A survey of homotopy representation theory

Ikumitsu Nagasaki (Osaka Univ. Japan)

Let G be a finite group.
A finite dimensional G-CW complex X is called a homotopy representation of G if for any $H \leq G$, X^H is homotopy equivalent to a sphere S^m or empty, where $m = \dim X^H$.
One purpose of homotopy representation theory is to classify G-homotopy types of homotopy representations. Let $V^\infty(G)$ be the Grothendieck group of G-homotopy types of hom. rep. under join. Let $v^\infty(G)$ be the torsion subgroup of $V^\infty(G)$.

<u>Thm</u> (tom Dieck-Petrie)

(1) $\operatorname{rank} V^\infty(G) = \#\{(H) \mid H/[H,H] \text{ cyclic}\}$

(2) $v^\infty(G) \cong \operatorname{Pic}(G)$.

$V^\infty(G)$ does not determine strictly G-homotopy types of hom. reps. Laitinen introduced the unstable Picard group $\operatorname{Pic}_m(G)$ instead of $\operatorname{Pic}(G)$ and defined an invariant, which determine G-homotopy types. Using Laitinen's invariant, we can define a linearity invariant $l(X)$ in $\operatorname{Pic}_m(G)/jO_m(G)$.

<u>Thm</u> $l(X)$ vanishes iff X is linear.
(X is called linear if X is G-homotopy equivalent to some linear G-sphere $S(V)$.)

<u>Cor.</u> Any homotopy representation of G is linear iff G is a cyclic p-group or a dihedral 2-group.

11. Jan., 1991 Ikumitsu Nagasaki

18. 1. 1991

Die Theorie der singulären Modulformen wird in einem allgemeinen Rahmen – auf beliebigen Gebieten der Form

$$H = V + iP, \quad P \text{ selbstadjungierter Kegel in } V$$

vorgestellt. Über gewisse $\mathbb{Q}$-Strukturen der P entsprechenden Jordanalgebra werden arithmetische Gruppen

$$\Gamma = G = \mathrm{Bihol}(H)$$

eingeführt. Dann wird der singuläre Teil des Spektrums

$$L^2_{sing}(\Gamma \backslash G) \subset L^2(\Gamma \backslash G)$$

definiert und seine mögliche Position in der Spektralzerlegung Langlands diskutiert. Die Theorie ist im Falle des holomorphen Teils des Spektrums ein Stück weit entwickelt, weitgehend vollständig ist die Theorie im Siegelschen Fall $G = Sp(n, \mathbb{R})$.

Der holomorphe Teil des Spektrums wird durch gewisse Thetareihen erfaßt, die linearen Relationen zwischen den erzeugenden Thetareihen können vollständig beschrieben werden. Es handelt sich um Verallgemeinerungen der Riemannschen Thetarelationen. Die letzteren müssen Folgerelationen der aus der singulären Theorie entspringenden sein.

Wie, ist bislang nicht bekannt.

Eberhard Freitag

25.1.91 Sei $X \subset \mathbb{C}^m$ eine quasiprojektive Varietät. Folgende Probleme werden gestellt (A = Ring der ganzalgebraischen Zahlen)

1) Wann ist $\{x \in X \cap A^m ; [\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}] \le n\}$ für festes n eine endliche bzw. Zariskidünne Menge

2) Wenn diese Menge Zariskidicht ist und $f: X \to \mathbb{C}$

eine algebraische Funktion ist, wird die Zahl $f(x)$ für $x \in X \cap A^m$ mit $[K(x):K] \leq n$ betrachtet. Wieviele Primideale hat die Zahl $f(x)$ im Ring der ganzalgebraischen Zahlen von $K(x)$?

Um diese Fragen zu beantworten, wird jeder Varietät X eine Zahl ρ_X, der Picardindex von X, zugeordnet. Dann gilt: Ist $\rho_X \geq 2n$, so ist die unter 1) betrachtete Menge nicht Zariskidicht; hat X nur triviale Unterräume X_0 und $\rho_{X_0} < 2n$, so ist diese Menge sogar endlich. Als Folgerung ergeben sich Konsequenzen für den Hilbertschen Irreduzibilitätssatz.

Im Fall der 2. Frage betrachte $Y_u \subset Y \subset X$ für $1 \leq u \leq k$. Schreibe $Y = Var(f_1, \ldots, f_m)$. Ist für jede q-elementige Menge $S \subset X$ stets der Picardindex von $\left(X - \bigcup_{Y_u \cap S = \emptyset} Y_u\right)$ größer gleich $2n$, so hat für eine Zariskidichte Menge $X_0 \subset X$ und für jedes $x \in X_0 \cap A^m$ mit $[\mathbb{Q}(x):\mathbb{Q}] \leq n$ stets das Ideal $(f_1(x), \ldots, f_m(x))$ mindestens $q+1$ viele Primideale. Als Konsequenz ergeben sich Verschärfungen des Hilbertschen Irreduzibilitätssatzes in Verbindung mit Primzahlfragen.

Schließlich wird noch eine allgemeinere Zahlen-[illegible]-funktionentheoretische Vermutung ausgesprochen, aus der sich zahlreiche bekannte Vermutungen (Verschärfungen von Fermat für große n) ergeben und mit der die obigen Sätze noch verschärft werden können.

Klaus Langmann

1. 2. 1991 Maximale Lösungen von nichtlinearen elliptischen Gleichungen und Anwendungen in Geometrie und Physik.

Es werden Gleichungen von der Form $\Delta u = f(u)$ in $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ betrachtet, wobei $f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ eine monoton wachsende Funktion ist, die im Nullpunkt verschwindet und gewissen Wachstumsbedingungen im Unendlichen genügt. Es zeigt sich, dass eine maximale Lösung der Form $U(x) = \sup\{u : u > 0 \text{ Lösung}\}$ existiert. Das asymptotische Randverhalten wird bestimmt. Daraus ergeben sich Eindeutigkeitssätze für Lösungen, die gegen den Rand unendlich gross sind. Anwendungen für Metriken mit konstanter skalarer Krümmung und für Diffusionsprozesse werden betrachtet.

C. Bandle

8. 2. 1991 Aspekte der Theorie elliptischer Differentialgleichungen höherer Ordnung
Günther Wildenhain (Universität Rostock)

Die Theorie der elliptischen Differentialgleichungen höherer Ordnung besitzt zur Zeit bei weitem noch nicht den Reifegrad der Theorie elliptischer Gleichungen 2. Ordnung. Dies betrifft insbesondere den Fragenkomplex um das Dirichlet-Problem. Im Vortrag wird am Beispiel einiger Problemstellungen demonstriert, wie man klassische Resultate von Gleichungen zweiter auf Gleichungen höherer Ordnung verallgemeinern kann. Damit im Zusammenhang steht die Erweiterung potentialtheoretischer Begriffsbildungen und Methoden.

Im einzelnen werden folgende Themenkomplexe diskutiert.

1. Die Miranda-Agmon-Ungleichung als natürlicher Ersatz für das klassische Maximum-Minimum-Prinzip.

2. Die Formulierung des Dirichlet-Problems für beliebige beschränkte Gebiete und die Konstruktion verallgemeinerter harmonischer Maße.

3. Potentialtheoretische Interpolationen.

4. Darstellung polyharmonischer Funktionen durch verallgemeinerte Poisson-Integrale.

5. Zusammenhang zwischen Stabilitäts- und Approximationsfragen.

6. Eine Charakterisierung der „Eindeutigkeitseigenschaft im Kleinen" durch eine Approximationseigenschaft.

G. Wildenhain

13.4.91 2. Geometric constructions of ball groups.

