures and then I consider more general version of the R. S. conjecture which formulated for general representation of the given Fuchsian group. Then I consider several important examples groups and irreducible representation for which R. S. conjecture is true. I'm also determine the modular equation for resolvent of automorphic Laplacian and investigate the applications of this equation to R.-S. conjecture.

A. Venkov, Leningrad Dept. Steklov Math. Inst
Fontanka 27, 191011 Leningrad USSR

Venkov

Zur Theorie der gradierten affin algebraischen Gruppen. 29.4.88

Helmut Boseck (Ernst-Moritz-Arndt Univ. Greifswald).

Eine graduierte affin algebraische Gruppe ist ein Paar (G, P), das aus einer Gruppe G und einer $\mathbb{Z}_2$-graduierten Hopf Algebra P besteht. Dabei ist P als graduierte Algebra isomorph zu einem Tensorprodukt $P_0 \otimes \Lambda(W)$ mit einer affinen Hopf Algebra P_0 und der Graßmann Algebra über einem endlichdimensionalen Vektorraum W. Die kanonische Projektion von P auf P_0 ist mit den Co-Algebra Strukturen auf P und P_0 verträglich und die Homomorphismen von P in den zugrundeliegenden Körper K werden den Gruppenelementen eineindeutig zugeordnet. Das Paar (G, P_0) ist eine affin algebraische Gruppe im der Definition von G. Hochschild. Das Hopf Dual P^0 ist als CoAlgebra isomorph zum Tensorprodukt aus Gruppenalgebra und universeller Einhüllenden der zugehörigen graduierten Lie Algebra L: $P^0 \cong K[G] \otimes U(L)$. Die graduierte Lie Algebra L wird gegeben durch die Differentiationen auf P bezüglich der Lie Multiplikation $[d_1, d_2] = d_1 * d_2 - (-1)^{|d_1||d_2|} d_2 * d_1$, wobei d_1, d_2 homogene Elemente sind und $*$ die Faltung bezeichnet. Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen Gruppen von Blockmatrizen mit Elementen aus einer Graßmann Algebra und graduierten algebraischen Gruppen, der es gestattet u. a. die graduierten algebraischen Gruppen näher zu beschreiben, die den einfachen graduierten Lie Algebren entsprechen. Durch $R(d) = (id \otimes d)\pi$ wird eine Darstellung der graduierten Lie Algebra L über dem Raum P der "Polynomfunktionen in kommutierenden und antikommutierenden Variablen" durch linksinvariante Derivationen definiert, die rechte reguläre Darstellung von L. Dabei bezeichnet $\pi: P \to P \otimes P$ die Comultiplikation in P. Als Beispiel wird u.a. die Gruppe diskutiert, die der graduierten f-d-Lie Algebra von Michel-Gell-Mann-Radicati entspricht.

Helmut Boseck

Antimatroide und Konvexität

Um die kombinatorischen Eigenschaften der Konvexität zu definieren, kann man für eine Mengenfamilie F über einer endlichen Grundmenge einen Abschlußoperator definieren, der neben den üblichen Eigenschaften, d.h. $\tau: 2^E \to 2^E$

(i) $\tau(\emptyset) = \emptyset$, (ii) $A \subseteq \tau(A)$ (iii) $A \subseteq B \Rightarrow \tau(A) \subseteq \tau(B)$

(iv) $\tau(A) = \tau(\tau(A))$ noch die anti-symmetrische Steinitz-McLane Austauscheigenschaft hat, nämlich

(v) $y, z \notin \tau(X)$, $y \in \tau(X \cup z) \Rightarrow z \notin \tau(X \cup y)$.

Es ist einfach zu zeigen, daß dieser Operator die klassischen Eigenschaften der Konvexität induziert.
(Man beachte, daß der Abschluß-Operator für Matroide fast genauso aussieht, er hat lediglich die symmetrische Steinitz-McLane Eigenschaft, d.h. in (V) gilt "... $\Rightarrow z \in \tau(X \cup y)$". Mengensysteme mit dem Abschluß-Operator τ nennen wir konvexe Geometrien.
Die Komplemente dieser Mengen bilden das Mengensystem eines Antimatroids, das in früheren Arbeiten gemeinsam mit Lovász als Spezialfall von Greedoiden untersucht wurde. Wir zeigen heute, daß viele klassische Resultate der Konvexität auch in konvexen Geometrien und Antimatroiden gelten; diese strukturellen Eigenschaften können hier noch deutlicher charakterisiert werden.
Es können Krein-Milman, Carathéodory, Helly, Radon und Erdős-Szekeres Sätze bewiesen werden.
Die Helly-Zahl von Antimatroiden führt auch zu interessanten topologischen Charakterisierungen von Antimatroiden. Abschließend zeigen wir noch zwei Ramsey Resultate für Antimatroide

6. Mai 1988

Bernhard Korte, Bonn

Standard Brownian Motion is nonstandard Coin Tossing. May 13, 1988

Peter A. Loeb, University of Illinois, Urbana, visiting Chalmers, in Sweden

In 1960 Abraham Robinson gave a rigorous foundation for the use of infinitesimals in analysis. Robinson's invention, called nonstandard analysis, is more than a justification of the previous use of infinitesimals; it is a powerful new tool for mathematical research. In the 25 years since Robinson's discovery, the use of nonstandard models has led to new insights and some solutions of unsolved problems in areas as diverse as functional analysis, probability theory, complex function theory, potential theory, number theory, mathematical physics and mathematical economics.

One often thinks of stochastic processes as having infinitesimal increments or time changes. For example, the Poisson process is the distribution of an infinite number of events into an infinite number of infinitesimal intervals. Brownian motion is an infinitesimal random walk with $\Delta x = \sqrt{\Delta t}$. These conceptual experiments can be realized in a nonstandard model and then transformed into standard probability spaces still based on the nonstandard point set. Here we describe a recent functional approach to this process and give some applications in measure theory, probability theory — in particular, Anderson's construction of Brownian motion, and mathematical physics (e.g. Arkeryd's work on the Boltzmann equation). We will show that in the sense that Brownian motion can be based on the probability space corresponding to nonstandard coin tossing, it is nonstandard coin tossing.

Peter Loeb

Flows on $SL(3,\mathbb{R})/SL(3,\mathbb{Z})$ and the proof of the Davenport-Oppenheim conjecture, May 18, G.A. Margulis (Moscow)

Let B be a real non-degenerate indefinite quadratic form in n variables. The purpose of the talk is to give a sketch of the proof of the following

Theorem 1. Suppose than $n \geq 3$ and that B is not a multiple of a rational form. Then for any $\varepsilon > 0$ there exist integers $x_1, \dots, x_n$ not all equal to 0 such that $|B(x_1, \dots, x_n)| < \varepsilon$.

