12. Januar 1990

Der Banachsche Fixpunktsatz für maximal bewertete Körper

Es wird der folgende Satz bewiesen:

<u>Satz</u> Sei (K, v) ein maximal bewerteter Körper und $A: K \to K$ eine kontrahierende Abbildung (d.h. $\forall_{x \neq y \in K}\ v(Ax - Ay) < v(x-y)$). Dann hat A genau einen Fixpunkt in K.

Dieser Satz bleibt richtig, wenn man an Stelle des Körpers eine maximal bewertete Gruppe (G, v) betrachtet. Hierbei heißt eine Gruppe G bewertet, wenn Γ eine angeordnete Menge ist mit $0 \notin \Gamma$ und $0 < \Gamma$, und $v: G \to \Gamma \cup \{0\}$ eine surjektive Abbildung mit den folgenden Eigenschaften ist: $v(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$, $v(a) = v(-a)$, $v(a+b) \leq \mathrm{Max}\{v(a), v(b)\}$. (G, v) heißt maximal bewertet, wenn jede pseudokonvergente Folge aus G einen Pseudolimes in G hat.

Mit einem Gegenbeispiel wird begründet, daß der Satz nicht richtig bleibt, wenn man „maximal bewertet" durch „vollständig bzgl. der Bewertungstopologie" ersetzt.

[illegible] (München)

18. Januar 1990

Eine Vereinheitlichung der Theorie der Gröbnerbasen auf der Grundlage des NAGATA'schen Prinzips der Idealisierung

Seit der Begründung der Theorie der Gröbnerbasen durch B. Buchberger im Jahre 1965 wurden zahlreiche Erweiterungen dieser Theorie auf allgemeinere algebraische Strukturen vorgenommen. Beispiele solcher Strukturen sind Moduln über Polynomringen, Einhüllende von Liealgebren und Algebren von auflösbarem Typ. Es gab verschiedene Bestrebungen der Vereinheitlichung der Theorie, der wohl eleganteste Ansatz ist die Nutzung einer graduierten Struktur, er geht auf ROBBIANO zurück. Unberücksichtigt bleibt jedoch auch in ihm die Gröbnerbasistheorie für Moduln. Ein weiterer Nachteil des ROBBIANO'schen Ansatzes ist der weitgehende Verlust der Konstruktivität, bis hin zur Nichtexistenz endlicher Gröbnerbasen.
Der hier vorgestellte Ansatz stellt eine Einschränkung des ROBBIANO'schen dar. Er ist so abgefaßt, daß gewisse Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen getroffen werden können und daß er einen Kritische Paare / Vervollständigungsalgorithmus zur Berechnung von Gröbnerbasen liefert. Eine wesentliche Eigenschaft der untersuchten Klasse von Ringen ist, daß Faktorisierung nach einem zweiseitigen Ideal und Adjunktion spezieller Monoide nicht aus ihr herausführen.
Nagata zeigte, wie die Untermoduln eines gegebenen Moduls in eineindeutiger Weise den Unteridealen eines Ideals eines bestimmten Ringes zugeordnet werden können. Dieser Ring ist isomorph zu einem Restklassenring eines Monoidrings über dem Grundring des Moduls. Falls der Grundring also in der untersuchten Klasse liegt, so liegt auch der neue Ring darin und erlaubt eine algorithmische Gröbnerbasisberechnung. Die Gröbnerbasistheorie der Moduln wird auf diese Weise auf die von Ringen zurückgeführt.

Joachim Apel
Leipzig

Die Hecke-Algebra im Unendlichen und invariante Differentialoperatoren

Die klassischen Hecke Operatoren können als Konvolutionsoperatoren an den endlichen Stellen von $G(\mathbb{A})$ für eine reduktive Gruppe G über einem Zahlkörper F mit dessen Adele-Ring $\mathbb{A}$ dargestellt werden. Die entsprechende Bildung an den unendlichen Stellen führt zu gewissen kanonischen Faltungsalgebren. Ist G eine halbeinfache Lie Gruppe, K maximal kompakte Untergruppe von G, so kann man allgemein zu jeder irreduziblen Darstellung τ von K invariante Integraloperatoren (= Faltungsoperatoren) und invariante Differentialoperatoren auf den Schnitte des Bündels $G \times_K V_\tau \to G/K$ betrachten. Im Fall $\tau = 1$ ist $G \times_K V_\tau = G/K \times \mathbb{C}$ und in diesem Fall sind folgende Resultate bekannt: Die Algebra der invarianten Integraloperatoren $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_\tau$ ist kommutativ, ebenso die Algebra der invarianten Differentialoperatoren $\mathcal{D}_1$, jede Eigenfunktion von $\mathcal{D}_1$ ist eine von $\mathcal{I}_1$ und umgekehrt. $\mathcal{D}_1$ ist isomorph zu $\mathbb{C}[A]^W$, wobei A ein maximaler $\mathbb{R}$-split Torus und W die Weyl Gruppe von G ist. Ferner besitzt jedes $D \in \mathcal{D}_1$, $D \neq 0$ eine Fundamentallösung.

Nun zum allgemeinen Fall: Ist $U(\mathfrak{g})^K$ die Algebra der links-G-invarianten und rechts K-invarianten Differentialoperatoren auf G so gibt es einen surjektiven Algebrenhom $\varphi_\tau : U(\mathfrak{g})^K \to \mathcal{D}_\tau$ und es gilt $\bigcap_\tau \ker \varphi_\tau = 0$. Das heißt man erhält Information über $U(\mathfrak{g})^K$ aus solchen über $\mathcal{D}_\tau$. Dies ist wichtig für die Darstellungstheorie, da sich letztlich. Durch $U(\mathfrak{g})^K$ nach einem Satz von Harish Chandra die Darstellungen von G parametrisieren.

$\mathcal{D}_\tau$ ist gegeben durch ein Weyl-Gruppe-Invariantenproblem, doch anders als im Falle $\tau = 1$ ist allgemein die Abbildung $R : \mathcal{D}_\tau \to \{\text{Weyl-Invariante}\}$ hier lediglich injektiv. Doch sowohl $\mathcal{D}_\tau$ als auch die Weyl-Invariante besitzen eine natürliche Graduierung und man kann zeigen, daß die Abbildung R für hohe Grade surjektiv wird.

Die Algebra $\mathcal{D}_\tau$ ist nicht immer kommutativ. Man kann zeigen, daß $\mathcal{D}_\tau$ kommutativ ist $\Leftrightarrow$ $\mathcal{I}_\tau$ kommutativ $\Leftrightarrow$ τ tritt in jeder irred. Darst. von G mit Vielf. ≤ 1 auf $\Leftrightarrow$ $\tau|_M$ hat Multiplizität 1, wobei M der Zentralisator von A in K ist.

Die letzte Bedingung (und damit alle) ist z.B. im Falle $G = SO(n,1)$, $SU(n,1)$ erfüllt. Man kann zeigen, daß dies die einzigen Fälle sind.

Ferner kann man einen Homomorphismus γ von $\mathcal{D}_\tau$ auf eine Algebra von Matrixwertigen Polynomen definieren und nennt D regulär, wenn $\det \gamma(D) \neq 0$. Ist D regulär, so besitzt D eine Fundamentallösung. Im Falle $G = SO(n,1)$ führt die Kommutativität von $U(\mathfrak{g})^K$ dazu, daß die Selbergsche Spurformel für $\tau = \Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k} = \text{Lie } K$, $\mathfrak{g} = \text{Lie } G$ relativ leicht zugänglich ist. Man definiert die entsprechende Selberg-Zetafunktion $Z_p(s)$ und stellt fest, daß die Ruelle-Zetafunktion $R(s) = \prod_\gamma \left(1 - e^{-s\,l(\gamma)}\right)$, γ durchläuft alle Primgeodätische von $\Gamma\backslash X$, $\Gamma < G$ diskret, kokompakt, torsionsfrei, sich als alternierendes Produkt von Selberg-Zetafunktionen schreiben läßt, was uns die genaue Analysis der Fortsetzung zu R, ihrer Pole und Nullstellen ermöglicht.