It is very well known fact, that the lack of „good" geometry in complex hyperbolic space $\mathbb{C}H^n \simeq \mathbb{B}^n$ is a serious obstacle for construction of Poincare polyeder for given discreet groups of motions. That is why in 1980 i began to look into the constructions following the classical uniformization in $\mathbb{B}^1$. The idea of „down-stairs" constructions run as follows: we choose a divisor L of lines in $\mathbb{P}^2$ and try to reconstruct discrete cocompact group Γ in $\mathbb{B}^2$, s.t. $\mathbb{B}^2/\Gamma \simeq \mathbb{P}^2$ with prescribed „branch" divisor L. It occurs that for simplest configurations this programm can be fulfilled, and moreover some times you can judge about non-arithmeticity of the groups under consideration. The idea of „down-stairs" construction was initiated independently and practically at the same time by F. Hirzebruch; T. Höfer and myself. The finite number of examples covered all previously known examples of G. Mostow, and also (up to commensurability) coinsides with Deligne-Mostow list of groups.

O. Schwarzmann (Moscow Institut of Communications).

P.S. The natural question: is there are only a finite number of complex ball reflection groups in all dimensions?

Harmonische Analyse auf geordneten symmetrischen Räumen

J. Hilgert, Erlangen 26.4.91

Ausgehend von Volterra-Integralgleichungen mit zusätzlichen Symmetrien (z.B. der Bethe-Salpeter-Gleichung) gelangt man in natürlicher Weise zu Faltungsgleichungen auf symmetrischen Räumen, die geordnet sind (Beispiel: das einschalige Hyperboloid im Minkowski-Raum mit der von der Lorentzmetrik (+ Zeitorientierung) induzierten Ordnung). Gefaltet werden Kerne, die invariant unter der Gruppenwirkung und kausal (d.h. $k(x,y) = 0$ falls $x \not\leq y$) sind. Dies geht nur, falls die Intervalle der Ordnung kompakt sind ("global hyperbolisch"). Unter dieser Voraussetzung ist die Algebra der invarianten kausalen Kerne kommutativ und Faltungsgleichungen können diagonalisiert werden, wenn man genügend Charaktere dieser Algebra kennt. Man kann in Analogie zu den Riemannschen symmetrischen Räumen solche Charaktere mit Hilfe von sphärischen Funktionen konstruieren. Dazu benötigt man eine ausgefeilte Strukturtheorie der geordneten symmetrischen Räume. Die vorgestellten Ergebnisse sind in Zusammenarbeit mit Jacques Faraut und Gestur 'Olafsson entstanden.

J. Hilgert

May 10, 1991 Mathematical Haikai Paulo Ribenboim

The talk is about small but pretty mathematical results, like the verses "haiku" in Japanese language. In other words simple consequences from strong theorems – here Faltings' Theorem is used to prove: if $S_1, S_2, S_3 \ldots$ are finite sets of natural numbers there exist natural numbers $r_1, r_2 \ldots$ such that the sets $S_i + r_i$ are pairwise disjoint (which is clear) and for every $n \in \bigcup_{i}^{\infty} (S_i + r_i)$, Fermat's last theorem is true for the exponent n! Much more is possible, like density results for Fermat's equation, similar equations. The use of a theorem of Schinzel & Tijdeman allows to treat questions like Catalan's problem.

This discussion finally leads to a discussion of powerful numbers Erdös' conjecture (There does not exist 3 consecutive powerful numbers) and how Granville showed that the truth of Erdös conjecture implies the known and difficult theorem of Adleman-Heath Brown-Fouvry: The first case of Fermat's last theorem is true for infinitely many prime exponents

Paulo Ribenboim

May 17, 1991

A local index theorem for families of $\bar{\partial}$-operators on punctured Riemann surfaces

Peter Zograf, Leningrad

For the determinant line bundle on the moduli space of compact Riemann surfaces its curvature in Quillen's metric is proportional to the Weil-Petersson Kähler form. There is an analog of it on the moduli space of Riemann surfaces with punctures which differs by an additional term. This term is the symplectic form of a new Kähler metric on the moduli space of punctured Riemann surfaces, which is defined in terms of the Eisenstein-Maass series.

Peter Zograf

24. Mai 1991

Über die lokale Struktur endlicher Gruppen

Sei G eine endliche Gruppe und p eine Primzahl, und sei $\mathcal{L}oc_p(G)$ die Menge der p-lokalen Untergruppen von G. Für geeignet gewähltes p hängt die Struktur von G wesentlich von der Struktur der Elemente aus $\mathcal{L}oc_p(G)$ ab.

In dem Vortrag wurden die Elemente aus $\mathcal{L}oc_p(G)$ unter der Voraussetzung: $F^*(P) = O_p(P)$ für alle $P \in \mathcal{L}oc_p(G)$, untersucht. Im Mittelpunkt standen dabei die p-Komponenten von G bezgl. einer p-Sylowuntergruppe $S \in Syl_p(G)$; d.h. Untergruppen E von G, für die gilt:

(i) $O_p(E) \neq 1$, $E = E'$ und $E/O_p(E)$ quasieinfach,

(ii) E ist subnormal in $\langle E, S \rangle$.

Unter verschiedenen Voraussetzungen wurde der Isomorphietyp von $E/O_p(E)$, E p-Komponente von G, bestimmt.

Bernd Kellermacher

31. Mai 1991 Multidimensionale konstante lineare Systeme

Ulrich Oberst Innsbruck

Der Vortrag ist eine Einführung in meine Arbeit "Multidimensional constant linear systems" erschienen in Acta Appl. Math. 20 (1990) 1-175. Es handelt sich um die algebraische Behandlung von linearen Systemen partieller Differential- und Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten und deren Anwendungen. In der Sprache der Systemtheorie (Kontrolltheorie, Kybernetik, Bildverarbeitung, Elektrotechnik) spricht man von der multidimensionellen (partielle statt gewöhnliche Diff.-Gleichungen) und multivariablen (Systeme von Gleichungen statt nur eine skalar Gleichung) Systemtheorie und vom kontinuierlichen bzw. diskreten Fall bei Differential- bzw. Differenzengleichungen.

Das Hauptresultat stellt eine Eineindeutige Beziehung zwischen endlich erzeugten Moduln über einem multivariablen Polynomring und den Lösungsräumen der genannten Systeme her. Genauer: Jeder endlich erzeugte $\mathbb{C}[s] = \mathbb{C}[s_1, \ldots, s_r]$-Modul

(allgemeiner: ein beliebiger Grundkörper)
hat bekanntlich bis auf Isomorphie die Form $\mathbb{C}[s]^\ell / \mathbb{C}[s]^k R$, wobei
$R = (R_{ij},\ i=1,\dots,k,\ j=1,\dots,\ell) \in \mathbb{C}[s]^{k\times\ell}$, $R_{ij} = \sum_{m\in\mathbb{N}^r} R_{ij}(m) s^m$,

eine polynomiale $k\times\ell$-Matrix ist. Andererseits bestimmt R ein System von partiellen Differentialgleichungen für ℓ Funktionen $w_j = w_j(t) = w_j(t_1,\dots,t_r) \in C^\infty(\mathbb{R}^r)$, $t\in\mathbb{R}^r$,

oder auch Distributionen $w_j \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^r)$ durch

$$(*)\quad \sum_{j=1,\dots,\ell,\ m\in\mathbb{N}^r} R_{ij}(m)\, \partial^{|m|} w_j / \partial t_1^{m(1)} \cdots \partial t_r^{m(r)} = 0,\quad i=1,\dots,k,$$

und auch seinen Lösungsraum
$S := \{ w \in C^\infty(\mathbb{R}^r)^\ell;\ (*) \text{ ist erfüllt} \}$.
Dieser Lösungsraum heißt einfach "Lineares System" oder auch "Verhalten (behaviour) des linearen Systems" in der angewandten Systemtheorie und wurde dort von Willems (1986) im diskreten und von Blomberg-Ylinen (1983) im kontinuierlichen Fall eingeführt. Kalman (~1960) war der erste, der die bekannte Theorie der Moduln und Matrizen über dem eindimensionalen Polynomring (Hauptidealring) ~~auf~~ in die angewandte Systemtheorie eingeführt hat.