Theorem 1 was conjectured for $n \geq 5$ by Oppenheim in 1929 and for general case by Davenport in 1946. Using Mahler compactness criterion and Borel density theorem, it is not difficult to deduce theorem 1 from

Theorem 2. Let $G = SL(3,\mathbb{R})$ and $\Gamma = SL(3,\mathbb{Z})$. Let us denote by H the group of elements of G preserving the form $2x_1x_3 - x_2^2$. Let G_y denote the stabilizer $\{g \in G \mid gy = y\}$ of $y \in G/\Gamma$. If $z \in G/\Gamma$ and the orbit Hz is relatively compact in Ω, then the quotient space $H/H \cap G_z$ is compact.

The proof of theorem 2 is mainly based on the study of closures of orbits of unipotent flows on $SL(3,\mathbb{R})/SL(3,\mathbb{Z})$.

"Euler products and Hecke rings"
May 20, 1988. Gritsenko (Leningrad, LOMI)

As well known all Fourier coefficients of modular forms with respect to the group $SL_2(\mathbb{Z})$ can be expressed through the eigenvalues of Hecke operators. It seems to be false in the case of forms in several variables. The investigation of multiplicative properties of Fourier coefficients is very important problems as they are cosely related with arithmetic. So, how to do this in the case of several variables? The following general result in this field has been proved.

Let

$$F(Z) = \sum_{N \in L} a(N) \exp(\langle N, Z \rangle)$$

(L is some lattice)

be a holomorphic modular forms of integral weight with respect to some "good" groups (for example with respect to the Sp_n, $SU(n,n)$ over imaginary number field, $SO(2,n)$). Assume that $F(Z)$ is an eigenfunction of Hecke operators, then the following Dirichlet series

$$\sum_{[M] \subset \{N\}} \sum_{l \geq 1} a(lN) l^{-s}$$

(classes in genus N)

possess ~~thea~~ Euler product.

The main idea of proving this ~~theore~~m is consists of studing the factorization Hecke polynomials in the parabolical extensions of Hecke ring.

In the case $SO(2,n)$ it is possible also to construct the integral representation of such Dirichlet series using Eisenstein series for the group $SO(1, n-1)$ and to prove the possibility of analitical continuation of these Dirichlet series on the hole s-plane.

(V. Gritsenko)

"Some general remarks on mixed Hodge Theory and its applications"
May 27, 1988 Alan Durfee (Mt. Holyoke College, S. Hadley MA, USA; z.Z. Nimwegen)
(Der Vortrag war auf Deutsch gegeben)

Let X be a quasiprojective algebraic variety$/\mathbb{C}$. According to major work of Deligne, for all k there is a weight filtration

$$\ldots W_m \subset W_{m+1} \subset \ldots \subset H^k(X; \mathbb{Q}).$$

This filtration is strictly preserved by algebraic maps (If $f: X \to Y$, then $f^*(W_m) = W_m \cap \operatorname{im} f^*$.) and has other naturality properties. It is constructed by mixed Hodge Theory, which starts from the Hodge theorem, or galois actions, which starts from the Riemann hypothesis.

This theory has been extended by M. Saito to show that the intersection homology $IH(X)$ has a pure Hodge structure if X is compact and irreducible*. The theory has been applied by Saito and the speaker as follows: let X be compact, Z a closed subvariety and L the link ("Umgebungsrand") of Z in X. Then there are restrictions on the weights of $IH^*(L)$. These give then restrictions on the topology of L.

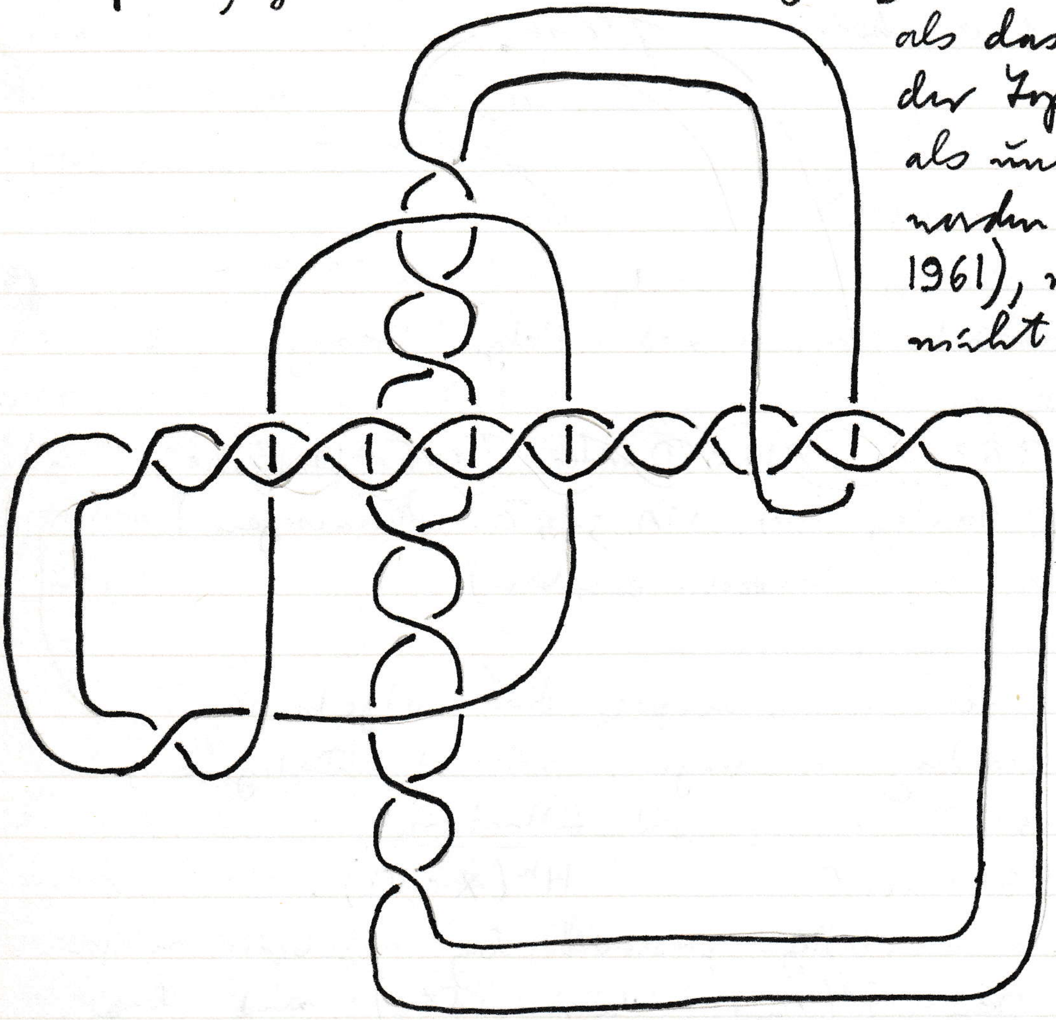
Alan H Durfee

(* This has been proved in char p by Bernstein, Beilinson & Deligne)

"Algorithmen in der 3-dimensionalen Topologie."

