10. 1. 92 Hubertus Th. Jongen (RWTH-Aachen)

NICHTLINEARE OPTIMIERUNG:
STABILITÄT UND PARAMETRISCHE ASPEKTE.

In diesem Vortrag werden endlich dimensionale, differenzierbare Optimierungsprobleme betrachtet.
Bei kompakter zulässiger Menge wird die Strukturstabilität solcher Probleme charakterisiert durch die folgenden drei Bedingungen:

1. Die sogen. Mangasarian-Fromovitz Constraint Qualification ist erfüllt in jedem zulässigen Punkt
2. Jeder Kuhn-Tucker Punkt ist stabil im Sinne von M. Kojima
3. Verschiedene Kuhn-Tucker Punkte haben verschiedene Zielfunktionswerte.

Wegen der auftretenden Ungleichungsnebenbedingungen hängt die in der Definition der Strukturstabilität auftretende Koordinatentransformation des Urbildraumes notwendigerweise von einem (Niveau-) Parameter ab.
Anschließend werden 1-parametrige Familien von Optimierungsaufgaben betrachtet. Die Menge der (verallgemeinerten) kritischen Punkte zerfällt generisch in 5 Klassen/Typen. Mit Hilfe dieser Typeneinteilung wird die (~~[illegible]~~ Möglichkeit für die Verfolgung von lokalen Minima mit eventuellen Sprüngen auf andere Zweige erläutert.

Bert Jongen

17.1.92. The smooth structure of an algebraic surface.

Andrei Tyurin (Moscow. Steklov Inst.)

Every algebraic surface S (smooth, compact and simpliconnected) defines the smooth 4-manifold:

$$\mathrm{top}(S) = \begin{cases} b_2^+ \, \mathbb{CP}^2 \# b_2^- \overline{\mathbb{CP}^2} & \text{if } S \text{ is odd} \\ -\frac{I}{16} K_3 \# (b_2^+ + \frac{3}{16} I) Q & \text{if } S \text{ is even and } I \leq 0 \\ \frac{I}{16} K_{-3} \# (b_2^- - \frac{3}{16} I) Q & \text{if } S \text{ is even and } I > 0 \end{cases}$$

where $b_2 = b_2^+ + b_2^-$ is the second Betti number, $I = b_2^+ - b_2^-$ is the index (or the signature), $\mathbb{CP}^2$ is the complex projective plane, $Q = \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ is the complex quadric, K_3 is K3-surface, K_{-3} is the anti-K3-surface. This 4-manifold is called a topo model of S because top(S) is a homeomorphic to S (M. Freedman).

<u>Question 1.</u> (The Geography of the algebraic surfaces) What integers can be realised as the coefficients of the decompopositions of topo models?

<u>Question 2.</u> When $S = \mathrm{top}(S)$ smoothly?

<u>Question 3.</u> When the canonical class K of S is an invariant of the smooth structure of S?

There are some partial results:

<u>Q. 1</u>: $\mathrm{top}(S) = k K_3 \# m Q \Rightarrow m + 1 \geq k$

$\mathrm{top}(S) = k K_{-3} \# m Q \Rightarrow m \geq 13k - 1$

<u>Q. 2</u>: $p_g(S) = \frac{b_2^+ - 1}{2} > 0 \Rightarrow S \neq \mathrm{top}(S)$ smoothly (S. Donaldson)

$p_g(S) = 0$, S-minimal of general type $\Rightarrow S \neq \mathrm{top}(S)$ smoothly (V. Pidstrigatch, A. Tyurin} Izv. ANSSSR v. 56, 1992, N2)

<u>Q. 3</u>: S has a „big monodromy $\Rightarrow K$ up to sign is an invariant (Friedman, Morgan, Moishezon, Tyurin);

$p_g(S) = 0$, S-minimal of general type $\Rightarrow \pm K$ is an invariant (V. Pidstrigatch, A. Tyurin loco cit.)