<u>Hauptsatz</u>: Die Zuordnung

$$M = \mathbb{C}[s]^\ell / \mathbb{C}[s]^k R \longmapsto S = \{ w;\ (*) \text{ erfüllt} \} \subset C^\infty(\mathbb{R}^r)^\ell$$

ist eine kategorielle Dualität!!
Damit steht die gesamte Algebra der

mehrdimensionaler Polynomrings $\mathbb{C}[s_1, \dots, s_d]$, insbesondere die algorithmische Theorie der Gröbner- oder Standardbasen nach Buchberger, für das Lösen von partiellen Diff-Gleichungen zur Verfügung. In meiner Arbeit gebe ich zahlreiche Beispiele für diese Methode und Anwendungen. ||

31.5.91 Ulrich Oberst

7 June 1991 Intersection Theory on Singular Varieties via K-theory

R. Thomason Université de Paris 7

For X a smooth algebraic variety in projective space, the classical theory of Chow studies the intersection of subvarieties on X by making a graded ring, $\oplus A^p(X)$, where $A^p(X)$ is the ~~free~~ abelian group generated by codimension p subvarieties of X, modulo the relation $Z \sim Z'$ if there exists such a codimension p cycle in $X \times \mathbb{P}^1$ whose intersection with $X \times 0$ and $X \times \infty$ is Z and Z' respectively. The product of $Z \in A^p(X)$ and $W \in A^q(X)$ is $Z' \cap W \in A^{p+q}(X)$ where $Z' \sim Z$ is a representative chosen to meet Z transversly.

However if X is singular, the transversality argument fails. In fact, we know we can't make a good intersection ring of equivalence classes of linear combinations of subvarieties. Even for divisors, the codimension 1 subvarieties (Weil divisors) are known to malfunction: $A^1(X)$ should be the group of Cartier divisors instead. A Cartier divisor is a monomorphism of a line bundle in $\mathcal{O}_X$ s: $\mathcal{L} \rightarrowtail \mathcal{O}_X$.

Inspired by "Bloch's formula", proved by Quillen, which gives an expression of $A^p(X)$ in terms of Zariski cohomology of X with coefficients in the sheaf of Quillen's higher algebraic K-groups for X non-singular $A^p(X) = H^p_{Zar}(X, K_p)$, we propose to define an intersection ring for singular X as $\bigoplus H^p_{Nis}(X, K_p)$

The product is induced by cup product in cohomology. Here H^*_{Nis} is the Nisnevich cohomology of X, slightly finer than the Zariski topology.

This theory agrees with the classical $A^p(X)$ for X regular, and an arbitrary map of varieties $f: X \longrightarrow Y$ induces a ring map $\bigoplus H^p(Y, K_p) \longrightarrow \bigoplus H^p(X, K_p)$. Rationally $\bigoplus H^p_{Nis}(X, K_p) \otimes \mathbb{Q}$ is the associated graded for the γ-filtration on $K_0(X) \otimes \mathbb{Q}$, and so agrees with Grothendieck's $\bigoplus A^p(X) \otimes \mathbb{Q}$ for X singular. $H^1_{Nis}(X, K_1)$ is the group of Cartier divisors modulo rational equivalence. For $f: X \longrightarrow Y$ a smooth morphism of fibre dimension d, one expects there should be a map $f_*: H^p_{Nis}(X, K_p) \longrightarrow H^{p-d}_{Nis}(Y, K_{p-d})$, a direct image of cycles. This is true for $d = 0$, and $f_* \otimes \mathbb{Q}$ exists for all d.

It appears likely that there is a geometric interpretation of elements of $H^p_{Nis}(X, K_p)$ in terms of complexes of algebraic vector bundles over X which are cohomologically supported in codimension $\geq p$.

[illegible].6.91 Moderne, Gegenmoderne und Modernisierung der Mathematik um 1900

Im Laufe des 19. Jahrhunderts entsteht die begrifflich-strukturelle, axiomatische Mathematik. Um 1900 wird mit Hilbert als Hauptsprecher diese 'Moderne' als programmatisches Selbstverständnis einer Avantgarde deklariert: axiomatische Methode, Existenz und Wahrheit = Widerspruchsfreiheit. Emphatische wird mathematische Arbeit als "freie Schöpfung" dargestellt, unabhängig von den Schranken der physischen Wirklichkeit. Nach Hausdorff ist Mathematik

"experimentelles Denken". Dagegen steht der Vorwurf von "Schöpferwillkür", formuliert aus der Position der 'Gegenmoderne', die Sinn und Wahrheit in einem Wesen, einem Ur-Grund der Mathematik gesichert wissen will, bei Klein in der räumlichen Anschauung, bei Poincaré und ~~H~~ Brouwer in der Ur-Intuition des Eins-nach-dem-anderen.
'Moderne' und 'Gegenmoderne' haben in dieser Form Parallelen in der Kunst. Es geht um ein nicht nur auf Mathematik beschränktes kulturelles Phänomen.
Die Gegenmoderne ist weder un- noch antimodern. Sie hat ihren konstitutiven Anteil an der Modernisierung der Mathematik in der Entwicklung von Standespolitik, der Institutionalisierung von angewandter Mathematik und von Mathematikdidaktik. In Göttingen ist dieses komplementäre Zusammenwirken zweier polarer Haltungen zur mathematischen Arbeit besonders deutlich und besonders erfolgreich.

Herbert Mehrtens

1991 VI 19 Einige meinen kombinatorischen und Zahlentheoretischen Probleme.

Paul Erdős

Gibt es ein ~~komb~~ Kongruenzsystem für jedes c

(1) $a_i \pmod{n_i}$, $c \le n_1 < n_2 < \dots < n_k$

so dass jede ganze Zahl mindestens eine der Kongruenzen (1) befriedigt? Ich gebe 1000 Dollar für Beweis oder Widerlegung. $c = 24$ ist der jetzige Rekord.

Erdős-Faber-Lovász Vermutung: $K_1, \dots K_n$ seien n kantenfremde vollständige Graphen. Ist es wahr dass $\bigcup_{i=1}^{n} K_i$ chromatische Zahl n hat. (500 Dollar) Kürzlich zeigte Jeff Kahn dass die chromatische Zahl $=(1+o(1))n$ ist.

Darstellungen projektiver Geometrien, die mit Homomorphismen zusammenhängen.

Es sei K ein Körper und R ein Teilring von K mit $1 \in R$. Ist F ein freier R-Rechtsmodul und ist $\Delta_R(F)$ die Menge der Teilmoduln T von F, für die F/T torsionsfrei ist, so sind die Verbände $(\Delta_R(F), \subseteq)$ und $(L_K(F \otimes_R K), \subseteq)$ isomorph, wobei $L_K(V)$ die Menge der Teilräume des K-Vektorraumes V bezeichnet.

22.6.1991 Heinz Lüneburg (Kaiserslautern)

28 June 1991 On the packing density in $\mathbb{R}^n$

S. A. Stepanov, Moscow

Let $\mathbb{R}^n$ be Euclidean n-dimensional space, Λ be a lattice in $\mathbb{R}^n$ with fundamental determinant $\Delta = \operatorname{mes}(\mathbb{R}^n/\Lambda)$ providing a lattice packin of $\mathbb{R}^n$ by unit balls $B_n(1)$ and $V_n(1)$ be the volume of $B_n(1)$. Define the density of the packing as

$$\delta_n = \frac{V_n(1)}{\Delta}.$$

In 1983 V. I. Levenstein proved that for all $n \geq 1$

$$\delta_n \leq \frac{j^n(\frac{n}{2})}{4^n \Gamma^2(\frac{n}{2}+1)},$$

where $j(\frac{n}{2})$ is the least zero of Bessel's function $J_{\frac{n}{2}}(x)$, and obtained the following asimptotic enequality

$$\delta_n \lesssim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\, 2^{-0,557305\, n}, \quad n \to \infty.$$

Recently A. Yudin (1990) proposed significantly more simple approach for getting of these result.

The talk is about slightly simplefied variant of Yudin's proof.