3.6.1988 Wolfgang Haken (Urbana IL)

Das Homöomorphieproblem für Polyeder (oder Simplizialkomplexe) galt in den ersten Jahrzehnten dieses Jahrhunderts



als das "Hauptproblem der Topologie". Seit es als unlösbar nachgewiesen worden ist (Markov, 1961), nennt man es nicht mehr so. Für 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten wurde das Problem schon in den 1880er Jahren gelöst. Der 3-dimensionale Fall ist erst teilweise erledigt. Die beiden am einfachsten zu beschreibenden Spezialfälle sind das "Knotenproblem" (zu entscheiden ob eine gegebene, polygonale, geschlossene Kurve in E^3 oder S^3 verknotet sei) und das Erkennungsproblem für S^3 oder für das 3-dimensionale Elementarraumstück. Hier bereitet es zunächst einige Mühe, zu zeigen, daß diese Probleme nicht trivial sind. Das obige Bild zeigt eine unverknotete Kurve, die man nicht durch das Umlegen <u>eines einzigen</u>, <u>ausschließlich unterkreuzenden</u> oder ausschließlich <u>überkreuzenden</u>, Bogens vereinfachen kann; (d.h. wenigstens der naivst-mögliche Algorithmus funktioniert nicht!)

Es ist bemerkenswert, daß das Knotenproblem verhältnis=

mäßig einfach mit der Methode der Normalflächen gelöst werden kann, während das Erkennungsproblem für das 3-Element nur mit außerordentlichen Schwierigkeiten erledigt werden konnte. Das liegt daran, daß es in jedem Knotenaußenraum "inkompressible Flächen" gibt, in der S^3 dagegen nicht. Für das Knotenproblem kann man den Algorithmus sogar so modifizieren, daß er mit polynomial beschränktem Zeitaufwand durchgeführt werden kann.

W. Haken

The Graph of a Positive Form

June 7, 1988

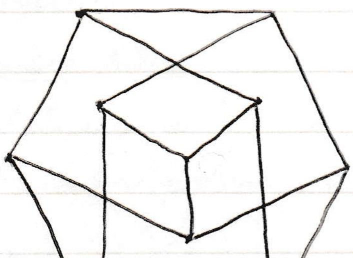
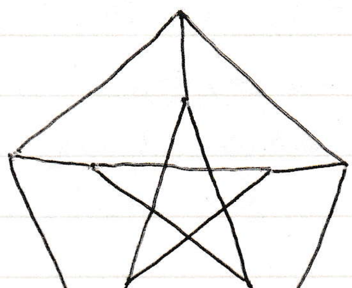
T. Y. Lam (Berkeley)

By a positive (semidefinite) form, we mean a form f in $\mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]$ with the property that $f(\mathbb{R}^n) \geq 0$. All positive n-ary forms of a fixed degree m form a cone $P_{n,m}$ which is a semialgebraic set in a suitable euclidean space. Forms in $P_{n,m}$ need not be sums of squares of other forms (according to Hilbert), and therefore the study of $EP_{n,m}$, the set of extremal positive forms in $P_{n,m}$, is of great interest.

In this talk, we show how to associate a graph $Gr(f)$ to every $f \in P_{n,m}$. The vertices (or nodes) of $Gr(f)$ are the "extremal hyperplanes" π of f (i.e. hyperplanes in $\mathbb{R}^n$ such that $f|\pi$ is extremal); two different extremal hyperplanes π, π' are connected by an edge iff $\exists\, v \in \pi \cap \pi'$ such that $f(v) \neq 0$. We give a quick proof for the following

<u>Thm</u>. <u>If $Gr(f)$ ($f \in P_{n,m}$) contains a connected subgraph $\mathcal{G}$ with more than m nodes, then f is extremal in $P_{n,m}$.</u>

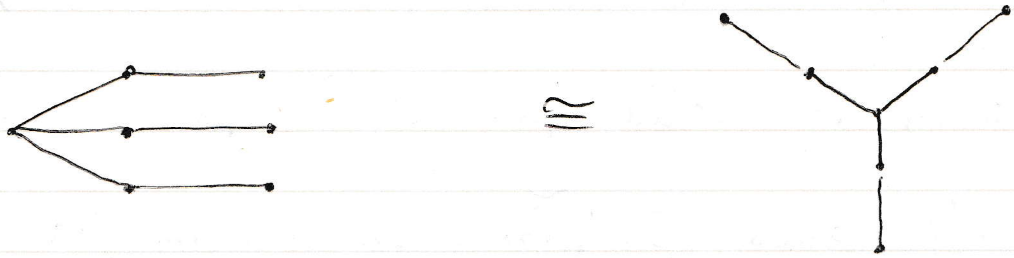
This sufficient condition for extremality can be applied successfully to a number of interesting positive forms, to ascertain their extremality. For instance, the graph of the Robinson form $S(x,y,z) = \sum x^2(x^2-y^2)(x^2-z^2) \in P_{3,6}$ turns out to have a graph

 $\cong$ 

This is a well-known trivalent graph, known as the Petersen graph. This implies, according to the theorem, the extremality of the Robinson form. Many other similar computations can be made, one of which is, for instance, for the newly discovered positive form

$$F(x, y, z) = \frac{1}{2}\left[\prod (y+z-x)^2 - \prod (y^2+z^2-x^2)\right] \in P_{3,6} .$$

The graph of this is just



which is a subgraph of the Petersen graph. In particular, F is <u>also</u> an extremal form. This form was first discovered by using Euclidean geometry but nevertheless the fact that F is positive on <u>all of</u> $\mathbb{R}^3$ (not just for (a, b, c) the three sides of a triangle) seems to be rather surprising. It is hoped that the study of the forms S, F and other similar ones will some day lead to a complete determination of all (symmetric) ternary sextic positive forms.

Tsit-Yuen Lam
University of California
Berkeley, CA 94720
USA

[This talk is based on joint work with M. D. Choi (Toronto) and B. Reznick (Urbana)]

Current trends in Diophantine Geometry

A. N. Parshin, Moskau, June 8

It was proved in the middle of 70-s that for all algebraic surfaces V of general type we have an inequality $c_1^2 \leq 3c_2$ between the Chern numbers of V (Bogomolov, Miyaoka, Yau). Actually it is valid for all surfaces excluding the ruled ones. If $f: \tilde{V} \to B$ is an arithmetical surface over ring of integers in some number field then it is possible to formulate an analogue of Bogomolov-Miyaoka-Yau inequality in that case. It has the following form

$$(*) \qquad \omega^2_{\tilde{V}/B} \leq c_1 \sum_{\substack{\text{all} \\ \text{places of } B}} \delta_v + c_2 (2g-2) \log |D_{K/\mathbb{Q}}| + c_3$$

where B is the ring of integers in the number field K, $D_{K/\mathbb{Q}}$ is the discriminant of K over $\mathbb{Q}$, g is a genus of the general fiber of $\tilde{V}$ over B, $\omega_{\tilde{V}/B}$ is the relative canonical class, $\omega^2_{V/B}$ is it's self-intersection index defined by Arakelov's theory and for each $v \in B$ δ_v are the local invariants introduced by Faltings for archemidian v and which is equal to the number of double points on the fiber V_v for non-archemidian v. We assume that f is a stable fibration. It can be proved that the inequality $(*)$ with some absolute constants $c_{1,2,3}$ implies the effective Mordell's conjecture, the boundedness of torsion for the elliptic curves ~~of~~ over fixed ground field and the asymptotic Fermat theorem among the others.