Anton Deitmar 26. 1. 90

Vektorfelder auf der Heisenberggruppe 29. 1. 90

Auf der Heisenberggruppe H ist eine Kontaktstruktur definiert. $\mathring{T}H$ ist das Unterbündel des Tangentialbündels TH, welches aus den horizontalen Vektoren besteht. $\mathring{T}H$ wird aufgespannt durch die linksinvarianten Vektorfelder $X = \frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial t}$ und $Y = \frac{\partial}{\partial y} - 2x\frac{\partial}{\partial t}$. Die Kontakttransformationen f sind diejenigen Transformationen, die $\mathring{T}H$ invariant lassen: $f_* \mathring{T}H = \mathring{T}H$.

Ein Vektorfeld v auf H erzeugt genau dann einen Fluss von Kontakttransformationen f_s, falls v in der Form $v = -\frac{1}{4}(Yp)X + \frac{1}{4}(Xp)Y + pT$ dargestellt werden kann (P. Libermann). Im Vortrag wird die Frage untersucht, wann ein Vektorfeld v auf der Heisenberggruppe einen Fluss von quasikonformen Abbildungen erzeugt.

$f: H \to H$ ist K-quasikonform, falls f ein f.ü. differenzierbarer Homöomorphismus ist, welcher auf fast allen Fasern von horizontalen Faserungen absolut stetig ist und eine Distorsionsbedingung erfüllt:

$$\frac{\max\{|f_* V| : V \in \mathring{T}_pH,\ |V| = 1\}}{\min\{|f_* V| : V \in \mathring{T}_pH,\ |V| = 1\}} \le K \quad \text{f.ü.}$$

Satz (Korányi - R)

Ist $v = \frac{1}{4}(Yp)X + \frac{1}{4}(Xp)Y + pT$ mit $|(XY+YX)p| \le c$ und $|(X^2 - Y^2)p| \le c$, so ist der Fluss f_s $K(s)$-quasi[konform] mit $K(s) \le e^{\text{konst}\cdot c\,|s|}$.

HM Reimann, Bern

The solution of the restricted Burnside's problem for groups of prime power exponent. 2.2.90.

The restricted Burnside's problem sounds as follows: is it true that there are only finitely many finite m-generated groups of exponent n? (- the RBP(m,n)).
A. I. Kostrikin solved the RBP for groups of prime exponents. In our talk we discuss the solution of RBP (January, 1989) for groups the exponents of which are powers of primes. By the factorization theorem of Ph. Hall and G. Higman it follows that the RBP has a positive solution in the class of soluble groups, hence (by the celebrated Feit-Thompson theorem) for groups of odd exponents. Among other related results we mention
Theorem Any Lie ring which satisfies some Engel identity $[x,y],y],\dots,y]=0$, is locally nilpotent.
Theorem Any periodic pro-p-group is locally finite.
If we assume that the final classification of finite simple groups has been achieved then from the last theorem it follows that any periodic compact group is locally finite.
Efim Zelmanov (Novosibirsk).

Loop groups and subfactors 2.2.90

In 1985 the complete classification of the von Neumann algebras occurring "in nature" was obtained. These are the so-called hyperfinite ones. Prior to that Vaughan Jones had made the first decisive steps in investigating the Galois theory of the subalgebras of hyperfinite algebras. Unexpectedly his work gave rise to a representation of the Hecke algebra with an associated trace having the Markov property. In turn this led to his knot polynomial and its variants, along with deep links with other areas in mathematics and physics. These include exactly solved models in statistical mechanics, conformal field theory and topological quantum field theory. (A key rôle is played here by vertex operators which have lately also been used to prove the Conway-Norton 'monstrous moonshine' conjectures by R. Borcherds) These interdisciplinary interactions are very much two-way. We explain how positive energy representations of loop groups and $\mathrm{Diff}^+(S^1)$ lead naturally to examples of hyperfinite subfactors, which promise to exhaust most of the known families of examples due to H. Wenzl. This work, which is being carried out with V. Jones, gives a simple analytic method of constructing subfactors, avoiding the somewhat mysterious method of excluding 'ghost vectors' from rings of invariants of quantum groups at roots of unity. Instead this detailed combinatorics must be replaced by a detailed knowledge of the analytic properties of the vertex operators of Tsujiya and Kanie.

Antony Wassermann (Oxford)

Homologische Störungstheorie und Gruppencohomologie 9.2.1990

In der Gruppencohomologie stößt man häufig auf gefilterte Kettenkomplexe meist mit zusätzlicher Struktur versehen. Die Standardmethode zur Untersuchung solcher Objekte ist die zugehörige Spektralsequenz. In der Sprache der Geometrie kann man diesen Zugang als die analytische Methode bezeichnen. Die homologische Störungstheorie ist aus der Einsicht entstanden, daß eine Filterung sich zur Konstruktion neuer Objekte benutzen läßt. Man kann diesen Zugang als die synthetische Methode bezeichnen. Ist beispielsweise eine Gruppenerweiterung $1 \to N \to G \to K \to 1$ und sind ferner freie Auflösungen $M(N)$ und $M(K)$ von $\mathbb{Z}$ über $\mathbb{Z}N$ bzw. $\mathbb{Z}K$ angegeben, so läßt sich aus dem Tensorprodukt $M(N) \otimes M(K)$ durch „Störung" der Struktur eine freie Auflösung $M(G)$ von $\mathbb{Z}$ über $\mathbb{Z}G$ konstruieren. Im Rahmen der homologischen Störungstheorie kann eine explizite Konstruktion für das „gestörte" Differential auf $M(G)$ angegeben werden. Diese Methode gestattet z. B. die Berechnung der modulo p Cohomologieringe metazyklischer Gruppen. Die ganzzahlige Cohomologie vieler metazyklischer Gruppen läßt sich ebenfalls bestimmen. Weitere numerische Resultate wurden bisher erzielt in der Cohomologie gewisser nilpotenter Gruppen der Klasse 2.

Johannes Huebschmann (Heidelberg)

On Schur Algebras and Related Algebras

The algebra of polynomials $A(n)$ on the general linear group $GL(n)$ (over a field of characteristic p) decomposes as a coalgebra $A(n) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} A(n,r)$, into homogeneous components. The dual algebras $A(n,r)^* = S(n,r)$, are the Schur algebras. For $r \le n$ there is an idempotent $e \in S(n,r)$ with $eSe \cong K\Sigma_r$, the group algebra of the symmetric group of degree r. This provides a bridge between representations of the general linear groups and symmetric groups: the Schur functor f: mod $S \to$ mod eSe, $fV = eV$. (See JA Green, LNM 830). One can view the Schur algebras as special cases of a general construction which can be applied to any reductive group and (in general) one obtains algebras which are quasi-hereditary, in the sense of Cline, Parshall and Scott. This new interpretation has consequences for the representation theory, one obtains that every projective $K\Sigma_r$-module has a Specht series (more generally every "Young module" has) and also, in the integral theory, that a projective $\mathbb{Z}\Sigma_r$-module is stably a Young permutation module. In the opposite direction, going from Σ_r to $GL(n)$, one obtains that certain Weyl modules have a simple socle (they always have a simple head) and the indecomposability of $\mathrm{Ind}_{\underline{T}_{\mathbb{Z}}}^{\underline{G}_{\mathbb{Z}}}(\mathbb{Z}_\mu)$ for $\underline{G}$ a Chevalley group scheme, $\underline{T}$ the associated torus and μ an integral weight.

Stephen Donkin (QMW, London)

(6.4.90)

Hilbert modular forms, motives and p-adic L-functions.