[signature]

28 Juni 1991

Toeplitz-Operatoren und Quantisierung im $\mathbb{C}^n$

Harald Upmeier, Kansas

Der klassische Weyl-Kalkül ordnet jeder Funktion f auf dem Phasenraum $\mathbb{R}^{2n}$ den Operator

$$W(f)\varphi(q) = h^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{q+q'}{2}, p\right) e^{2\pi i \frac{(q-q')p}{h}} \varphi(q')\, dq'\, dp$$

auf dem Zustandsraum $L^2(\mathbb{R}^n)$ zu. Die Wick'sche Methode betrachtet stattdessen den Toeplitz-Operator $T_f \varphi = E(f\varphi)$ auf dem Segal-Bargmann ~~Spa~~ Raum $H^2(\mathbb{C}^n)$ von holomorphen Funktionen. Hier bedeutet E die Orthogonalprojection. Wir betrachten Toeplitz-Operatoren auf gekrümmten Phasenräumen, z.B. beschränkten symmetrischen Gebieten im $\mathbb{C}^n$ und Reinhardt-Gebieten im $\mathbb{C}^n$. Im ersten Falle ist die Toeplitz C^*-algebra vom Type I, mit einer geometrischen Stratifizierung. Im zweiten Falle erhält man Algebren nicht vom Type I, mit Blätterungs-C^*-algebren im Rande. Diese Berezin-Wick quantisierung hat keine günstigen pseudo-differential Eigenschaften, da sie zu starke glättet. Statt dessen führen wir einen verallgemeinerten Weyl-Kalkül, für symmetrische Gebiete, ein, der für jede (diskrete Serien-) Darstellung der holomorphen Automorphismengruppe sinnvoll ist, und zu einem neuartigen Symbolkalkül für Mannigfaltigkeiten mit konischen Singularitäten führt (mit A. Unterberger).

H. Upmeier

Harmonic Approximation on Unbounded Closed Sets and Applications

M. Goldstein

Let Ω denote an open set in R^N where N is assumed to be ≥ 2. Let F be a non-empty relatively closed subset of Ω. Let Ω^* denote the one point compactification of Ω. For $r > 0$, let $B(x, r)$ denote the open ball centered at x and radius r. Let $B_0(x, r) = B(x, r) \setminus \{x\}$. Let

$$U(x, y) = -\log \|x - y\| \qquad (N = 2)$$
$$U(x, y) = \|x - y\|^{2-N} \qquad (N \geq 3)$$

Note that for each fixed x, the functions $U(x, \cdot)$ and $U(\cdot, x)$ are harmonic on $R^N \setminus \{x\}$.

If for some $r > 0$, a function u is harmonic on $B_0(x, r)$ but not on $B(x, r)$, then we call x a singularity of u. If further, u can be represented on some $B_0(x, r)$ in the form $u = h + \lambda U(x, \cdot)$, where h is harmonic on $B(x, r)$ and $\lambda \in R$, then we call x a Newtonian singularity of u. If x is a singularity of u and u is bounded on some $B_0(x, r)$, then we call x a removable singularity of u; in this case u has a harmonic continuation to $B(x, r)$. Let $\mathcal{S}(E)$ (respectively $\mathcal{N}(E)$, respectively $\mathcal{H}(E)$) denote the set of functions harmonic on some open set containing E except possibly for singularities (respectively Newtonian singularities, respectively removable singularities) where E denotes a non-empty subset of R^N. Let $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. If $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, let $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N$ and let

$$D^\alpha = \partial^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}.$$

Theorem 1. Let F be a non-empty relatively closed subset of an open set Ω in R^N, $N \geq 2$. If $u \in \mathcal{S}(F)$, then for each $\varepsilon > 0$, each $\mu \geq 0$, and each $k \in \mathbb{N}$, $\exists\, v \in \mathcal{S}(\Omega)$ such that

$$|D^\alpha(v-u)(x)| < \varepsilon(1+\|x\|)^{-\mu} \quad (x \in F, |\alpha| \leq k).$$

Moreover, if $\Omega^* \setminus F$ is connected and locally connected and $u \in \mathcal{H}(F)$, then we may take $v \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Theorem 2. Let F be a non-empty relatively closed subset of an open set Ω in R^N $(N \geq 2)$ such that $\Omega \setminus F$ and $\Omega \setminus F^\circ$ are thin at the same points. If $u \in \mathcal{S}(F^\circ)$ and u is defined, finite, and continuous at each point of $\partial F \cap \Omega$, then for each $\varepsilon > 0$ and each $\mu \geq 0$, $\exists\, v \in \mathcal{S}(\Omega)$ such that

$$|(v-u)(x)| < \varepsilon(1+\|x\|)^{-\mu} \quad (x \in F).$$

Moreover, if $\Omega^* \setminus F$ is connected and locally connected and $u \in \mathcal{H}(F^\circ) \cap C(F)$, then we may take $v \in \mathcal{H}(\Omega)$.

We shall now consider L^p approximation where $1 \leq p < +\infty$. Conditions are known which ensure that a compact set K in R^N, $N \geq 2$ has the property that every function in $\mathcal{H}(K^\circ) \cap L^p(K)$ can be approximated in the L^p-norm on K by functions in $\mathcal{H}(K)$. We shall now consider the situation where K is replaced by a relatively closed subset F of an open set Ω in R^N.

If F is a non-empty relatively closed subset of an open set Ω in R^N, we shall say that F has the L^p approximation property if every function in $\mathcal{H}(F^\circ) \cap L^p(F)$ can be approximated in the L^p-norm on F by functions in $\mathcal{S}(\Omega) \cap \mathcal{H}(F)$, and we shall say that F has the local L^p-approximation property if $\exists$ a sequence $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ of open subsets of $R^N \ni \overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1}\ \forall\, n \geq 1$ and $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega$, and for every function u in $\mathcal{H}(F^\circ) \cap L^p(F)$ and every n, there are functions in $\mathcal{H}(F \cap \overline{\Omega}_n)$ which approximate u arbitrarily closely in the L^p-norm on $F \cap \overline{\Omega}_n$.

Theorem 3. Let F be a non-empty relatively closed subset of an open set Ω in R^N. If $p \geq 1$ and F has the local L^p-approximation property, then F has the L^p-approximation property. If further, $\Omega^* \setminus F$ is connected and locally connected, then every function $u \in \mathcal{H}(F^\circ) \cap L^p(F)$ can be approximated in the L^p-norm on F by functions in $\mathcal{H}(\Omega)$.

We shall now consider applications. If ω is an open set in R^N and f is a real-valued function on $\partial\omega$, we shall say that the Dirichlet problem (ω, f) has a classical solution if $\exists\, u\ \mathcal{H}(\omega) \ni u(x) \to f(y)$ as $x \to y$ for each $y \in \partial\omega$.

Theorem 4. Let ω be an open set in R^N such that every point of $\partial\omega$ is regular (in the sense of the Perron-Wiener-Brelot approach to the Dirichlet problem). Suppose also that $\exists$ an open set Ω in $R^N \ni \overline{\omega} \subset \Omega$ and $\Omega^* \setminus \partial\omega$ is connected and locally connected. If $f : \partial\omega \to R$ is continuous on $\partial\omega$, then the Dirichlet problem (ω, f) has a classical solution.

Now let f be a real- or complex-valued function on R^N $(N \geq 2)$ and suppose that f is integrable on each $(N-1)$-dimensional hyperplane ξ in R^N. The Radon transform $\hat{f}$ of f is defined on the set Ξ^N of all such hyperplanes by

$$\hat{f}(P) = \int_{\underline{P}} f \, d\lambda$$

where λ denotes $(N-1)$-dimensional Lebesgue measure on P. If f is continuous and integrable on R^N and $\hat{f} \equiv 0$ on P^N, then $f \equiv 0$.

Theorem 5. There exists a non-constant harmonic function h on R^N $(N \geq 2)$ such that $\hat{h} \equiv 0$ on P^N.