A. Parshin

Zahlentheorie in Naturwissenschaften, Informatik und Musik

Manfred R. Schroeder, Göttingen (10. Juni 1988

"Hinsichtlich der Zahlentheorie bin ich übrigens Optimist und glaube, daß eines Tages die ~~z.B.~~ Zusammensetzung der Materie ... als mit der Zerlegung der Primzahlen in Summen von Quadraten in Zusammenhang gebracht werden kann ..." (ungefähres) Zitat aus einer Ansprache Hermann Minkowski's in Göttingen (1905) anläßlich des 100. (?) Geburtstages von Dirichlet. — Originalzitat in M. R. Schroeder: "Number Theory in Science and Communication" Second Enlarged Edition (Springer, 1986)

M. R. Schroeder

Ganzzahlige unimodulare Gitter in Euklidischen Räumen

Helmut Koch, Berlin-DDR (13. Juni 1988)

Diese Gitter wurden klassifiziert bis zur Dimension 25. Für Dimension $n \geq 29$ zumindestens wird die Anzahl der Gitterklassen zu groß, so daß eine Aufzählung nicht mehr in Frage kommt. Im Vortrag werden einige Sätze des allgemeinen Falls angegeben und z.T. bewiesen. Weiter wird der Fall der Geraden Gitter der Dimension 32 ohne Wurzeln betrachtet.

H. Koch

Simultaneous extension of continuous functions.

Let S be a (closed) subset of a topological space T, and let H be a (nice) subspace of $\mathcal{C}(T)$. We are looking for an extender (= linear map $L : \mathcal{C}(S) \to H$ with $L(f) \restriction S = f$) having some additional properties (like continuity, positivity, ...). We discuss the existence of such an extender in the following cases:

1. the Borsuk-Dugundji extension theorem,
2. extension theorems in spaces having the Lusin-Menchoff property,
3. the Rudin-Carleson theorem and its generalization by Bishop,
4. a generalization of the Bliedtner-Hansen theorem concerning the weak Dirichlet problem.

June 24, 1988

Jaroslav Lukeš
Matematicko-fyzikální fakulta
Charles University of Prague

Algorithms Related to Finitely Presented Groups

This talk surveys the methods currently available for investigating the structure of a group given by a finite presentation. The following topics are discussed:

The Knuth-Bendix procedure for strings.
Collection in polycyclic groups.
Presentation simplification.
The low index subgroup algorithm.
Coset enumeration.
The Reidemeister-Schreier algorithm.
Modified coset enumeration.

The abelian quotient algorithm.
The nilpotent quotient algorithm.
The Baumslag-Cannonito-Miller polycyclic quotient algorithm.

In the opinion of the speaker the most exciting developments in this field are the growing importance of the Knuth-Bendix procedure for strings and the possibility of implementing the BCM polycyclic quotient algorithm.

1. 7. 88

Charles C. Sims
Rutgers University

K_3 and Block's group

A. A. Suslin, Leningrad 8. VII. 1988

Block's group of a field F (denoted $B(F)$) is defined as the kernel of the homomorphism

$$p(F) \longrightarrow (F^* \otimes F^*)_\sigma$$

where $p(F)$ is the group with generators $[x]$ $(x \in F^* - 1)$ and relations $[x] - [y] + [y/x] - [\frac{1-x^{-1}}{1-y^{-1}}] + [\frac{1-x}{1-y}] = 0$ $(x \neq y \in F^* - 1)$
The talk surveyed some computational problems of algebraic K-theory and contained in particular the detailed proof of the following results

a) Denote by $GM(F)$ the subgroup of $GL(F)$, consisting of monomial matrices. This group is quasi-perfect so that one ~~ca~~ may consider the space $BGM(F)^+$ and the canonical morphism $BGM(F)^+ \longrightarrow BGL(F)^+$

Theorem. Cokernel of the map $\pi_3^s(BF^*) = \pi_3(BGM(F)^+) \to \pi_3(BGL(F)^+) = K_3(F)$ is canonically isomorphic to $B(F)/\langle 2c_F \rangle$, where c_F is a certain element of exponent 6.

Several applications of the theorem were given

Corollary 1 There exists a natural exact sequence

$$0 \to \mathrm{Tor}(F^*, F^*)^{\sim} \to K_3(F)_{ind} \to B(F) \to 0$$

where $\sim$ means the unique nontrivial extension by means of $\mathbb{Z}/2$ if char $F \neq 2$ and means nothing if char $F = 2$

Using Rodger's L-function one may also derive the following corollarys:

Corollary 2 The map $\pi_3^s(*) \to K_3(\mathbb{Z})$ is not surjective

Corollary 3 $B(\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}/6$.

Projektive und freie Auflösungen von Gittern über einer endlichen Gruppe.

K.W. Gruenberg (Queen Mary College, London) 15. 7. 1988.

Sei G eine endliche Gruppe, A ein $\mathbb{Z}G$-Gitter. Für eine projektive Auflösung (P, C) von A (d.h.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \cdots \arrow[r] & P_n \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & A \arrow[r] & 0 \\ & & C_n \arrow[ur] & & C_0 \arrow[ur] & & = C_0 & \end{tikzcd}$$

) definiert man

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(P) = \frac{1}{|G|} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \dim_{\mathbb{Q}} (P_i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \;; \text{ und}$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(A) = \inf \{ \tilde{\mathcal{E}}_n(P) \mid \text{alle } P_* \}.$$

Es ist bekannt daß

(1) die Poincaré Reihe $\sum_{n \geq 0} \tilde{\mathcal{E}}_n(A) t^n = \frac{g(t)}{(1-t^q)^m}$, $q, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $g(t) \in \mathbb{Z}[t]$

(2) wenn (P, C) eine minimale proj. Auflösung von A ist (d.h. C_n enthält keinen nichttrivialen projektiven direkten Summanden, alle $n \geq 1$), dann ist $\tilde{\mathcal{E}}_n(A) = \tilde{\mathcal{E}}_n(P)$, alle $n \geq 0$;

(3) zwei minimale proj. Auflösungen sind im selben Genus (als Komplexe über A).

Nun sei $\mathcal{E}_n(A) = \inf \{ \tilde{\mathcal{E}}_n(E) \mid \text{alle } \underline{\text{freien}} \text{ Aufl. } E_* \text{ von } A \}$.

Immer gilt folgendes:

(4) $\tilde{\mathcal{E}}_n(A) \leq \mathcal{E}_n(A) \leq \tilde{\mathcal{E}}_n(A) + 1$;

(5) $\sum_{n\geq 0} \varepsilon_n(A)t^n$ hat die gleiche rationale Form wie die Reihe für $\tilde{\varepsilon}(A)$.