We discuss arithmetical properties of special values of Euler products $L(M,s) = \prod_{\mathfrak{p}} L_{\mathfrak{p}}(M, N\mathfrak{p}^{-s})$, attached to motives M over a totally real field F (here $\mathfrak{p}$ runs over prime ideals of the maximal order of F, $L_{\mathfrak{p}}(M,X)^{-1} = (1-\alpha^{(1)}(\mathfrak{p})X)\cdots(1-\alpha^{(d)}(\mathfrak{p})X)$ are polynomials of the degree d, equal to the rank of M). Conjecturally, the function $L(M,s)$ satisfies a functional equation, connecting the function $\Lambda(M,s) = L_\infty(M,s)L(M,s)$ with $\Lambda(\check{M}, 1-s)$, where $\check{M}$ is the motive, dual to M, $L_\infty(M,s) = \prod_{p<q} \Gamma_{\mathbb{C}}(s-p)$ the Γ-factor, defined by the Hodge

decomposition $H(M)\otimes\mathbb{C} = \bigoplus M^{p,q}$ for M (for simplicity we assume that $M^{p,p}=0$). The integer m is called critical, if both $L_\infty(M,m)$ and $L_\infty(M^\vee,1-m)$ are finite. Also, for any Hecke character $\chi: \mathbb{A}_F^\times/F^\times \to \mathbb{C}^\times$ of finite order we consider the twist $M(\chi)$ which is a motive over F. Then, there is a conjecture that all of the numbers $\Lambda(M(\chi),s)/c^{(-1)^s}(M(\chi))$ are algebraic, where s is critical, and $c^\pm(M(\chi))$ are periodes of $M(\chi)$, which can be expressed in the form $c^\pm(M(\chi)) = G(\chi)^{-d/2}\prod_\sigma c(\sigma)^{\pm\varepsilon_\sigma(\chi)}$ here product is taken over real embeddings $\sigma: F\to\mathbb{R}$, $c^\pm(\sigma)$ denote the periodes of the original motive M, attached to σ, $\varepsilon_\sigma(\chi)$ denotes the sign of χ at σ, and $G(\chi)$ is the Gauss sum.
We formulate a general conjecture about p-adic interpolation of the above special values.
As an example, we consider the Rankin convolution $L(s,f,g) = \sum_{\mathfrak{n}} C(\mathfrak{n},f)\,C(\mathfrak{n},g)\,N\mathfrak{n}^{-s}$, attached to two Hilbert modular forms f and g where $C(\mathfrak{n},f)$, $C(\mathfrak{n},g)$ are normalized Fourier coefficients of f and g, $\mathfrak{n}$ are integral ideals.
We suppose that f is a primitive cusp form of vector weight $k=(k_1,\dots,k_n)$, and g is a primitive cusp form of weight $l=(l_1,\dots,l_n)$ such that for each i either $k_i<l_i$, or $l_i<k_i$.
This L function can be interpreted in terms of $L(M(f)\otimes M(g),s)$, where $M(f)$ and $M(g)$ are (conjectural) motives, which are associated to f and g such that $L(M(f),s) = \sum_{\mathfrak{n}} C(\mathfrak{n},f)\,N\mathfrak{n}^{-s}$, $L(M(g),s) = \sum_{\mathfrak{n}} C(\mathfrak{n},g)\,N\mathfrak{n}^{-s}$.

We state recent results on algebraicity of the special values of $L(s,f,g)$ and their p-adic interpolation (work in progress with M. Harris).

(20.4.90) A. Panchishkin.

Invariant algebras 3.5.90.

Let $\mathfrak{g}$ be a simple Lie algebra and $V = V(\Lambda)$ a simple $\mathfrak{g}$-module with the highest weight Λ.
In 1968 I.M. Gelfand posed the problem of determining all the Λ's, for which there exists a non-zero $\mathfrak{g}$-invariant structure of algebra on V. Denote by $\Gamma(\mathfrak{g})$ the set of all such Λ's.

Theorem 1. $\Gamma(\mathfrak{g})$ is a finitely generated semigroup under addition.

Theorem 2. If $\mathfrak{g}$ is a simple Lie algebra of type E_6, F_4, E_7 or E_8, then $\Gamma(\mathfrak{g})$ coincides with the semigroup of all the dominant radical weights.

A system of generators of $\Gamma(\mathfrak{g})$ is deterined explicitely in the cases when $\mathfrak{g}$ is a simple Lie algebra of type A_n $n \leq 4$, B_n or D_{2m}.

A. G. Elashvili (Tbilisi. Ins. of Math. Georgien Ac. S.)

Γ - Faktoren arithmetischer Varietäten

Ist X eine glatte, projektive Varietät über $\mathbb{Q}$, so definiert man $2d+1$, $d = \dim X$ L-Funktionen von X durch

$$L(H^w(X), s) = \prod_p \det(1 - Fr_p\, p^{-s} \mid H^w_{et}(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell)^{I_p})^{-1}, \quad \ell \neq p$$

für $0 \leq w \leq 2d$. Es ist wohlbekannt, daß für eine (vermutete) Funktionalgleichung diese L-Funktion durch einen geeigneten Faktor an der ∞-Stelle ergänzt werden muß. Nach Serre hängt dieser nur ab von der Hodge Struktur von $X \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$

über $\mathbb{R}$. Explizit:

$$\Gamma_\infty(H^w(X), s) = \begin{cases} \prod_{p \leq q} \Gamma_\mathbb{C}(s-p)^{h^{pq}} & \text{für } 2 \nmid w \\ \prod_{p<q} \Gamma_\mathbb{C}(s-p)^{h^{pq}} \underset{\frac{w}{2}=p}{} \Gamma_\mathbb{R}(s-\frac{w}{2})^{h^{p,+}} \Gamma_\mathbb{R}(s-\frac{w}{2}+1)^{h^{\frac{w}{2}-}} & \text{für } 2 \mid w \end{cases}$$

wobei $\Gamma_\mathbb{R}(s) = 2^{-1/2}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})$, $\Gamma_\mathbb{C}(s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)$
$h^{pq} = \dim H^{pq}$, $h^{p,\pm} = \dim (H^{pp}, F_\infty^* = (-1)^p \pm$. Im Vortrag wurde unter Benutzung von Ideen von Fontaine eine neue ∞-dimensionale Cohomologietheorie $H^w_{ar}(X)$ konstruiert, welche mit einem Endomorphismus Θ ausgerüstet ist. Mit ihr gilt:

$$\Gamma_\infty(H^w(X), s) = \det{}_\infty\left(\frac{s}{2\pi} - \frac{\Theta}{2\pi} \,\middle|\, H^w_{ar}(X)\right)^{-1}$$

wobei $\det_\infty$ eine geeignete Version der Determinante auf ∞-dimensionalen Räumen bezeichnet, wie sie in der physikalischen Literatur üblich ist.

4.5.90 Christopher Deninger (Münster)

Volumes of non-Euclidean polyhedra

by E. Vinberg (Moscow) 4.05.90

Almost all the known facts about volumes of non-Euclidean polyhedra goes from Lobachevsky (1835) and Schläfli (1858-1860). In the talk, an account of these facts was given and some new formulas were presented.

Contents of the talk:

1. A principle of the analytical continuation for the volumes of spherical and hyperbolic simplices considered as functions of dihedral angles.
2. The reduction formulas of Poincaré and Schläfli.
3. The reduction formula of Gauss-Bonnet type.
4. The Schläfli formula for the differential of the volume.
5. The Lobachevsky function.

6. The Lobachevsky formula for the volume of a double-rectangular tetrahedron.
7. A formula for the volume of a pyramid with the apex at infinity.

Э. Винберг

Die Zahl der Gleichungen einer determinantiellen Varietät

Wir betrachten die determinantiellen Varietäten $V_t = \{\varphi \in \mathrm{Hom}_K(K^m, K^n) : \text{rang } \varphi < t\}$. V_t ist offensichtlich das Nullstellengebilde des Ideals I_t, das von den $t \times t$-Unterdeterminanten einer $m \times n$-Matrix von Unbestimmten erzeugt wird. Einen Zugang zur Struktur dieser Ideale liefert die Theorie der Algebren mit "Straightening Law", und aus dieser gewinnt man auf einfache Weise die obere Schranke $mn - t^2 + 1$ für die Anzahl der Gleichungen, die V_t minimal beschreiben. Mit Hilfe von Methoden der algebraischen Geometrie in Charakteristik 0 bzw. der étalen Kohomologietheorie in positiver Charakteristik kann man dann zeigen, daß diese Schranke optimal ist: Die Minimalzahl der Gleichungen, die V_t beschreiben, ist $mn - t^2 + 1$.