Myron Goldstein

8 July 1991

Upper and Lower bounds for the nilpotency class of the maximal finite periodic group of given exponent n and m generators

S. I. Adian (Moscow, The Steklov Institute)

The Burnside problem (1902): Is the group
$B(m,n) = \langle a_1, .., a_m; x^n = 1 \rangle$
generated by m generators and satisfying an identity relation $x^n = 1$ one of finite order, and if so what is its order?

The answer is positive for $n \le 3$ (Burnside, 1902), $n = 4$ (Sanov, 1940) and $n = 6$ (M. Hall, 1957) (for any m).

The negative solution of this problem for $m > 1$ and add $n > 4381$ was published in joint article of P. S. Novikov and S. I. Adian in „Izvestija AN SSSR, ser. Math." (1968), v. 32 №№ 1, 2, 3.

This result was improved for add $n \ge 665$ (Adian, 1975) and for odd $n \ge 115$ (Lysionok, 1991) (nonpublished)

The restricted Bunside Problem (Magnus, 1950):
Does there exists a maximal finite m-generator group (R(m,n)) of a given exponent n and what is its order?

A. I. Kostrikin and G. Higman in 1956 gave independent proofs of the existence of $R(m,5)$. Higman's proof gave a linear by m bound of the nilpotency class of $R(m,5)$.

Kostrikin (1959–1979–1986) poved the existence of $R(m,p)$ for any m and prime p. His proof was noneffective and did not give any information about the order or the nilpotency clall of $R(m,p)$.

Adian and Razborov in 1987 (Uspechi Math. Nauk.) published the first effective proof of Kostrikin's theorem finding upper bounds for the nilpotency classes of the groups $R(m,p)$.

Theorem 1. Any m-generator Lie algebra with the Engel identity: $(E_n): [x, y^n] = 0$ over a field ~~F~~ of characteristic $p > n$ or 0 is nilpotent and its class of nilpotency is

$$\le F(n, m, N(n, 10) \cdot 6^{n+12}),$$

where $F(n, r, \alpha)$ and $N(n, r)$ defined by equations:

$$F(n, r, 0) = 1, \quad F(n, r, \alpha+1) = n \cdot r^{3F(n, r, \alpha)}$$

$$N(n, 4) = 6, \quad N(n, r+1) = F(n, r+1, N^2(n, r) \cdot 3^{n+6})$$

From theorem 1 we obtain for $\forall m$ and prime exp. p the upper bound for the order of the group $R(m,p)$:

$$|R(m,p)| < p^{m \cdot F(p-1, m, N(p-1, 10) \cdot 6^{n+12})}$$

The exponential lower bounds for the orders of groups $R(m,p)$ were ~~founded~~ published in the joint paper of Adian and Repin in Mathem. Zametki (1988, v. 44, N2).

Theorem 2. There exists a natural number N such that for all prime $p > N$

$$|R(2,p)| > p^{2^{2^{cp}}}, \quad \text{where } c = 1/15{,}5.$$

For the nilpotency class of groups $R(2,p)$ for $p > N$ we obtain a lower bound $2^{2^{cp}}$, where $c = 1/15{,}4$.

The last result is proved first for the Lie algebra $L(B(2,p))$ that assosiated with the free Burnside group $B(2,p)$ of the exponent p.

С.Адян

The Number of Groups of Order n

12 July 1991

Keith Dennis
Cornell University

Let $g(n)$ denote the number of groups of order n. We seek to determine the values attained by this function. It has been infrequently studied, first by Cayley in 1878, G. A Miller in the 20's, and recently its approximate behavior has been studied by Erdös, Murty & M + G. Spiro among others.

However, it appears that the work of O. Hölder in 1893 (Nachrichten von der Königl Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math-physikalische Klasse) will lead to a determination of the values of $g(n)$. He showed that every group of squarefree order $n = md$ is a semi-direct product $\mathbb{Z}_m \rtimes_\varphi \mathbb{Z}_d$ and gave an explicit formula for the number of such groups.

We give a description in terms of digraphs first considered by Erdös-Murty-Murty. Let $\mathcal{H}(n)$ denote the graph whose vertices are the primes p with $p|n$ and whose (directed) edges are $p \longrightarrow q$, $p,q|n$, $p|q-1$. Note that no graph $\mathcal{H}(n)$ contains an oriented loop. Conversely, it is easy to see via Dirichlet's Theorem on primes in an arithmetic progression, that any finite digraph with no oriented loops arises as an $\mathcal{H}(n)$ for infinitely many integers n.

For Γ a digraph with labelled vertices we define a polynomial in the labels via

$$h(\Gamma) = \sum_{S\subset v(\Gamma)} \prod_{v\in S} \frac{v^{o_v(S')}-1}{v-1}$$

where $o_v(S')$ is the number of arrows starting in v and terminating in S', the complement of S.

<u>Holder's Theorem</u>: n squarefree
Then $g(n) = h(\mathcal{G}(n))$.

A number of simple formulas relating the behavior of the function h to the geometric properties of h allow one to study the function $g(n)$ in this case.

Since it is notoriously difficult to study the functions given by polynomials in primes we restrict to the case where the function is constant: forests of rooted trees. We let Tree denote the set of all rooted trees (finite) and define a multiplication — adjoint at the root. Then $h: \text{Tree} \longrightarrow \mathbb{Z}$ is a multiplicative homomorphism. Let T^+ be the tree formed from T by adjoining a new root at the old one; let T° denote "pruning" off the old root. Then the value of the function h on trees is completely determined by the rules:

1) $h(\cdot) = 1$

2) $h(T_1 T_2) = h(T_1)\, h(T_2)$

3) $h(T^+) = h(T) + h(T^\circ)$.

By studying the pairs $(h(T^\circ), h(T))$ we see that generating the values of $h(T)$ is equivalent to studying pairs of integers S generated by

1) $(1,1) \in S$

2) if $(a,b), (a',b') \in S$, then $(aa', bb') \in S$

3) if $(a,b) \in S$, then $(b, a+b) \in S$.

It can be easily shown that if T has n vertices, $h(T) \le 2^{n-1}$. On the other hand, Polya enumeration theory shows that the number of trees grows roughly like ρ^n (where ρ is about 3). Thus if the values of h are distributed the least bit randomly, one expects that ultimately all values ~~[illegible]~~ arise.

Computations to 50,000,000 show that a set of 508 numbers

$\{7, 11, 19, 29, 31, 47, 49, 53, 67, 71, 73, 79, 87, 91, \ldots, 55487\}$

do not occur among the values of h.

<u>Conjecture I</u>. The values of h omit precisely 508 integers.

Other graphs, e.g. , which gives $p+2$, can be found to fill in the remaining values.

<u>Conjecture II</u> $g(n)$ takes on every positive integer as a value an infinite number of times.

Keith Dennis

3 September 1991 Automorphism groups of three-dimensional hyperbolic manifolds

Alexander D. Mednykh (Omsk)

Let $M = H^n/\Gamma$, $n=2,3$ be hyperbolic manifold and $Vol(M) < \infty$. It is well-known

1. $n=2$, $|Isom(M)| \leq c_2 \, Vol(M)$, $c_2 = \frac{1}{\min Vol(O^2)} = \frac{21}{\pi}$ (Hurwitz 84(g-1) Theorem)
2. $n=3$, $|Isom(M)| \leq c_3 \, Vol(M)$, $c_3 = \frac{1}{\min Vol(O^3)} = ?$ Thurston, Jørgensen
3. $n=3$, $|Isom(M)| \leq 3.276 \, Vol \, M$ if M has only one cusp. Adams (1991)

Main problem: how to find $Isom(M)$?

1. Algebraic approach, $M = S^3 \setminus$ (8), $Isom(M) = D_4$, Magnus (1931)
2. Topological approach, $M = S^3 \setminus$ (8), $Isom(M)$ - Riley
3. Geometrical approach M closed hyperbolic manifold

$|Isom(M)| \leq c \, Vol(M)$, $c = \frac{1}{\min Vol(O^3)}$, $\exists$ regular covering $M \to O^3$

<u>Theorem 1.</u> M - Seifert-Weber dodecahedron space, then $Isom \, M = S_5$.