Nun beweist man (1) mit Anwendung einer Formel von Swan die erlaubt $\tilde{\varepsilon}(A)$ in Verbindung mit der modularen Darstellungstheorie von G zu bringen. Leider scheint es keine solche Formel für $\varepsilon(A)$ zu geben. Daher muß (5) durch einen Vergleich der Funktionen $\varepsilon(A)$ und $\tilde{\varepsilon}(A)$ bewiesen werden. Die Methode geht über die projektive Klassengruppe $K(\mathbb{Z}G)$: hier werden Invarianten $\sigma_n(A)$ definiert, die Elemente verschiedener Quotientengruppen $K(\mathbb{Z}G)/S_{n+1}$ sind. Es zeigt sich daß

(6) $\sigma_n(A)=0 \iff \varepsilon_n(A) = \tilde{\varepsilon}_n(A)$.

(7) $\exists$ stabil freie Auflösung (E,K) von A so daß $\tilde{\varepsilon}_n(E)=\varepsilon_n(A)$ für alle $n\geq 0$.

(8) Ist A periodisch, von projektiver Periode q, dann hat A die freie Periode $rq \iff \sigma_{rq-1}(A)=0$.

KWG.

Elliptische Kurven und Modulformen

Winfried Kohnen (Münster), 14.10.88

Einer elliptischen Kurve $E/\mathbb{Q}$ ordnet man zwei Invarianten zu, einmal den Rang g der Mordell-Weil-Gruppe $E(\mathbb{Q})$ und zum anderen die Hasse-Weil'sche L-Funktion $L(E,s)$. Nach einer Vermutung von Shimura-Taniyama-Weil sollte $L(E,s)$ gleich der L-Funktion einer holomorphen Spitzenform vom Gewicht 2 auf $\Gamma_0(N)$ (N = Führer von $E/\mathbb{Q}$) sein, insbesondere also eine holomorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}$ besitzen und einer Funktionalgleichung unter $s \mapsto 2-s$ mit Wurzelzahl $\varepsilon = \pm 1$ genügen. Die Birch-Swinnerton-Dyer-Vermutung (BSD) besagt dann, daß die Verschwindungsordnung r von $L(E,s)$ bei $s=1$ gleich g ist.

Beide Vermutungen sind i.a. unbewiesen. In den letzten 11 Jahren hat es jedoch bedeutende Teilresultate im Hinblick auf BSD gegeben:

1) Sei $E/\mathbb{Q}$ eine CM-Kurve. Dann gilt $r=0 \Rightarrow g=0$ (Coates-Wiles, 1977)

ii) Sei $E/\mathbb{Q}$ modular. Dann gilt

1.) $r=1$ und $\varepsilon=-1 \Rightarrow g\geq 1$ (Gross-Zagier, 1985)

2.) $r=0 \Rightarrow g=0$ (dies folgt aus einer Arbeit von Kolyvagin (1988) über die Endlichkeit der Tate-Shafarevic-Gruppe und $E(\mathbb{Q})$ in Kombination mit dem Satz von Gross-Zagier und angekündigten Resultaten von Friedberg - Bump - Hoffstein).

Im letzten Teil des Vortrags wurde berichtet über einen Satz von Gross-Zagier-K. (1987), nach dem (unter den gleichen Voraussetzungen wie bei ii), 2.)) alle "Heegner-Punkte" auf einer Geraden in $E(\mathbb{Q})\otimes\mathbb{R}$ liegen. In den Beweis geht wesentlich die Theorie der Jacobischen Modulformen ein.

Winfried Kohnen

Behaviour of solutions of the Dirichlet problem in potential theory

Ivan Netuka, Charles University, Prague, Czechoslovakia

The talk is mainly devoted to the behaviour (near an irregular boundary point) of the Perron-Wiener-Brelot solution of the generalized Dirichlet problem on an open set. For an arbitrary lower bounded resolutive boundary condition, the solution possesses a fine limit (i.e. considering the topology making all potentials continuous) which can be evaluated as the integral with respect to the balayage of the Dirac measure. In the case of bounded functions the result was, under various generality, established by H. Cartan, M. Brelot, E. Smyrnélis and, H. Bauer and W. Hansen.

The relationship of resolutivity and integrability with respect to the [illegible] measure is shown to be different for the Laplace equation and the heat equation. Related questions (e.g. behaviour along maximal sequences and outside a common or thin set) are also discussed.

The results are obtained in the context of harmonic spaces including a wide class of PDE's of elliptic and parabolic type.

In the talk, basic notions of modern potential theory (e.g. harmonic spaces, fine topology, P-W-B-solution of the Dirichlet problem...) are recalled and new results concerning the fine behaviour are presented in the second part of the talk.

21/10/1988 Ivan Netuka

Orthogonal polynomials and combinatorics
(How to calculate linearization coefficients) 28.10.88

Dominique Foata, Université de Strasbourg

Let $(p_n(x))$ be a sequence of orthogonal polynomials with respect to a weight function w. The linearization coefficient problem deals with the evaluation of the integral $\int \prod_{i=1}^{k} p_{n_i}(x)\, dw$ for the classical orthogonal polynomials, such as Hermite, Laguerre, Jacobi, Meixner, Krawtchouk, ... Besides analytical results there is a combinatorial method that has been successful in the past ten years. The method consists of interpreting $\int \prod_i p_{n_i}(x)\, dw$ as a generating function for some combinatorial structures – mainly (generalized) derangements – and of deducing from this interpretation the classical

positivity properties for the integral $\int \prod_i P_{n_i}(x)\,d\omega$. The method has been successful for the Hermite polynomials (Gillis), the Laguerre (Zeilberger and the author), the Meixner and Krawtchouk polynomials (Askey, Zeng). For the Jacobi polynomials it seems that the formidable formula for the foregoing integral found by Rahman (1982) is out of scope by combinatorial methods.
An example of a combinatorial method is presented, namely the β-extension of the MacMahon Master Theorem.

Dominique Foata

KLASSENZAHLEN UND K_2

J. Hurrelbrink, Louisiana State University
Baton Rouge, La. 70803 USA

Es wurden Fragen, die Idealklassenzahlen betreffen, in Beziehung gesetzt zu Fragen nach der Struktur des zahmen Kerns K_2.

Seien p, $\frac{p-1}{2}$ Primzahlen, $F = \mathbb{Q}(\zeta_p)$, $F^+ = \mathbb{Q}(\zeta_p + \zeta_p^{-1})$.
Für die Parität der Klassenzahl $h(F)$ von F gilt dann:

$h(F)$ ist ungerade

$\iff$ 2-prim $K_2(\mathcal{O}_{F^+})$ ist elementar abelsch vom Rang $\frac{p-1}{2}$

$\iff$ $2^{\frac{p-7}{2}} \parallel \zeta_{F^+}(-1)$.

Die Frage, ob $h(F)$ ungerade ist, ist zu bejahen, falls 2 oder -2 Primitivwurzel modulo $\frac{p-1}{2}$ ist.

Jürgen Hurrelbrink
4. 11. 1988

Paley-Wiener theorems for Symmetric Spaces

Mogens Flensted-Jensen
Royal Veterinary- and Agricultural University,
Copenhagen

A joint work with P. Delorme giving the first step towards a Paley-Wiener theorem for a non-Riemannian symmetric space G/H. If K is a maximal compact subgroup of G, $\mathfrak{a}$ a Cartan subspace ~~of~~ for G/H.