Winfried Bruns
Osnabrück/Vechta

(14.5.90)

Algebraic groups and number theory
by V. P. Platonov (Minsk) 14.05.90

The talk is dedicated the Investigation of the properties of algebraic groups defined over algebraic number field K. Main results are concentrated about old problem on the structure of the group G_K of K-rational points of the simple algebraic group G. The center question here is a my conjecture (1974) which was formulated on the ICM in Vancouver: let G be a simple K-defined algebraic group; G_K is a projectively simple iff for $v \in V^K$ the local groups G_{K_v} are projectively simple. The talk is contained the exposition new results on this conjecture by Platonov, Margulis, Rapinchuk, Chernousov, Raghunathan, Borovoy, Tomanov ... . Also was discussed the connection between my conjecture and Hasse' norm principle for finite extensions of algebraic number field.

The conjecture on the projective simplicity is proved recently almoust completely for simple algebraic groups not of type A_n.

V. Platonov

Topological Applications of Mackey functors
by L. Gaunce Lewis, Jr. (Syracuse / Göttingen) 18.05.90

Mackey functors appear in two ways when one uses equivariant cohomology theories to study spaces with an action of a finite group G. First, the coefficient ring of a well-behaved equivariant cohomology theory is a Mackey functor. Second, such cohomology theories may be thought of as Mackey functor valued. Both of these appearances of Mackey functors arise from a very simple connection between Mackey functors and the equivariant stable category. Using this connection, the techniques developed for the study of Mackey functors can be applied to obtain information about G-spaces. On the other hand, the study of G-spaces also raises new questions about Mackey functors and provides new insights about them.

L. Gaunce Lewis

Felix Klein und die Entwicklung von Mathematik und Naturwissenschaften 25.05.1990

Es handelt sich um einen mathematikhistorischen Vortrag, der auf der Auswertung neuer Quellen fußt. Die geringe Zahl der Studierenden in den Fächern Mathematik und Naturwissenschaften an den Universitäten und die Forderungen der Ingenieure u. Technikwissenschaftler („antimathematische Bewegung") nach einem anschaulichen, anwendungsbezogenen Unterricht führten in den 90er Jahren des 19. Jhs. zur Suche nach neuen Wegen, um die Mathematik wieder stärker mit ihren Anwendungen zu verbinden. Dazu gehörte: die Betonung der Anwendungen im Rahmen der DMV (gegr. 18.9.1890), Veränderungen in der Lehre und Schaffung einer neuen Prüfungsordnung für Lehramtskandidaten der Mathematik, welche erstmals eine „Lehrbefähigung für angewandte Mathematik" ermöglichte, das Projekt „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen", die Gründung der Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik und Mathematik", die Einflußnahme auf die Berufungspolitik, die Systematisierung der mathematischen Zeitschriften, verbunden mit der Schaffung eines speziellen Organs für „angewandte Mathematik", die Ausarbeitung von Reformvorschlägen für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Maßgeblicher Initiator dieser Vielfalt wissenschaftsorganisatorischer Bestrebungen war Felix Klein. Im Ergebnis dieser Maßnahmen wurden mit dem Versicherungsmathematiker ein neuer Berufsweg für Studierende der Mathematik an den Universitäten eröffnet, die Lehrtätigkeit auf den Gebieten darstellende Geometrie, technische Mechanik, Geodäsie und Wahrscheinlichkeitsrechnung verstärkt, neue Extraordinariate und ein Ordinariat (in Göttingen) für „angewandte Mathematik" errichtet, die Forschungen auf entsprechenden Gebieten (insbes. numer. u. graph. Methoden, Elastizitätstheorie, Hydro- u. Aerodynamik) erweitert.

Renate Tobies (Universität Leipzig)

On the arithmetic of elliptic curves 1. 06. 1990.

Let E be a modular elliptic curve defined over the field of rational numbers $\mathbb{Q}$, $E(\mathbb{Q})$ is the group of points E over $\mathbb{Q}$, Ш(E) – the Shafarevich-Tate group of E over $\mathbb{Q}$. According to the Mordell-Weil theorem, $E(\mathbb{Q}) \simeq F \times \mathbb{Z}^r$, where F is a finite group, r is a nonnegative integer. There exists the Birch-Swinnerton-Dyer conjecture that $r = ar \overset{def}{=}$ the order of zero of L-function of E over $\mathbb{Q}$ at the point $s=1$. Further, there exists the conjecture that Ш(E) is finite. In the talk the scheme of the next author,s result is discussed:

Th. $r = ar$ and Ш(E) is finite if

1) $ar \leq 1$ 2) $\exists$ a Heegner point of infinite order on E.

We show as from the results of Gross-Zagier, Waldspurger, Bump-Friedberg-Hoffstein and M. Murty - B. Murty it follows that the condition 2) follows from the condition 1), so it can be omitted.

Exept we formulate the preceding results and give some examples.

Kol /V. Kolyvagin/.

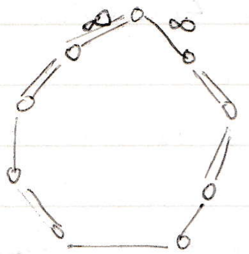
Über das Volumen hyperbolischer Polytope

Ruth Kellerhals, 8. 6. 1990

(Bonn)

Für eine Klasse von hyperbolischen Polytopen, die nicht mehr von simplizialem Typ sind, aber noch schöne metrische Eigenschaften aufweisen (viele rechte Keilwinkel), wird das Problem diskutiert, deren Volumina in Dimension 3 bzw. in höheren geraden Dimensionen zu bestimmen (in Abhängigkeit der Keilwinkel). Diese sog. Orthoscheme vom Grad d, $0 \leq d \leq 2$, oder d-fach abgestumpften Orthoscheme wurden von Im Hof 1983 klassifiziert, falls sie natürliche

Keilwinkel (von der Form $\frac{\pi}{p}$, $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$) aufweisen, also als Fundamentalbereiche von hyp. Spiegelungsgruppen auftreten. Wir zeigen, dass die wohlbekannte Formel von Lobatschewski für dreidim. hyperbolische Orthoscheminhalte im wesentlichen invariant bleibt bzgl. dem Abstumpfungsprozess.
Für höhere gerade Dimensionen verallgemeinern wir eine Reduktionsformel von Schläfli, die das Volumen in Abhängigkeit der Inhalte von gewissen niedrig-dimensionalen Polytopen ausdrückt; wir verwenden dazu die Graphensprache, die nicht nur eine elegante sondern auch sehr effiziente Version der Reduktionsformel liefert. Schliesslich demonstrieren wir das gewonnene Resultat am Beispiel eines 6-dim. Coxeterorthoschems R_2^{cox} vom Grad 2 mit Schema:



$$vol_6(R_2^{cox}) = \frac{\pi^3}{8640}.$$

R. Kellerhals

Burnside rings and two very old theorems in finite group theory 15.6.1990.
Tomoyuki Yoshida (Japan)

Let G be a finite group, p a prime. We study about the following:
(L. Sylow 1872) $\boxed{\text{The number of Sylow } p\text{-subgroups in } G \equiv 1 \pmod p}$
(G. Frobenius 1903) $n \geq 1$ $\boxed{\#\{x \in G \mid x^n = 1\} \equiv 0 \mod (\gcd(n, |G|))}$
(G. Frobenius 1895) $p^i \mid |G|_p \Rightarrow \boxed{\#\{H \leq G \mid |H| = p^i\} \equiv 1 \pmod p}$
(K. Brown 1975) Euler characteristic $\boxed{\chi(\{p\text{-subgroup} \neq 1 \text{ of } G\}) \equiv 1 \pmod{|G|_p}}$
These congruences are well understand when we consider the Burnside ring $\Omega(G)$, i.e., the Grothendieck ring of finite G-sets w.r.t. disjoint union and cartesian products. For example, A. Dress discovered a surprising

ring homomorphism $\alpha : \Omega(C_{|G|}) \to \Omega(G)$, and let $x_n := \alpha([C_{|G|}/C_n])$ for $n \mid |G|$. Then x_n has the "value" at $H \leq G$: $x_n(H) = \begin{cases} |G|/n & \text{if } |H| \mid n \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

By the fundamental theorem for Burnside rings, we have Frobenius theorem. By the integrality of the coefficient $m(H) = \frac{1}{n} \sum_{|K|/n} \mu(H, K)$ of $[G/H]$ in x_n, we have Brown's theorem. Since $1 = \sum_{(H)} m(H) \# \ldots$ we have Sylow's theorem. As another example of congruences of Frobenius type, we have the following (probably new) theorem:

<u>Theorem</u>: Let A be a finite abelian group and G a finite group. Then $\boxed{|\mathrm{Hom}(A, G)| \equiv 0 \mod (|A|, |G|)}$.