<u>Conjecture.</u> $\left\{ S \text{ is a minimal of general type} \right\} \Rightarrow \left\{ \pm K \text{ is invariant of the smooth structure} \right\}$

[signature]

24.1.92 Werner Müller (Bonn)

Spektraltheorie automorpher Formen und automorphe L-Funktionen

Es sei $X = \Gamma \backslash G / K$ ein lokal symmetrischer Raum von endlichem Volumen. Dabei ist G eine nichtkompakte reelle Liesche Gruppe mit endlichem Zentrum, $K \subset G$ eine maximal kompakte Untergruppe und $\Gamma \subset G$ eine diskrete Untergruppe mit $\mathrm{Vol}(\Gamma \backslash G) < \infty$, d.h. ein Gitter. Eines der Hauptprobleme der modernen Theorie der automorphen Formen ist die Spektralzerlegung der Algebra der invarianten Differentialoperatoren auf X. Dazu gehört insbesondere der Laplaceoperator der invarianten Metrik. Äquivalent dazu ist das Problem, die rechtsreguläre Darstellung R_Γ von G in $L^2(\Gamma \backslash G)$ in irreduzible unitäre Darstellungen zu zerlegen.
Aus der Theorie der Eisensteinreihen folgt

$$L^2(\Gamma \backslash G) = L^2_d(\Gamma \backslash G) \oplus L^2_c(\Gamma \backslash G)$$

wobei $L^2_d(\Gamma \backslash G) = \bigoplus_{\pi \in \hat{G}} m_\Gamma(\pi) \mathcal{H}_\pi$ der maximale Teilraum ist, der alle irreduziblen Teildarstellungen von $(L^2(\Gamma \backslash G), R_\Gamma)$ enthält. Es sei $f \in C_0^\infty(G)$ eine K-endliche Funktion und

$$R_\Gamma(f) = \int_G f(g)\, R_\Gamma(g)\, dg .$$

$R^d_\Gamma(f)$ sei die Einschränkung von $R_\Gamma(f)$ auf $L^2_d(\Gamma \backslash G)$.
Eines der Resultate des Vortrages ist

<u>Theorem 1</u>: Für alle K-endlichen $f \in C_0^\infty(G)$ ist $R^d_\Gamma(f)$ ein Operator der Spurklasse.

Zusammen mit den Arbeiten von J. Arthur zur Spurformel verfügt damit über eine Spurformel für den allgemeinen Fall.

Mit den gleichen Methoden erhält man Aussagen über die analytischen Eigenschaften automorpher L-Funktionen.

Theorem 2: Eine automorphe L-Funktion, $L(\phi, r, s)$, die sich mit Langlands Methode analytisch fortsetzen läßt, ist eine meromorphe Funktion der Ordnung $\leq \dim G/K$.

Werner Müller

31. 1. 92 Helmut Lenzing (Paderborn)

Kurven und Darstellungen

Ziel des Vortrags ist, auf die engen Verflechtungen zwischen Fragen der endlichdimensionalen Darstellungstheorie endlichdimensionaler Algebren und klassischen Fragestellungen der Mathematik aufmerksam zu machen.

So haben die Arbeiten von W. Geigle und dem Verfasser herausgearbeitet, daß die binäre Invariantentheorie der Polyedergruppen (Felix Klein, 1884) ihre darstellungstheoretische Entsprechung in der Klassifikation der endl. viele. unzerlegbaren Darstellungen eines

erweiterten Dynkin-Köchers findet.
In Fortführung dieser Untersuchungen wurde ein entsprechender Zusammenhang zwischen Darstellungen wilder kanonischer Algebren (Ringel '85) und zu Fuchsschen Gruppen gehörigen automorphen Formen hergestellt.
Schließlich wird auf die Beziehungen zur Singularitätentheorie von Flächen und Kurven eingegangen.