Theorem Let $\psi \in PW(\mathfrak{a}^*)^W$, $\mu \in \hat{K}_{K\cap H}$ then exists a unique function $f \in C_c^\infty(G/H)$ such that

$$\pi(f)v_0 = \psi(\lambda) P_\mu v_0$$

for all spherical representations π and spherical vectors v_0 of type λ.

Mogens Flensted-Jensen

(11. 11. 88)

Zur konstruktiven algebraischen Zahlentheorie

M. Pohst, Universität Düsseldorf

Es werden algorithmische Methoden zur Einheiten- und Klassengruppenberechnung algebraischer Zahlkörper F vorgestellt. Sie erfordern die Berechnung ganzer Zahlen von F mit

a) kleiner Absolutnorm,

b) vorgegebener Norm und vorgegebenen Schranken für die Konjugiertenbeträge.

Diese lassen sich mit Verfahren aus der Geometrie der

Zahlen bestimmen (i.w. Gitterreduktion und Berechnung kurzer Gittervektoren). Für die Klassengruppenberechnung ist zudem die Entwicklung einer Idealarithmetik von Bedeutung. Die vorgestellten Algorithmen sind in einem Softwarepaket in Düsseldorf implementiert. Ausgewählte Beispiele demonstrieren ihre Effizienz.

18.11.88 M. Pohst

Über ziemlich häßliche Mannigfaltigkeiten

V. Puppe, Universität Konstanz

Seit etwa 1972 ist von verschiedenen Autoren gezeigt worden, daß es viele geschlossene (d.h. kompakte, ohne Rand) orientierbare Mannigfaltigkeiten gibt, welche keine Symmetrie besitzen, d.h. keine nicht-triviale Operation einer endlichen Gruppe zulassen. Das Vorhandensein einer nicht-trivialen, oft sehr komplizierten Fundamentalgruppe ist bei diesen Beispielen entscheidend. Einfach-zusammenhängende Beispiele sind bisher nicht bekannt.

Die Beziehung zwischen P.A.-Smith-Theorie und Deformation von Algebren kann man jedoch ausnutzen, um folgendes Ergebnis zu erhalten:

Satz: Es existieren einfach-zusammenhängende, geschlossene orientierbare, 6-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeiten M, so daß jede geschlossene, orientierbare Mannigfaltigkeit $\tilde{M}$ mit $H^*(M;\mathbb{Q}) \cong H^*(\tilde{M};\mathbb{Q})$ höchstens für endlich viele Primzahlen p eine nicht-triviale $\mathbb{Z}/p$-Operation zuläßt.

25.11.88 V. Puppe

Homotopy Functors as Differentiable Functions

T. Goodwillie, Brown University

<u>Theorem</u> Waldhausen's K-theory functor A satisfies

$$A(\Sigma Y) \sim A(*) \times \prod_{n\geq 1} Q\big(\Sigma(\underbrace{Y\wedge\dots\wedge Y}_{n})_{h(\mathbb{Z}/n)}\big)$$

for connected spaces Y. (Here the subscript hG denotes the operation $(?)\underset{G}{\wedge}(EG)_+$.) More generally for simply-connected X $A(X)$ is the limit of a tower $\dots \to P_n \to P_{n-1} \to \dots \to P_0$

where $P_0 = A(*)$ and where for $n>0$ the fiber of $P_n \to P_{n-1}$ is a functor of X of the form

$$(*) \qquad X \longmapsto \Omega^\infty\big((\underline{\underline{C}}_n \wedge (\underbrace{X\wedge\dots\wedge X}_{n}))_{h(\mathbb{Z}/n)}\big),$$

$\underline{\underline{C}}_n$ being a spectrum on which the group $\mathbb{Z}/n$ acts.

In fact, $\underline{\underline{C}}_n$ is a sphere spectrum of dimension $-(n-1)$ given by a virtual representation of $\mathbb{Z}/n$ (the negative of the reduced regular representation).

There is a very general phenomenon here; any homotopy functor F (from spaces to spaces) which satisfies a certain mild hypothesis* must be given by a tower of functors whose n-th layer has the form $(*)$ above, except that in general $\mathbb{Z}/n$ must be replaced by the full symmetric group. The convergence of the tower only holds for highly-connected spaces (when $F = A$ this means 1-connected). In general one determines this "radius of convergence" as a

* called "analyticity"

by-product while verifying the analyticity.

Thomas G Goodwillie

Reelles Spektrum und reelle algebraische Geometrie

E. Becker (Dortmund)

Das reelle Spektrum Sper A eines kom. Ringes A ($1 \in A$) ist wie folgt definiert:

$$\mathrm{Sper}\, A = \{ (\mathfrak{p}, P) =: \alpha \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A,\ P \text{ Anordnung von } k(\mathfrak{p}) := \mathrm{Quot}(A/\mathfrak{p}) \}$$

Für $f \in A$, $\alpha \in \mathrm{Sper}\, A$ sei $f(\alpha) = f + \mathfrak{p} \in k(\mathfrak{p})$. Damit ist erklärt: $f(\alpha) \geq 0 :\Leftrightarrow f + \mathfrak{p} \geq_P 0$; dito $f(\alpha) = 0$, $f(\alpha) > 0$

Per def. bilden die Mengen $D(f) := \{ \alpha \in \mathrm{Sper}\, A \mid f(\alpha) > 0 \}$, $f \in A$, eine Subbasis der Topologie. Sper A ist in dieser Topologie quasikompakt. Dieser Raum wurde ca 1979 von M. Coste und M.-F. Coste-Roy eingeführt. Der Zusammenhang mit der reellen Geometrie ergibt sich wie folgt: man betrachte z. Bsp.

$$\Phi\ \mathbb{R}^n \to \mathrm{Sper}\, \mathbb{R}[T_1, \ldots, T_n], \quad a \mapsto (\mathfrak{m}_a, \mathbb{R}^2),$$

wobei $\mathfrak{m}_a = \{ f \in \mathbb{R}[\ ] \mid f(a) = 0 \}$ und $\mathbb{R}^2$ die einzige Anordnung von $k(\mathfrak{m}_a) = \mathbb{R}$ ist.

Φ ist bzgl. der euklidischen Topologie eine Einbettung. Der Zusammenhang zwischen $\mathbb{R}^n$ und Sper $\mathbb{R}[\,]$ ist sehr eng, z. Bsp. ist $\mathbb{R}^n$ dicht in Sper $\mathbb{R}[T_1,\dots,T_n]$. Der Beweis derartiger Aussagen ist im wesentlichen Artin's Lösung des 17. Hilbertschen Problems. Als Anwendung des reellen Spektrums wird folgender Satz von Bröcker, Scheiderer (unabhängig, 1988) vorgestellt:

Jede basis-offene semi-algebraische Menge $S = S(f_1,\dots,f_r)$

$= \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_1(x) > 0, \dots, f_r(x) > 0\}$ kann durch n strikte Ungleichungen beschrieben werden: $S = S(g_1,\dots,g_n)$.