Next there are relations between zeta functions of Sylow & Frobenius types which connect two kinds of congruences. For finit groups A, B, let $h(A,B) := |\mathrm{Hom}(A,B)|$, $s(A,B) := \#\{A' \leq B \mid A' \cong A\}$, $d(A,B) := \begin{cases} |\mathrm{Aut}\, A| & A \cong B \\ 0 & A \not\cong B \end{cases}$

$q(A,B) := \#\{A' \trianglelefteq A \mid A/A' \cong B\}$. Define four matrices $H = (h(A,B))_{A,B}$, $S := (s(A,B))$, $D := (d(A,B))$, $Q := (q(A,B))$ indexed by isomorphism classes of finite groups. Then we have an LDU-decomposition : $H = QDS'$.

Calculating the inverse of Q, we have

<u>Lemma</u>. $$s(A, G) = \frac{1}{|\mathrm{Aut}\, A|} \sum_{r \geq 0} \sum_{C : p\text{-}gp}' (-1)^r p^{\binom{r}{2}} g^{A}_{C_p^r, C} \cdot h(C, G).$$

where $g^A_{BC} := \#\{B' \leq Z(A) \mid B' \cong B,\ A/B' \cong C\}$. Using this lemma,

<u>Proposition</u>. $\#\{\text{abelian } p\text{-subgroup of order } p^n\} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{\substack{|A| = p^{n-i} \\ A : abel}}' (-1)^i h(A,G)/|\mathrm{Aut}\, A| \cdot [p]_i$,

$$\#\{H \leq G \mid |H| = p^n\} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{|A| = p^{n-i}}' \frac{(-1)^i}{[p]_i} \left(\frac{|H^2(A, C_p)|}{|H^1(A, C_p)|} \right)^i \frac{h(A,G)}{|\mathrm{Aut}\, A|}, \text{ where } [p]_i := (p-1)(p^2-1) \cdots (p^i - 1)$$

<u>Example</u>. Let $h_n^c := |\mathrm{Hom}(C_n, G)| = \#\{x \in G \mid x^n = 1\}$, $s_n^c := \#\{H \leq G \mid H \cong C_n\}$. Then $h_n^c = \sum_{r \mid n} \varphi(r) s_r^c$, $s_n^c = (1/\varphi(n)) \sum_{r \mid n} \mu(n/r) h_r^c$. Define the "zeta functions" by $S_G^c(z) := \sum_{g \in G} 1/|g|^z = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) s_n^c / n^z$, $H_G^c(z) := \sum_{n=1}^{\infty} h_n^c / n^z$.

Then $\boxed{H_G^c(z) = \zeta(z) \cdot S_G^c(z)}$, ($\zeta(z)$ is Riemann's zeta function).

<u>Example</u>. $S_G^{abp}(x) := \sum_{n \geq 0} \sum_{|A| = p^n}' s(A, G) x^n$, $H_G^{abp}(x) := \sum_{n \geq 0} \sum_{|A| = p^n}' \frac{h(A,G)}{|\mathrm{Aut}\, A|} x^n$, the summations are over all non-iso. abelian p-gps A.

Then $$\boxed{H_G^{abp}(x) = S_G^{abp}(x) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 - p^{-n} x)^{-1}}.$$ As a trivial case $G = 1$, we have that $\boxed{\sum_A' 1/|A| = \sum_A' 1/|\mathrm{Aut}\, A|}$ (P. Hall 1938) and $\boxed{\sum_{rk(A) = m} 1/|A| = \sum_{|A| = p^m}' 1/|\mathrm{Aut}\, A|}$. $(m \geq 0)$ $\sum'$ is over non-iso. abelian p-gps A.

Yoshida 吉田 [illegible]

Representations of quadratic forms

Y. Kitaoka (Nagoya)

Let R be a commutative ring and $S^{(m)}$, $T^{(n)}$ be regular symmetric matrices over R and we consider the following quadratic diophantine equation:

$$(*) \quad S[X] \overset{d.}{=} {}^tXSX = T \qquad X \in M_{m,n}(R).$$

One problem is to give a sufficient condition in order that $(*)$ has a solution.

When R is a completion field of $\mathbb{Q}$, the classification theorem for equivalence classes is known. By using it, it is easy to give a necessary and sufficient condition for the existence of a solution of $(*)$. When $R = \mathbb{Q}$, we know the famous Minkowski-Hasse theorem. When $R = \mathbb{Z}$ and S is indefinite, we have

Th. $m-n \geq 3$, S: indefinite $\Rightarrow$ Hasse's principle holds,

that is $(*)$ is soluble over $\mathbb{Z}$ if and only if $(*)$ is sol. over $\mathbb{Z}_p$ $(\forall p)$ and $\mathbb{R}$.

This is an easy corollary of the strong approximation theorem.

When S is positive definite, the following is fundamental.

Th. $S^{(m)}$, $T^{(n)}$: pos. definite $/\mathbb{Z}$.

Suppose $(*)$ is soluble over $\mathbb{Z}_p$ $(\forall p)$.

Then there exists a positive constant c_S such that

$(*)$ is sol. over $\mathbb{Z}$ if $\min T \overset{d.}{=} \min\limits_{0 \neq x \in \mathbb{Z}^n} T[x] > c_S$ and $m \geq 2n+3$.

Natural questions are:

- The condition $m \geq 2n+3$ is best?
- What is c_S?
- The asymptotic formula of the number of solutions?

To attack the first and third problem, we take an analytic approach.

How it is done was explained and some targets were given.

22. 6. 1990. 北岡良之

On some cubic metaplectic forms.

N.V. Proskurin (Leningrad)

Let $\mathcal{O}$ be the ring of integers of the field $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ and let $q=(3)$ be an ideal in $\mathcal{O}$ generated by 3. We denote by Γ_n the principle congruence subgroup mod q in $SL(n,\mathcal{O})$. Kubota has discovered that (if $(\frac{\cdot}{\cdot})$ is the residue symbol of degree 3) the mapping

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{cases} \left(\frac{c}{d}\right), & \text{if } c \neq 0, \\ 1, & \text{if } c=0, \end{cases}$$

is a homomorphism of Γ_2 into the group of roots of 1. Kubota has also studied the complex functions on the homogeneous space $\mathbb{H} \simeq SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$ automorphic relative to Γ_2 with the above-mentioned homomorphism as the system of multipliers. He has found, in particular, that the Eisenstein series

$$E_*(\cdot, s): \mathbb{H} \to \mathbb{C}, \qquad s \in \mathbb{C}^*,$$

has the pole at the point $s=4/3$ which gives a nontrivial automorphic function

$$\Theta_* = \operatorname*{Res}_{s=4/3} E_*(\cdot, s).$$

Patterson has obtained the Fourier expansion of this function. Bass, Milnor and Serre have constracted homomorphisms from Γ_n, $n \geq 2$, into the group of roots of 1 "extending" the Kubota homomorphism. I have investigated the Eisenstein series on the space $SL(3,\mathbb{C})/SU(3)$ automorphic to Γ_3 with Bass-Milnor-Serre cubic homomorphism as the system of multipliers. It was founded that the maximal parabolic Eisenstein series which is constracted for Θ_* has the simple pole at $s=4/3$. Thus I obtain the function

$$\Theta = \operatorname*{Res}_{s=\frac{4}{3}} E(\cdot, s; \Theta_*),$$

which is an analogue of Kubota-Patterson's Θ_*. Also, I have investigated the Eisenstein series on the space $Sp(4,\mathbb{C})/Sp(4)$ automorphic to $\Gamma_4 \cap Sp(4,\mathbb{C})$ with Bass-Milnor-Serre cubic homomorphism as the system of multipliers. In thise case the Eisenstein series $E(\cdot, s; \Theta_*)$ has two simple poles at $s=10/3$ and $s=4$. So we have two "symplectic" analogue of Kubota-Patterson's Θ_*:

$$\Theta_\vee = \operatorname*{Res}_{s=10/3} E(\cdot, s; \Theta_*), \qquad \Theta_\wedge = \operatorname*{Res}_{s=4} E(\cdot, s; \Theta_*).$$

22.06.1990 Н. Проскурин (Proskurin N.V.)