<u>Theorem 2.</u> M - Löbell manifold then $Isom \, M = Z_2^3 \rtimes (D_6 \rtimes Z_2)$

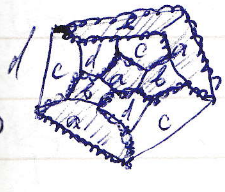
<u>Theorem 3</u> M - Al Jubowri manifold, then $Isom \, M = Z_2^3$

Denote by $\Delta(P)$ the group generated by reflections in faces of P

<u>Theorem 4.</u> $P \subset H^3$ right angled polyhedron $\theta: \Delta(P) \to Z^3$ is induced by regular 4-color coloring $\Gamma = Ker \, \varphi$. Then $M = H^3/\Gamma$ is closed oriented hyperbolic manifold.

<u>Example</u> If $a=(100)$, $b=(010)$, $c=(001)$, $d=(111) \in Z_2^3$ and θ is induced by coloring of regular dodecahedron P

Then $M = H^3/\Gamma$ hyperelliptic manifold: $\exists \tau : \tau^2 = id_M$ such that $M/\langle\tau\rangle$ is homeomorphic to S^3.



P

Mednykh

18. Oktober 1991 : D-elliptische Garben und die Langlandskorrespondenz

M. Rapoport (Wuppertal)

Im Vortrag wurde eine gemeinsame Arbeit mit G. Laumon und U. Stuhler vorgestellt. Es wird der Begriff der D-elliptischen Garbe definiert und gezeigt, daß der Modulraum der D-elliptischen Garben ein projektives glattes Schema über einem Funktionenkörper in einer Variablen über einem endlichen Körper ist. Es handelt sich um eine kompakte Variante des Drinfeld'schen Modulraums der elliptischen Moduln. Die l-adische Kohomologie dieses Modulraums kann mit Hilfe der Methoden von Drinfeld, Langlands und Kottwitz analysiert werden. Insbesondere kann der folgende Satz bewiesen werden.

<u>Satz</u> (Lokale Langlandsvermutung im Funktionenkörperfall): Es sei F ein lokaler Körper der Charakteristik p. Es sei für $d \geq 1$

$\mathcal{G}^\circ_F(d) = \{$ Isomorphieklassen von irreduziblen komplexen Darstellungen der Dimension d von $Gal(\bar{F}/F)$ mit Determinantencharakter endlicher Ordnung $\}$

$\mathcal{A}^\circ_F(d) = \{$ Isomorphieklassen von irreduziblen supercuspidalen Darstellungen von $GL_d(F)$ mit zentralem Charakter endlicher Ordnung $\}$.

Dann existieren Bijektionen für alle $d \geq 1$,

$$\mathcal{A}^\circ_F(d) \longrightarrow \mathcal{G}^\circ_F(d) : \pi \longmapsto \sigma_\pi$$

mit folgenden Eigenschaften.

$$L(\sigma_\pi \otimes \sigma_{\pi'}, s) = L(\pi \times \pi', s) \quad , \pi \in \mathcal{A}^\circ_F(d), \pi' \in \mathcal{A}^\circ_F($$
$$\varepsilon(\sigma_\pi \otimes \sigma_{\pi'}, \psi, s) = \varepsilon(\pi \times \pi', \psi, s) \quad \psi$$
$$\sigma_{\pi\chi} = \sigma_\pi \otimes \sigma_\chi \quad \chi \in \mathcal{A}^\circ_F(1)$$
$$(\sigma_\pi)^\vee = \sigma_{\pi^\vee}$$

M. Rapoport

25 Oktober, 1991 An Inequality for wheels and windows.

Bernard Maskit (Stony Brook + IHES)

The first formulation of the problem starts with a compact 3-manifold M, with incompressible boundary, admitting a geometrically finite hyperbolic structure. Let $C \subset M$ be the characteristic submanifold – then C is a disjoint union of Seifert fiber spaces (each with exactly one central fiber), and I-bundles over a possibly unorientable surfaces. Let $\gamma \in M$ be a geodesic, in the hyperbolic metric, where γ is freely homotopic to a central fiber of an ~~I~~ ~~[illegible]~~ Seifert fiber space, or a boundary loop at the base of an I-bundle in the characteristic submanifold. In Thurston's terminology, these are on the boundary of the window base; he shows that the length of such a geodesic is bounded, where the bound depends on the topology of M, independent of the choice of hyperbolic structure.

The second formulation of the problem starts with a Kleinian group G, several connected components $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, $n \geq 2$ of the set of discontinuity of G, where the intersection of the stabilizers of the Δ_i contains a loxodromic subgroup J (if $n=2$, then this intersection might be quasifuchsian, in this case, we require J to ~~be~~ consist of boundary elements). Assume that J is maximal, and that j is a generator of J. The goal is to find an inequality relating the trace of j, the sum of the hyperbolic areas of the Δ_i, modulo their stabilizers, and n. The background to this is that one wants to show that the sequence of canonical splittings of a Kleinian group (these are the analogues of the characteristic submanifold, and are stated in terms of systems of swirls and wheels) ends after finitely many steps.

Thm. Let $j \in J$ be as above. Assume G has been normalized so that $j(z) = \lambda z$, $|\lambda| > 1$. Assume area $\Delta_i / \mathrm{Stab}(\Delta_i) \leq K$. Then (1) $\log|\lambda| \leq 6\pi K$, and (2) $n \leq \max\left\{ \frac{16\pi K}{\log|\lambda|}, \frac{\log|\lambda|}{\pi K} \right\}$

Bernard Maskit

New Makey Functors and Applications

MASAHARU MORIMOTO

Okayama University, Okayama Japan

We are interested in pairs (G, Θ) of finite groups G and finite G-sets Θ. Let R be a commutative ring, and $R[G]$ the group ring of G over R. A pair (M, α) of an $R[G]$-module M and a G-map $\alpha : \Theta \to M$ is called an $(R[G], \Theta)$-*module*. Let $f : (G, \Theta) \to (G', \Theta')$ be a morphism, that is, f is a pair of a group homomorphism $f_G : G \to G'$ and f_G-equivariant map $f_\Theta : \Theta \to \Theta'$. Then the induction of (M, Θ) by f, denoted by $(f_\# M, f_\# \alpha)$, is defined as follows: Firstly,

$$f_\# M = R[G'] \otimes_{R[G]} M$$

and secondly

$$f_\# \alpha(y) = \sum \{\, g' \otimes \alpha(x) \mid [g', x] \in G' \times_G \Theta,\ g' f_\Theta(x) = y \,\}$$

for $y \in \Theta'$. Let Z be a finite G-set. Let $\Theta : \mathcal{S}(G) \to \mathcal{P}(Z)$; $H \mapsto \Theta_H$ be a G-map. If $\Theta_H \cap \Theta_K = \Theta_{H \cap K}$ for any H and $K \in \mathcal{S}(G)$, then categories consisting of $(R[H], \Theta_H)$-modules with certain poperties and structures fit to making Mackey functors. For examples, $K_0(R[G], \Theta)$, $GW_0(R, G, \Theta)$, $L_n(R[G], \Theta)$. Furthermore, study of these abelian groups is important from the view point of Transformation Groups.

THEOREM 1. *(With A. Bak.) Let Y be a compact, 1-connected, oriented, smooth G-manifold of dimension $n = 2k \geq 6$. Suppose $dim Y_s \leq k$ and certain hypotheses. Then, one has a G-surgery obstruction group $W_n(Y)$ for G-framed maps $f : X \to Y$ having the following properties:*
(a) $W_n(Y)$ depends only on the following four data: Θ, $\rho : \Theta \to \mathcal{S}(G)$, Q and S, where Θ is the set of all k-dim. conn. comp's of Y^H for some $H \subset G$, $\rho(Y_\alpha)$ is the intersection of all isotropy subgroups at y in Y_α, $Q = \{g \in G \mid g^2 = 1, \dim Y^g = k-1\}$ and $S = \{g \in G \mid g^2 = 1, \dim Y^g = k\}$.
(b) The correspondence $H \mapsto W_n(\mathrm{Res}^G_H Y)$ is a Green module over the Green functor $H \mapsto GW_0(R, H, \Theta_H)$.