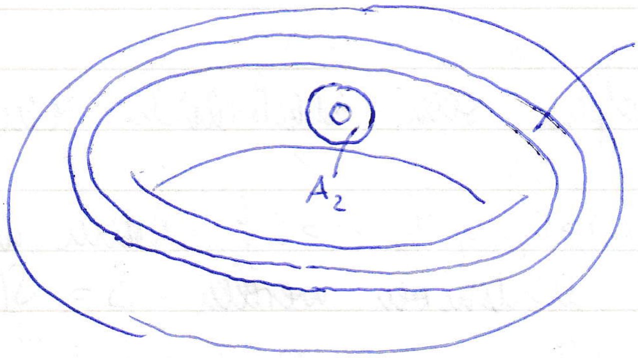
Weiter werden Ausdehnungen auf semianalytische Mengen erwähnt, die Rolle von Sper A und einer passenden Garbe für eine allgemeine Theorie und die Bedeutung von Sper A für Kompaktifizierung reell-algebraischer Mengen gestreift.

9.12.88. E. Becker

Ein periodischer Fluß auf dem $\mathbb{R}^3$.

D. B. A. Epstein stellte 1976 die Frage, ob sich $\mathbb{R}^3$ durch einfach geschlossene Kurven blättern läßt. Im Vortrag wurde eine differenzierbare (aber nicht stetig differenzierbare) Blätterung des $\mathbb{R}^3$ durch einfach geschlossene C^∞-Kurven vorgestellt. Es bleibt die Frage, ob es eine C^1-Blätterung des $\mathbb{R}^3$ durch einfach geschlossene Kurven gibt.

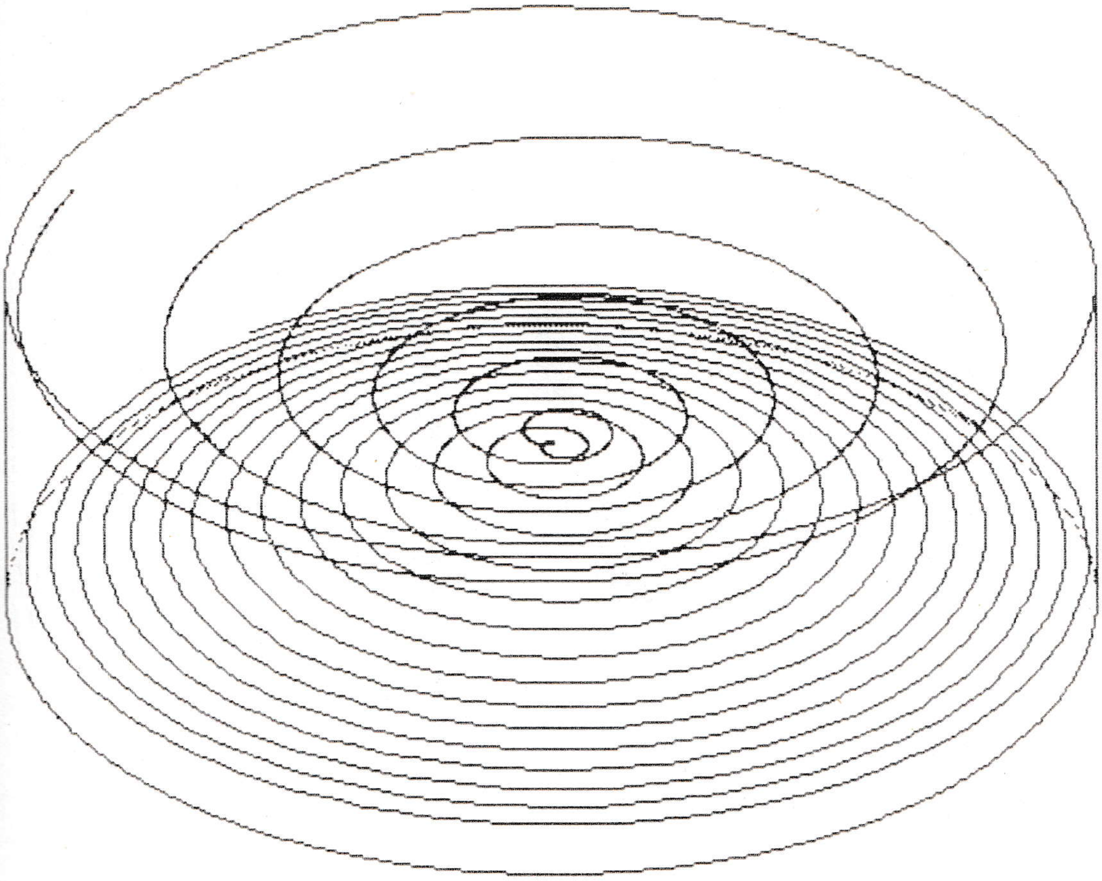
Der wesentliche Schritt der Konstruktion der Blätterung besteht darin, auf dem Volltorus $D^2 \times S^1$, von dessen Rand das Komplement zweier Kreisringe A_1, A_2 entfernt wurde, eine Blätterung durch einfach geschlossene Kurven zu finden, die die Produktblätterung auf den Kreisringen A_1, A_2 im Rand $\partial(D^2 \times S^1)$ induziert. Dabei ist A_1 eine Umgebung einer Longitude, während A_2 eine Umgebung einer Kurve ist, die eine Kreisscheibe im Rand des Volltorus berandet.



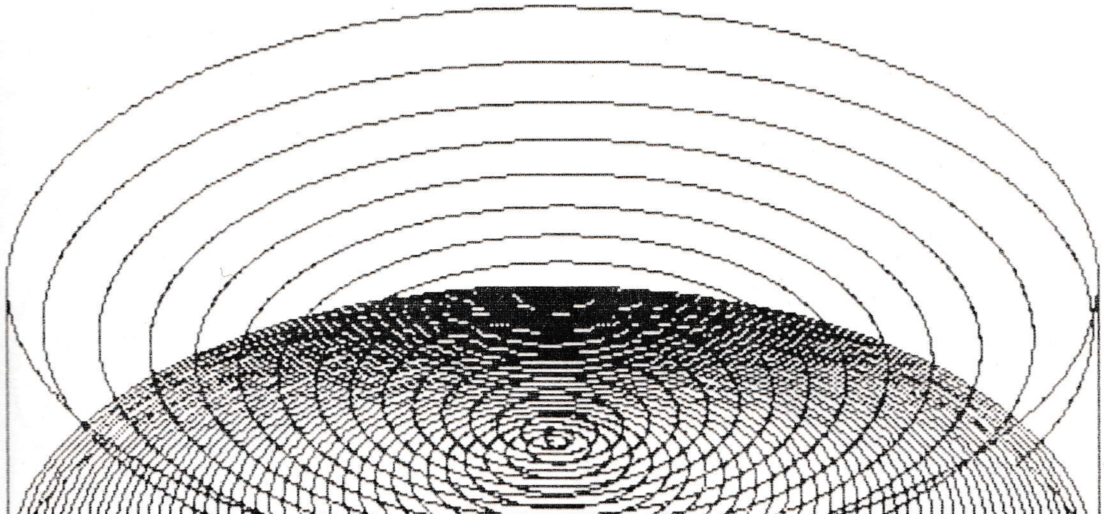
Das unten stehende Bild beschreibt die Blätterung in einem ~~nach~~ Zylinder über A_2 im Innern des Volltorus.