Primality of ideals in Polynomial Rings

by
A. Kandri Rody Univ. Cadi Ayyad Marrakech Morocco

We give new algorithm to test whether an ideal I in the ring $K[X_1, ---, X_n]$ (where K is a Fied and $X_1, ---, X_n$ are indeterminates), is a prime. This is can be done if we ~~know~~ the primary decomposition of I. This problem has been studied by G. Hermann in 1925, thes Seidenberg expanded her work and gave more precise definition in 1974 and in 1978. C. Ayoub generalized this work to a P.I.D. in 1982. In 1984, I have given in my Ph.D. thesis an algorithm to compute the radical of an ideal as an intersection of prime ideals; Seidenberg generalized also his results. In 1988, Gianni, Trager and Zacharias have given new algorithms to compute the primary decomposition of an ideal, using Seindenberg's work. We compare their algorithm with our algorithm. We use two reduction prossesses. The B-reduction (à la Buchberger) which was introduced by B. Buchberger in 1965 to construction Gröbner basis, and the R-reduction which was introduced in 1932 by J. Ritt to introduce the notion of characteristic set. We think that the two approaches can have applications in differential algebra. In $\mathbb{Q}[X, Y]$ where X, Y are indeterminates, we give easy way to characterize a prime ideal and a maximal; to compute the radical of an ideal, we only need factorization over $\mathbb{Q}$ and over extension field of $\mathbb{Q}$.

A. Kandri Rody

Bielefeld
30/6/1990

Equivariant Surgery with Form Parameter

by Masaharu Morimoto (OKAYAMA UNI., JAPAN)

There was a classical problem since 1950's : Does there exist a OFP action on a sphere? This problem was easier in the topological category. But it was 1976 that the first example in the smooth category was obtained in. E. Stein proved that $SL(2,5)$ acts S^7 (smoothly) with one fixed point (OFP). After Stein, T. Petrie, E. Laitin[en], P. Traczyk and others (including me) have studied OFP actions on spheres in the smo[oth] category (recently in real algebraic category, too). One of our major problem was

<u>Problem</u> For a specified integer n, does S^n have OFP actions (in the smooth catego[ry])

Our answer obtained so far is:

<u>Answer</u> (1) If $n \geq 6$ and $n \neq 8$, then S^n has smooth OFP actions from A_5.

(2) If $n \leqq 5$, there are no OFP actions on homotopy n-spheres Σ^n.

(3) If $n = 3k$, $k \geqq 2$, then S^n has OFP actions from A_5 in the real algebraic category.

(4) Any finite perfect group G acts on a sphere with OFP, $(|G| > 1)$.

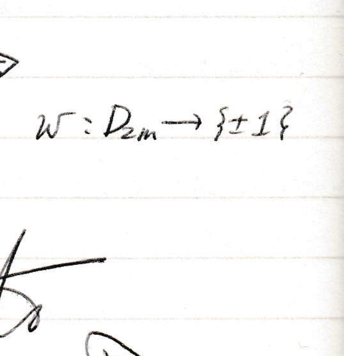
Our tool employed in the construction of OFP actions on spheres was Equivariant Surgery Theory. Especially low dimensional cases ($n = 6, 7, 10, 11$ etc.) required a new G-surgery theory with form parameter. For a finite group G and a G-manifold X, we set $G(X) = \{g \in G \mid \mathrm{ord}(g) = 2,\ \dim X^g = [\frac{\dim X - 1}{2}]\}$. The form parameter $\Gamma G(X)$ on $\mathbb{Z}[G]$ which is the smallest form parameter containing $G(X)$ plays a kew role in our theory, and the G-surgery obstruction group under the gap hypothesis is the Bak group $W_n(\mathbb{Z}[G], \Gamma G(X))$. This group can be computable for various G (for example $G = A_5$). Consequent[ly] we can prove the above (1).

<u>Theorem</u>. $D_{2m} = \langle a, b \mid a^m = e = b^2,\ bab = a^{-1} \rangle \Rightarrow$ $W_n(\mathbb{Z}[D_{2m}], \Gamma(a^l b\ ;\ l = 1, 2, \cdots, m)) = 0$ for $\forall n$ where $w : D_{2m} \to \{\pm 1\}$ is supposed to satisfy $w(a) = 1$.

12th of October, 1990

In Bielefeld

Masaharu Morimoto



Invariants and Representations

J. A. Green, Warwick, England

In 1892 J. Deruyts published an "Essai d'une théorie générale des formes algébriques"; this is a treatise on invariant theory in the classical sense. We have n sets $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$, $x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ of n variables each, and n (or more) sets $a = (a_1, \dots a_n)$, $b, c, \dots$ of coefficients (i.e. coefficients of linear forms like $a_1x_1 + \dots + a_nx_n$). These undergo transformations which in modern language can be regarded as actions of the general linear group $G_n = GL_n(K)$ (K field of char. 0); we define, for each $s = (s_{\mu\nu}) \in G_n$,

$$s \circ a_\nu = \sum_\mu s_{\mu\nu} a_\mu, \qquad x_\mu^{(1)} \circ s = \sum_\nu s_{\mu\nu} x_\nu^{(1)}$$

(& similarly for the other sets $a, b, \dots$ and $x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$), & then extend these actions multiplicatively & linearly to give the structure of (G_n, G_n)-bimodule to the algebra $K[a, b, \dots, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots]$ of all polynomials in $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots$ etc. A polynomial $F \in K[a \dots x^{(1)} \dots]$ is invariant (or covariant, if we want to emphasize the presence of the "variables" as well as the "coefficients") if $s \circ F \circ s^{-1} = |s|^w F$ ($w \in \mathbb{Z}$ "weight" of F)

Deruyts made a sophisticated analysis of the covariants of weight zero; each such can be regarded as the image under a map $\sigma: K[a, \dots] \to K[a, \dots, x^{(1)}, \dots]$ (which we now recognize as the structure map of $K[a]$ as comodule for the coalgebra of all polynomial functions on G_n), of a unique $\gamma \in K[a]$. If γ is "seminvariant" (i.e. carries a linear character of the subgroup B_n of upper triangular matrices of G_n), Deruyts calls $F = \sigma(\gamma)$ a primary covariant. These correspond (under the map σ) to the irreducible representations of G_n; Deruyts proved theorems equivalent to the statement that $K[a, \dots]$ is completely reducible, & he gave a formula for the character of an irreducible G_n-submodule of $K[a, \dots]$. In this way he anticipated I. Schur's discoveries on the polynomial representations of $GL_n(K)$ by a decade.

J. A. Green

19. Okt. 90

Matrix problems and representations of mixed Lie groups.

Yu. A. Drozd, Kiev, USSR.

The representation theory of reductive and solvable groups is now highly elaborated. Much less is known about representations of mixed (neither reductive nor solvable) groups. Surely, Mackey's theorem on representations of group extensions can be used. But if we try to apply it even to the simplest example of groups of step matrices $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ over a locally compact field K, then we quickly come to a problem which in a sense "cannot be solved". Namely it contains the known unsolved problem of classification of pairs of linear operators. Nevertheless, in some cases one succeeds to describe "almost all" representations.

We consider the case when $G = G(P, A)$ is an automorphism group of a finitely generated projective module P over a finite-dimensional K-algebra A. Call A of <u>Dynkin type</u> if it splits over K, i.e. $A/\mathrm{rad}\,A \simeq \bigoplus \mathrm{Mat}(n_i, K)$, has no non-trivial coverings (in the sense of P. Gabriel) and its Cartan matrix (or rather is symmetrization) is positive definite.