As applications of my joint research with A. Bak on $W_n(Y)$ above, we get

THEOREM 2. *(a) (With A. Bak.) There exists a smooth G-action on S^n with exactly one G-fixed point from some finite group G if and only if $n \geqq 6$.*
(b) (With E. Laitinen and K. Pawalowski.) For each nonsolvable finite group G, there exists a smooth G-action on S^n of certain dimension n with exactly one G-fixed point.

At last, not at least, I wish to express my hearty thanks to members of Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld for their invitation and kind hospitality.

8th Nov. 1991 Masaharu Morimoto

Typeset by $\mathcal{A}_\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

15. November 1991

Generalized Triangle and Tetrahedron Groups

E.B. Vinberg (Moscow)

In a series of works by R. Ree, N.S. Mendelsohn, B. Fine, J. Howie, F. Levin, G. Rosenberger, G. Baumslag, J.W. Morgan, P.B. Shalen and others the groups of the form

$$G = \langle x, y \mid x^k = y^l = w(x,y)^m = e \rangle \quad (k, l, m \geq 2)$$

called generalized triangle groups were investigated. It was shown that any such group admits a homomorphism $\varphi: G \to PSL_2(\mathbb{C})$ such that the orders of $\varphi(x)$, $\varphi(y)$ and $\varphi(w(x,y))$ are equal to k, l and m respectively. (Such homomorphisms are called special.) It follows from this theorem that the orders of x, y and xy themselves are also equal to k, l and m respectively. Making use of ~~existing~~ a special homomorphism, Baumslag, Morgan, and Shalen proved that if $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} \leq 1$ then G is infinite.

In the talk a notion of a generalized tetrahedron group was proposed. This is a group of the form

$$G = \langle x, y, z \mid x^k = y^l = z^m = u(y,z)^p = v(z,x)^q = w(x,y)^r = e \rangle$$
$$(k, l, m, p, q, r \geq 2)$$

Following the lines of the investigation of generalized triangle groups one can prove that any generalized tetrahedron group admits a special homomorphism into $PSL_2(\mathbb{C})$, either. It follows that the orders of $x, y, z, u(y,z), v(z,x), w(x,y)$ are equal to k, l, m, p, q, r respectively. One can also show that if $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 2$, then G is infinite. The classification of all finite ~~the~~ generalized triangle and tetrahedron groups is still an open problem.

Э.Винберг

November 22, 1991

Polar Actions on Symmetric Spaces

R.S. Palais (Brandeis Univ. + MPI, Bonn)

The action of a compact group G isometrically on a Riemannian manifold X is called polar iff it has a section, i.e., a closed submanifold that meets all G-orbits orthogonally. It is easy to see that a section must be totally geodesic, and if it is also flat then the action is called hyperpolar. Equivalent characterizations of polar are that a normal vector to a principal orbit that is equivariant is parallel in the Riemannian sense, or that the principal orbits are isoparametric submanifolds (i.e. their normal bundle is Riemannian flat and the principal curvatures along a parallel normal field are constant. Classical examples are the conjugation action of $O(n)$ on $n \times n$ symmetric matrices (diagonal matrices are a section) and the adjoint action of a compact Lie group on itself (with its bi-invariant metric), for which a maximal torus is a section. Polar representations were classified by J. Dadok, who showed that they are "ω-equivalent" to an isotropy representation of a symmetric space (ω-equivalence means "having exactly the same orbits as" - although the group may differ).

This is a report on a joint effort of E. Heintze, R. Palais, C.-L. Terng, and G. Thorbergsson to better understand hyperpolar actions of a compact Lie group H on a compact symmetric space G/K. We first reduce the problem to the "group case" i.e. given a compact group G with its bi-invariant metric find all subgroups H of $G \times G$ (acting on G by $(h_1, h_2)g = h_1 g h_2^{-1}$) such that the action of H on G is hyperpolar. After developing an algebraic criterion and reviewing the classical examples of Bott-Samelson, R. Hermann, and E. Cartan, we present some general structure theorems and a partial classification theorem.

Richard S. Palais

November 29, 1991

The Riemann Hypothesis: New Results

Richard S. Varga (Kent State University, Kent, OH 44242; USA)

It is difficult to imagine that a numerical analyst would ever dream of working on the Riemann Hypothesis, when extremely brilliant and well-known mathematicians have worked on this Hypothesis (Hardy, Pólya, de Bruijn, N. Levinson, etc.). But, my training was in function theory at Harvard University, with Prof. J.L. Walsh, as my advisor, so that I feel, in some sense, "allowed" to work in this area.

In some joint work with G. Csordas (Univ. of Hawaii), we answered in 1985 (affirmatively) an open conjecture of G. Pólya, related to the RH, which had been unsolved since 1927. There, we showed that if

$$\Phi(t) := \sum_{n=1}^{\infty} (2n^2\pi^4 e^{9t} - 3\pi n^2 e^{5t}) \exp(-\pi n^2 e^{4t}) \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

then

$$\log \Phi(\sqrt{t}) \text{ is strictly concave on } (0, +\infty),$$

which is sufficient to solve the Pólya Conjecture of 1927.

Since then, we have been interested in lower bounds for the de Bruijn-Newman constant Λ, where if

$$H_\lambda(x) := \int_0^\infty e^{\lambda t^2} \Phi(t) \cos(xt)\, dt \qquad (\lambda \in \mathbb{R};\ x \in \mathbb{C}),$$

then it is known that

i) H_λ has only real zeros if $\lambda \geq \Lambda$;
ii) H_λ has some nonreal zeros if $\lambda < \Lambda$;
iii) $-\infty < \Lambda \leq 1/2$; and
iv) RH is true $\Rightarrow \Lambda \leq 0$.

The following results for lower bounds for Λ are known:

$-50 < \Lambda$ (Csordas, Norfolk, V., 1988, Numer. Math.)
$-5 < \Lambda$ (te Riele, 1991, Numer. Math.)
$-0.385 < \Lambda$ (Norfolk, Ruttan, V. 1991
$-0.0991 < \Lambda$ (Csordas, Ruttan, V., 1991)

While the above numerical results used high precision, we can now show that

$$-6 \cdot 10^{-9} \leq \Lambda,$$

this is remarkably close to a lower bound of zero. But this is, of course, close to (iv) above!

Richard S. Varga

Dec. 6, 1991

Polynomial Identities for Matrices

Vesselin Drensky (Sofia, Bulgaria)

We give a survey on the polynomial identities of the $k \times k$ matrix algebra M_k over a field K of characteristic 0 on the trace algebra $\overline{F}_m$ of m generic $k \times k$ matrices and its centre $\overline{C}_m$ – the algebra of SL_k-simultaneous invariants of m generic matrices.

In 1985 jointly with Azniv Kasparian we found a central polynomial of degree 8 for the 3×3 matrices which did not enter the general scheme for obtaining central polynomials. We have been trying to explain the existence of this polynomial. The Razmyslov method for constructing central polynomials is via essential weak polynomial identities (polynomials from $K\langle X\rangle$ which vanish on $sl_k \subset M_k$ but not on M_k).

<u>Theorem 1.</u> (jointly with Tsetska Rashkova) (i) All weak polynomial identities for $k \times k$ matrices of the form $f(x, y_1, \dots, y_{k-1})$, $\deg_y f = k-1$, are consequences of

$$w_k(x, y_1, \dots, y_{k-1}) = \sum (\operatorname{sign} \sigma) x^{\sigma(0)} y_1 x^{\sigma(1)} \dots y_{k-2} x^{\sigma(k-2)} y_{k-1} x^{\sigma(k)},$$

where the sum is on all permutations of $\{0, 1, \dots, k-2, k\}$.