Dabei wurde der Zylinder zur besseren Veranschaulichung stark aufgeblasen.

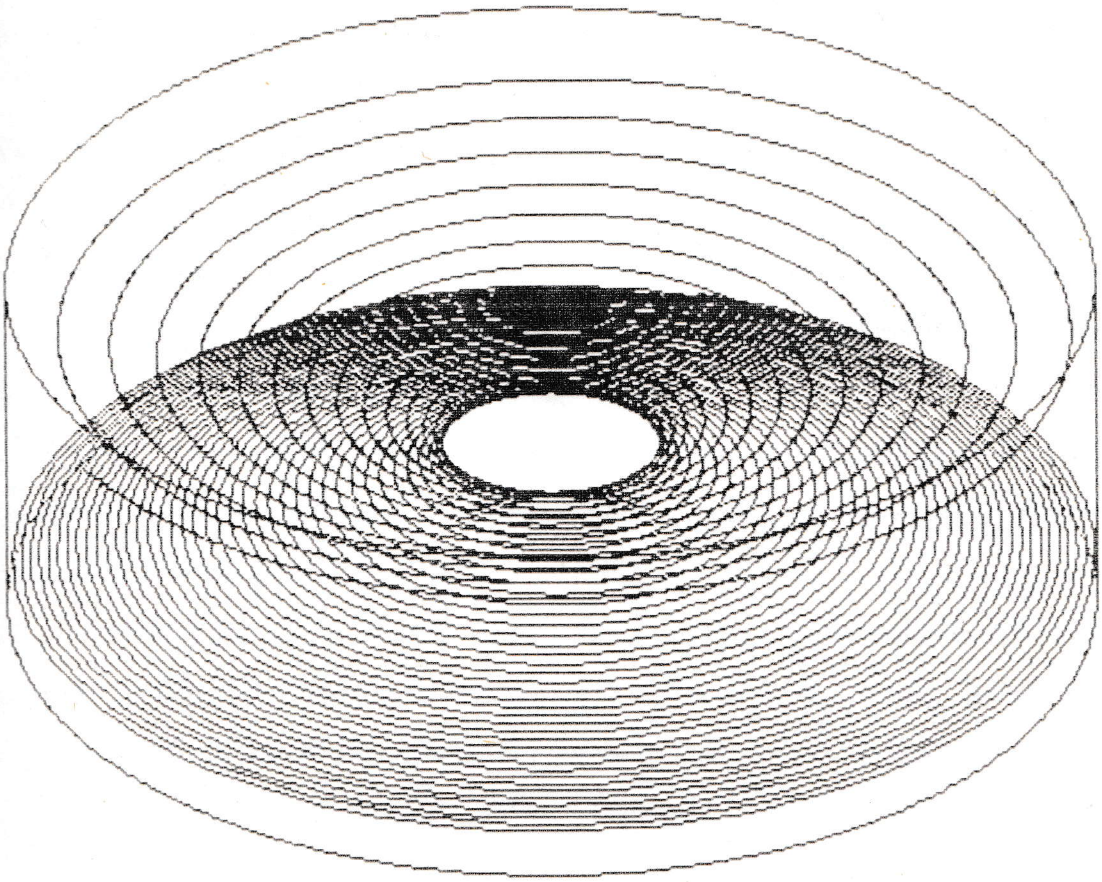
17.12.1988 Elmar Vogt



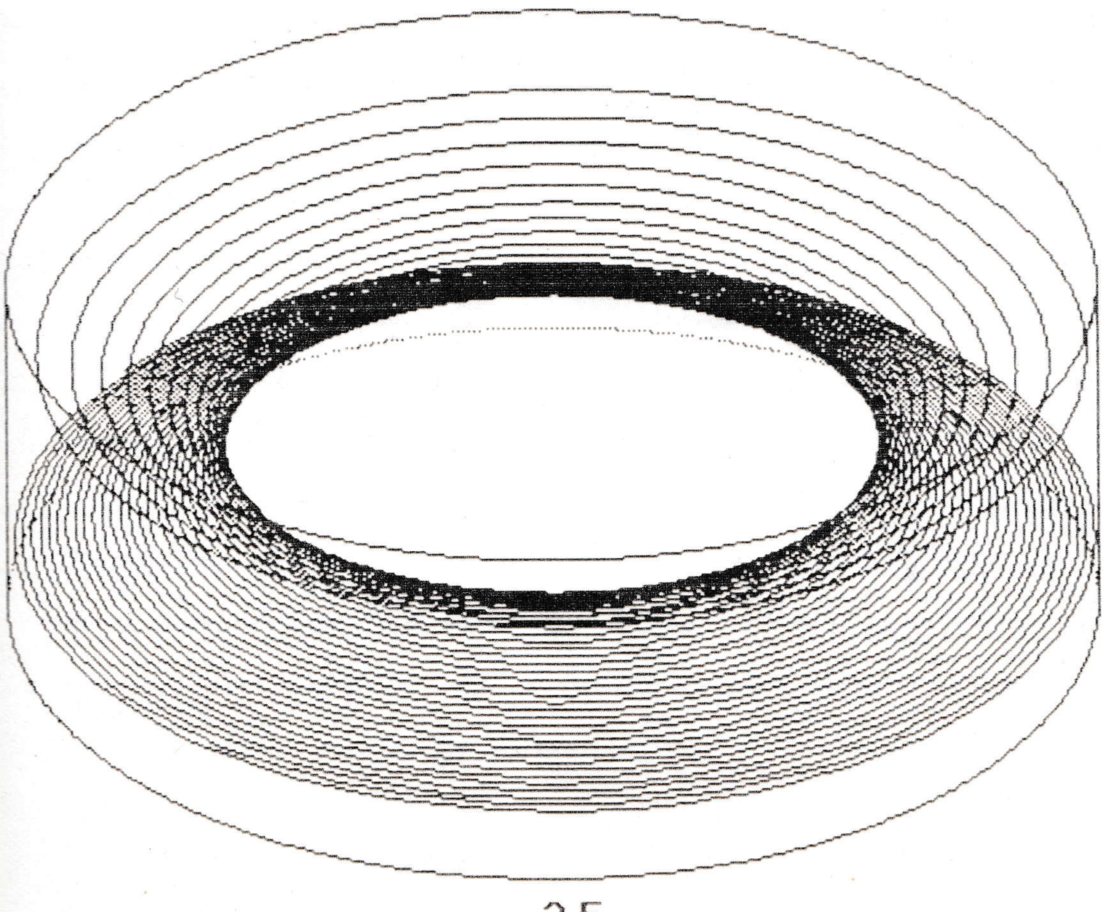
−2.0



−2.5



- 2.5



-2.5