THEOREM. If A is of Dynkin type and G as above, then there is an open dense subset U in the space $\hat{G}$ of unitary irreducible representations of G such that $U \simeq \hat{D}$ for some group of the form $D = \prod_i GL(d_i, K)$. Moreover, $\mu_G(U) = 1$ (μ_G the Plancherel measure on $\hat{G}$) and the restriction $\mu_G | U$ coincides via this isomorphism with μ_D.

This theorem is proved by an induction based on the following main lemma.

LEMMA. Under assumptions of theorem, suppose that

$G \not\simeq D$ for any group D of prescribed form. Then an open dense subset $V \subset \hat{G}$ exists such that $V \simeq \hat{G'}$ for $G' = G(P', A')$ where A' is again of Dynkin type and $\dim P' < \dim P$ (and the statement on Plancherel measure is also true).

The proof of the lemma is essentially dependent on the technics of so called "matrix problems", namely, representations of <u>bocses</u> ("bimodule over category with coalgebra structure") in the sense of A. V. Roiter and algorithms of reduction for them. The method of the proof allows also to obtain an explicit description of representation lying in V.

26. 10. 1990

Theorem (generalised version of Gabber-Kashiwara theorem)
Let A be a commutative regular Noetherian ring and let Q be a finitely generated pure A-module. The characteristic ideal $J(Q) = \mathrm{Rad}(\mathrm{Ann}_R Q)$ characterises the characteristic variety of M, $\min(J(M))$, consisting of the minimal prime divisors of $J(Q)$. Then, for all $p \in \min(J(M))$,

$$\mathrm{gldim}\, A_p = j_A(Q) = \text{grade number of } Q.$$

Recall that a f.g. module over an Auslander-regular Noetherian ring R of gldim $R = \mu$ is holonomic when $j_R(M) = \mu$, it is pure when $\mathrm{Ext}^k(\mathrm{Ext}^k(M,R),R) = 0$ if $k \neq j_R(M)$ and a holonomic one is pure. If a f.g. module M over a filtered ring R has good filtration FM then $G(M)$ pure implies M pure. If A is as in the theorem then, in case A has pure dimension n, a f.g. A-module M is pure iff the characteristic variety is geometrically pure i.e.
$\dim(\min(J(M))) = \mathrm{kdim}\, R/p_i \quad \forall\, p_i \in \min(J(M))$. We mention one more application for Zariskian filtrations in general:
Theorem. Let R be a left and right Zariski ring such that $G(R)$ is commutative regular and of pure dimension n then M is pure iff $\min(J(M))$ is geometrically pure and $\mathrm{Ass}(G(M)) = \min(J(M))$.
The latter shows that, even if there exist simple non-holonomic modules (see T. Stafford or later Bernstein) the simple modules are pure and enjoy good equidimensionality properties as far as their characteristic variety is considered.
Further applications of filtered-techniques have been obtained in valuation theory of non-commutative rings, K_0-theory etc...., for example:
Theorem If R is a Zariski filtered ring such that $G(R)$ has finite global dimension then $K_0(R) \hookrightarrow K_0(G(R))$ (where $\langle R\rangle \to \langle G(R)\rangle$). If moreover, FR is complete then $K_0(R) \cong K_0(G(R))$.
Further applications are being developed.

2-11-90

Filtered Rings are Everywhere

by F. Van Oystaeyen, ~~Univ.~~ Univ. of Antwerp UIA.

[F]iltered rings appear in algebraic geometry e.g.: the dehomogenization of [a] projective variety $V \subset \mathbb{P}^n(k)$ leads to a filtered ring $T(V)_*$ (for instance [d]eterminantal rings corresponding to Schubert-cycles); the Zariski rings in [s]ingularity theory; the I-adic filtrations and related regular sequences [in] the study of (quasi-) complete intersections etc.... In connection with [d]ifferential equations filtrations play an important part in the study of [r]ings of differential operators and holonomic or pure modules over [th]ese. A ring of particular importance is Kashiwara's ring $\mathcal{E}_P$, the [ri]ng of germs of micro-local differential operators at a point P of [th]e co-tangent bundle of a complex analytic manifold. Completely [d]ifferent filtrations arise on enveloping algebras of Lie algebras, [H]opf algebras and quantum groups, pseudo-valuation rings in central [s]imple algebras etc... In view of all these interesting examples we have [bu]ilt (L. Huishi, F. Van Oystaeyen, M. Van den Bergh) a completely [a]lgebraic theory of Zariskian filtrations and their microlocal theory. [Th]e microlocalizations allow to construct sheaves of algebraic quantum [se]ctions over $\mathrm{Proj}(G(R))$ for a Zariski filtered ring R having a [c]ommutative associated graded ring (all examples satisfy this [c]ondition, or almost all). One can derive a micro-version of Serre's result on coherent algebraic sheaves.

[U]sing the Rees ring of a filtration FR on R, say $\tilde{R}$, together with [th]e associated graded ring $G(R)$, many problems concerning the filtered ring R can be reduced to problems in graded ring theory. [A]s one of the possible applications of this theory we mention the consequences of lifting the Auslander-regularity conditions from $G(R)$ to R and $\tilde{R}$ (for a left and right Zariskian ring) for [th]e study of pure and holonomic modules.

$\Longleftarrow$

Extension of conformal mappings and hyperbolic metrics

November 9, 1990

Samuil Kruschkal
Institute of Mathematics
Siberian Branch of the USSR Academy of Sciences
Novosibirsk, USSR.

In various problems of complex analysis and its applications, i.e. in the approximation theory, potential theory and the theory of Fredholm eigenvalues one has to extend the conformal maps of the plane domains. The best extension often is quasiconformal one, and in this case it is important to have a bound of quasiconformality coefficients of these extensions (the best possible one).

Such extensions yield quasiconformal reflections with respect to curves which are q.c. images of a circle, and again there arises the question for the least possible reflection coefficients.

These problems are investigated just from the end of 1950-th, but only the particular results were obtained here.

In the talk will be given the complete solution of these problems for the case of analytic curves. Then an interpolatic family arises which contract the corresponded analytic univalent function to identity

The ~~progress~~ progress in these problems was succeed by applying new methods based on the Teichmüller space theory, the geometric ideas of multi-dimensional complex analysis and complex differential geometry.

The closed problems concerning the more strong extensions of the holomorphic motions of the plane sets will be considered also.

Samuel Kruschkal.

Elliptizität, Parametrices und Asymptotik bei partiellen Differentialgleichungen auf Räumen mit Singularitäten

B.-Wolfgang Schulze, K.-Weierstraß-Inst. Berlin

Die Analysis der partiellen Differentialgleichungen hat sich in den letzten Jahren zunehmend singulären Situationen zugewendet. Dies gilt insbesondere für das Konzept der Elliptizität auf Mannigfaltigkeiten mit konischen Punkten, Kanten, Ecken usw., mit nichtkompakten Ausgängen, Rissen und dergl. Weiterhin sind Erweiterungen der Index-Theorie, z.B. in Gestalt von (stabilen) Homotopie-Klassifikationen adäquater Symbolstrukturen naheliegend. Diese Theorie muß die klassischen Spezialfälle (Atiyah-Singer für geschlossene kompakte C^∞-Mannigfaltigkeiten, Boutet de Monvel für Randwert-Probleme) enthalten. Dies zeigt, daß die Elliptizität in der singulären Theorie mittels Symbolhierarchien definiert wird, die z.T. operatorwertige Komponenten enthalten. Weiterhin sollten die konkreten Operatoren zu Algebren mit Symbolstrukturen gehören, die sich ähnlich verhalten wie der Kalkül der Pseudo-Differentialoperatoren. Hintergrund des Vortrags ist eine Monographie des Autors über Pseudo-Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten mit Singularitäten (Teubner / North Holland). Es wird hier insbesondere ein Analogon von

Boutet de Monvel's Algebra von Operatoren, hier für Mannigfaltigkeiten mit Kanten, studiert. An die Stelle der Randbedingungen treten hier Bedingungen längs der Kanten, und ein Analogon der Shapiro-Lopatinski-Bedingung ist hier die Bijektivität eines operatorwertigen Symbolniveaus, das auf dem Kotangentialbündel $\setminus \{0\}$ der Kanten lebt. Der Raum der betreffenden Kantenpseudodifferentialoperatoren ist abgeschlossen unter Parametrix-Konstruktion unter der Bedingung der Elliptizität. Weiterhin besteht die Regularität in Kantensobolev-Räumen mit "Konormalen-asymptotik"