(ii) All weak polynomial identities of degree 6 for M_3 are consequences of $w_3(x, y_1, y_2)$ and the standard polynomial $S_6(x_1, \dots, x_6)$.

In some sence this result is negative because it gives only known central polynomials and cannot explain the existence of the central polynomial of degree 8.

<u>Theorem 2.</u> Let $\overline{F}_m$, $\overline{C}_m$ be the trace ring and the ring of invariants for m generic 2×2 matrices $y_1, \dots, y_m$ and let $z_i = y_i - \frac{1}{2} \operatorname{tr} y_i$.

(i) (Procesi) $\overline{F}_m = K[\operatorname{tr} y_1, \dots, \operatorname{tr} y_m] \otimes_K \langle z_1, \dots, z_m\rangle$, where $\langle z_1, \dots, z_m\rangle$ is the algebra generated by $z_1, \dots, z_m$;

(ii) (jointly with P.E. Koshlukov) Let $D(\overline{F}_m) = \langle [z_1^2, z_2], S_4(z_1, z_2, z_3, z_4)\rangle^{GL_m}$ be the GL_m-module generated by the elements in $\langle \dots \rangle^{GL_m}$. Then $D(\overline{F}_m)$ is a set of defining relations for the algebra $\langle z_1, \dots, z_m\rangle$;

(iii) $\overline{C}_m = K[\operatorname{tr} y_1, \dots, \operatorname{tr} y_m] \otimes_K \langle \operatorname{tr}(z_i z_j), \operatorname{tr}(S_3(z_i, z_j, z_k)) \mid i \leq j\rangle$ and $D(\overline{C}_m) = \langle u_1, u_2, u_3\rangle^{GL_m}$ is a set of defining relations for the commutative algebra $\langle \operatorname{tr}(z_i z_j), \operatorname{tr}(S_3(z_i, z_j, z_k))\rangle$, where

$$u_1 = 2(\operatorname{tr}(S_3(z_1, z_2, z_3)))^2 - 3 \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma \operatorname{tr}(z_1 z_{\sigma(1)}) \operatorname{tr}(z_2 z_{\sigma(2)}) \operatorname{tr}(z_3 z_{\sigma(3)}),$$

$$u_2 = \sum_{i=1}^{4} (-1)^i \operatorname{tr}(S_3(z_1, \dots, \hat{z}_i, \dots, z_4)) \operatorname{tr}(z_1 z_i),$$

$$u_3 = \sum_{\sigma \in S_5} (-1)^\sigma \operatorname{tr}(S_3(z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, z_{\sigma(3)})) \operatorname{tr}(S_3(z_{\sigma(4)}, z_{\sigma(5)}, z_1))$$

and $(-1)^\sigma = \operatorname{sign} \sigma$.

V. Drensky

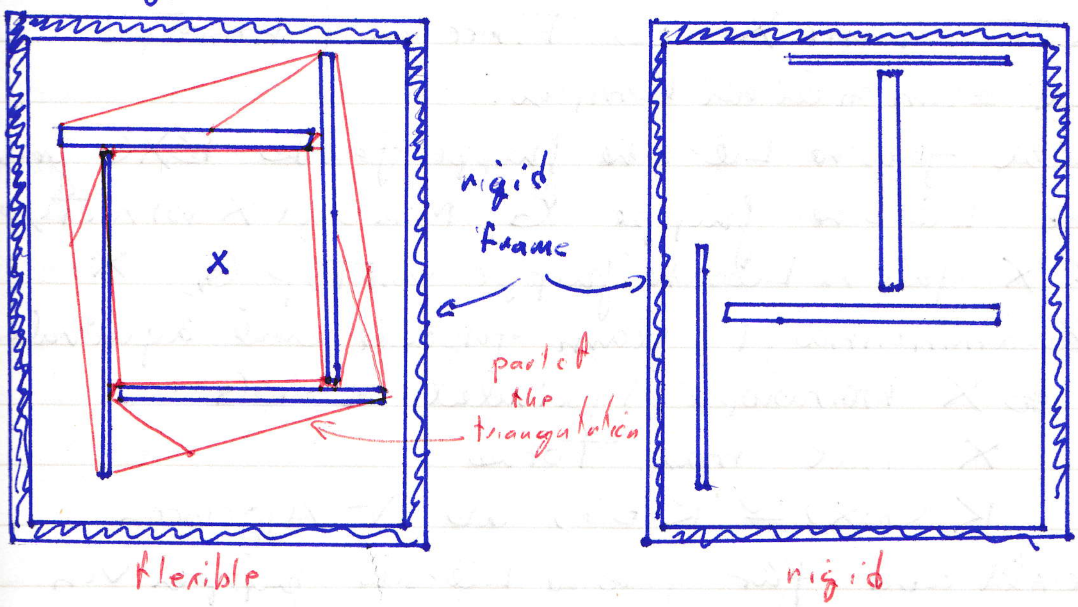
Dec. 13, 1991

Rigid Membranes with Holes

R. CONNELLY, Cornell Univ., Ithaca (visiting, Bielefeld)

Suppose that one takes a piece of paper and clamps it rigidly around its edges, the way a picture is put in frame. Suppose further that someone cuts out some disjoint convex polygonal holes. When is it possible to fold the resulting surface so that it will flex in three-space?

For example, the picture on the left folds as indicated and flexes ~~into~~ up into space. The picture on the right is rigid, no matter how it is triangulated (= folded).



If there is a convex polytope that projects onto the picture, ~~the~~ with each hole the projection of one of the faces of the polytope, (in 3-space), then ~~the su~~ any triangulation of the surface (with holes) is rigid.

For example, any polytope projecting onto the picture on the left must have the point x below each of the planes corresponding to each of the 4 holes. But there must be some point on the surface determined by those 4 planes. So there is no such convex surface.

R Connelly

20.12.91 L. Smith (Göttingen)

Von dem Gesichtspunkt einer Homotopie-Theoretiker besteht eine Liesche-Gruppe aus:

eine topologische Gruppe

eine kompakte Mannigfaltigkeit.

Aber warum soll beide Strukturen auf dem selben Raum? Es reicht(?) doch in der Homotopie Typ eine topologische Gruppe und eine kompakte Mannigfaltigkeit zu finden? Also führen wir ein

Def^n X heißt endliche Schleifen Raum wenn

X hat die homotopie Typ eine topologische Gruppe

X hat die homotopie Typ eine kompakte Mfkt.

Wann ist ein endlicher Schleifen-Raum eine Liesche Gruppe?

Def^n Ein max. Torus für X ist eine Abbildung

$f: BT \longrightarrow BX$ wobei $B(-)$ = klassifizierende Raum

(1) rank T = rank X (2) Fibre von f homotopie Äquivalent zum endlichen Komplex.

X heißt falsche Liesche Gruppe falls $BX \in$ Genus(BG) für eine Liesche Gruppe G. Man sagt X ist von Typ G

Satz: X falsche Liesche Gruppe von Typ G, X einfach zusammenhängt dann folgende sind äquivalent

(1) BX homotopie Äquivalent zu BG

(2) X hat max. Torus

(3) $K(BX) \simeq K(BG)$ als λ-Algebren

Der Satz fehlt aber für falsche Liesche Gruppen von Typ U(n). Ist doch whar für U(2). In dem Vortrag habe ich von den falsche Unitargruppen FU(n) erzählt und ihre Klassifikation. Die FU(n) sind Liesche Gruppen und wir haben

Satz X falsche Liesche Gruppe von Typ U(n). Dann sind folgende äquivalent

(1) X hat max Torus

(2) $\exists$ FU(n) | BX homotope Äq BFU(n)

(3) $K(BX) \simeq K(BFU(n))$ als λ-Algebra

N.B. Zusammenarbeit mit D. Notbohm (Göttingen)

L. Smith