16.11.90 B.-Wolfgang Schulze

Flows on homogeneous spaces and diophantine approximation

S. G. Dani (Tata Institute, Bombay and SFB 170 Göttingen)

Study of dynamics of flows on homogeneous spaces, especially $SL(n,\mathbb{R})/SL(n,\mathbb{Z})$ has interesting interconnections with various questions in diophantine approximation. Recently there was a major development in the area in the form of Margulis proving a longstanding conjecture due to Oppenheim that if Q is a nondegenerate indefinite real quadratic form in $n \geq 3$ variables then the set of its values at integral points is a dense set of real numbers, unless Q is a multiple of a rational quadratic form. Subsequently to this, the present author worked jointly with Margulis and we proved improved results both with regard to values of quadratic forms and the dynamics of the flows involved. In particular we showed the following

i) If Q is a quadratic form as above, then even the set of values of Q at primitive integral points is dense in real numbers, whenever Q is not a multiple of a rational quadratic form.

2) If $G = SL(3,\mathbb{R})$, $\Gamma = SL(3,\mathbb{Z})$ and $\{u_t\}$ is a one-parameter subgroup of G such that $u_t - Id$ has rank 2 and u_t is unipotent for each t, then the closure of any $\{u_t\}$-orbit on G/Γ is a homogeneous space, namely, orbit of a possibly larger subgroup of G. This verifies a conjecture of Raghunathan for orbits of unipotent flows, for the flow in question. (It may be mentioned here that the conjecture has more recently been proved by M. Ratner)

We also obtained a proof of assertion i) above which is elementary in the sense that it is accessible to anyone with the background knowledge of linear algebra and topological groups.

In this lecture a survey of the various ideas involved in these developments and sketch of the elementary proof will be presented.

S. G. Dani

23-11-1990.

S. G. Dani

Knotentheorie und algebraische Kurven

Thomas Fiedler (K.-Weierstraß-Inst. Berlin, SFB Göttingen)

Sei $B \subseteq \mathbb{C}^2$ eine streng pseudokonvexe Kugel und $X \subseteq B$ eine glatt eingebettete komplexe Kurve, die den Rand ∂B transversal schneidet in $\partial X = X \cap \partial B$.

Satz (Bennequin – Eliashberg): $M^2 \subseteq \partial B$ sei eine Seifertfläche für ∂X. Dann gilt

$$\chi(M^2) \leq \chi(X).$$

($\chi(\cdot)$ bezeichnet die Eulercharakteristik.)

Im Vortrag wurde ein topologisches Gegenstück zu diesem Satz vorgestellt. Sei $F: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ ein komplexes Polynom (mit nur isolierten Singularitäten). $X = F^{-1}(0) \cap B$. Die verallgemeinerte Milnor Abbildung $\arg F$ ist definiert durch

$$\arg F : \partial B \setminus \partial X \to S^1, \qquad \arg F = \frac{F}{\|F\|}.$$

Für jedes Intervall $I \subset S^1$ bezeichne $\#(I)$ die Anzahl der singulären Werte von $\arg F$ in I.

Satz. Sei $M^2 \subseteq \partial B$ eine Seifertfläche für ∂X. $(\arg F)(M^2)$ sei in einem Intervall I enthalten. Dann gilt

$$\chi(M^2) \leq \chi(X) + 2\#(I).$$

Der Beweis beruht auf einer neuen Morse Theorie

Th. Fiedler

30. 11. 90

Arithmetic of Elliptic Curves with Complex Multiplication

(John Coates, University of Cambridge, England).

By using the beautiful ideas of Kolyvagin on Euler systems, K. Rubin has recently proven the so-called main conjectures of Iwasawa theory for elliptic curves with complex multiplication, which are also defined over their field of complex multiplication. The lecture described some of the deep consequences of these main conjectures for the arithmetic of the curve, as well as some of the background for these methods beginning with Tate's celebrated Bourbaki seminar (No. 306, 1966) on the function field analogue. For elliptic curves over $\mathbb{Q}$ with complex multiplication, we now know a considerable part of what was proven by Artin & Tate for the function field analogue, at least for ordinary primes p. For supersingular primes p, the situation is less satisfactory – for example, when the L-function of the curve has a simple zero at $s = 1$, we still cannot prove that the p-primary part of Ш has the order predicted by the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer for supersingular primes p. Some remarks on the proof of the main conjecture for ordinary primes p were also made.

John Coates.

7/12/1990.

"Moduli of Calabi-Yau manifolds"
Andrey N. Todorov

Definition 1. Let X be a compact Kähler manifold such that a) $\dim_{\mathbb{C}} X \geq 3$ b) $\dim H^0(X, \Omega^i) = 0$ for $0 < i < n = \dim_{\mathbb{C}} X$ c) $H^0(X, \Omega^n) \cong \mathbb{C}\,\omega_X(n,0)$, where $\omega_X(n,0)$ is a holomorphic n-form without zeroes

Definition 2. Let X be a ~~Kähler~~ Calabi-Yau manifold. Let $I(X)$ be the space of all integrable complex structures on X, then the Teichmüller space $\mathcal{T}(X)$ is defined as follows $\mathcal{T}(X) := I(X)/\mathcal{D}iff_0(X)$, where

$\mathcal{D}iff_0(X)$ is the group of diffeomorphisms isotopic to identity

Definition 3. Let X be be a Calabi-Yau manifold then the moduli space $\mathfrak{M}(X)$ is defined as follows:

$$\mathfrak{M}(X) = I(X)/\mathcal{D}iff_+(X)$$

where $\mathcal{D}iff_+(X)$ is the group of orientation preserving diffeomorphisms of X.

The aim of this talk is to describe some of the ideas of the proof of the following theorems

Theorem 1. a) $\mathcal{T}(X)$ is a non-singulal manifold of $\dim = H^1(X, \Theta)$
b) $\mathcal{T}(X)$ is a Stein manifold

Theorem 2. $\mathfrak{M}(X)$ is quasiprojective manifold.

АТодоров

(14.12.)

<u>Seifenblasen und Solitonen</u>

U. Pinkall, 21.12.90

Solitonen sind räumlich lokalisierte (d.h. in der Raumkoordinate x exponentiell abfallende) Lösungen nichtlinearer partieller Differentialgleichungen, die in der Zeit t ihre Form nicht ändern. Klassische Solitonengleichungen sind z.B. die KdV-Gleichung $u_t = u_{xxx} - 6uu_x$ und die Sinus-Gordon-Gleichung $\omega_{xy} = \sin\omega$. Eine extensive Theorie solcher Gleichungen ist seit den 60'er Jahren entstanden, nach dem erkannt war, daß man sie als unendlich-dimensionale vollständig integrable Hamilton'sche Systeme beschreiben kann.
In diesem Vortrag werden Anwendungen der Solitonentheorie auf Differentialgeometrische Probleme diskutiert, insbesondere auf

1) Flächen in $\mathbb{R}^3$ mit konstanter mittlerer Krümmung H
2) Flächen in $\mathbb{R}^3$ mit konstanter Gauss'scher Krümmung K
3) Willmore-Flächen.

Besonders interessant ist, daß sich <u>alle</u> Tori mit $H = \text{const}$ explizit mit Methoden der algebraischen Geometrie konstruieren lassen.
Zum Schluß wurde ein diskretes Analogon zu den Flächen mit $K = \text{const} < 0$ angegeben: Vierecksgitter in $\mathbb{R}^3$ mit Seitenlänge 1 (Chebycheff-Netz) deren vier Kanten in jedem Gitterpunkt in einer Ebene liegen (Asymptotenlinien). Dieses Problem führt auf eine zur Sinus-Gordon-Gleichung analoge Differenzengleichung für Funktionen $\omega: \mathbb{Z}^2 \to S^1$. Die gesamte Theorie der kontinuierlichen Flächen läßt sich auf die diskrete Situation übertragen.

U. Pinkall