Helmut Lenzing

7.2.1992 U. Stuhler

Auflösungen glatter Darstellungen

Es wurde über eine gemeinsame Arbeit mit P. Schneider, Köln, berichtet.
Sei K ein lokaler Körper, $O \subseteq K$ Ring der ganzen Größen mit Primideal $(\pi) \subseteq O$. Es sei $G = GL_d(K)$ und $U = U^{(n)}$ die Kongruenzuntergruppe der Stufe n $(n \geq 0)$ mit $U^{(0)} = GL_d(O)$. Es sei ferner für ein Vertex $\sigma = [L]$, $L \subseteq K^d$, des Bruhat-Tits-Gebäudes der $GL_d(K)$ mit $L = g(O^d)$ $U_\sigma := U_\sigma^{(n)} = g U^{(n)} g^{-1}$ und für ein q-Simplex $\sigma = \langle [L_0], \dots, [L_q] \rangle$ des Bruhat-Tits-Gebäudes

$$U_\sigma = \langle U_{\sigma_i} \mid i = 0, \dots, q \rangle, \text{ dabei } \sigma_i = [L_i]$$

das Erzeugnis.
Ist dann V eine glatte Darstellung der lokal-kompakten topologischen Gruppe $G = GL_d(K)$, die von ihren U-fixen Vektoren erzeugt wird,

so gilt der

<u>Satz</u>: Die Sequenz

$$0 \leftarrow V \leftarrow \bigoplus_{|\delta|=0} V^{k_\delta} \leftarrow \bigoplus_{|\delta|=1} V^{k_\delta} \leftarrow \cdots \quad \text{ist exakt.}$$

Man erhält damit Auflösungen der glatten G-Moduln, die von V^k erzeugt werden, durch G-Moduln, die endlich erzeugt und projektiv sind und für die Berechnung von Ext-Gruppen in der Kategorie $\mathrm{Alg}_{\chi}^{\mathrm{Ju}}(G)$ der glatten G-Darstellungen, wo das Zentrum Z mit einem festen Charakter χ operiert, und die von ihren k-fixen Vektoren erzeugt werden, von Nutzen sind.

M. Stuhler (Wuppertal)

14.2.92

Mikroprimstellen

Jede ~~Mikro~~Primzahl zerfällt in viele „Mikroprimzahlen", jede Primstelle eines Zahlkörpers in viele „Mikroprimstellen". Diese benehmen sich beim Übergang von einem Körper zum anderen wie die klassischen Primstellen, mit dem Vorteil, daß die „Henselisierungen" $K_{\mathfrak{P}}$) von besonders einfacher Struktur sind. Als Folge erhält man eine einfache und vereinheitlichte Form der lokalen und lokalen Klassenkörpertheorie. Notwendige Voraussetzung für das Verständnis der Mikroprimstellen war der Besuch des Vortrags.

J. Neukirch (Regensburg)

„Orthogonal Decompositions and Integral Lattices"

A. I. Kostrikin (Moscow)

Of course, as vector space every complex simple Lie algebra $\mathcal{L}$ is decomposed into a direct sum of Cartan subalgebras $\mathcal{H}_i$:

$$\mathcal{D}: \quad \mathcal{L} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_h \quad (h \text{ the Coxeter number}). \qquad (1)$$

But put the condition (K is the Killing form):

$$K(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j) = 0 \quad \forall\, i,j;\ i \neq j. \qquad (2)$$

Then we will have an orthogonal decomposition (OD), if it does exist.

Conjecture 1. A Lie algebra L of type A_n (resp. C_n) admits OD iff $n = p^m - 1$ (resp. $n = 2^m$), where p is a prime and $m \in \mathbb{N}$. □ It is still not proved even for A_5, C_3.

The existence of ODs for Lie algebras of all types, except mentioned above (i.e. $n \neq p^m - 1$, $n \neq 2^m$) is established enough long ago (≈ 1983).

Conjecture 2. Complex simple Lie algebra $\mathcal{L}$ admits an IOD (that is the group $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}) = \{\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{D}) \mid \forall i\ \exists j,\ \varphi(\mathcal{H}_i) = \mathcal{H}_j\}$ acts on $\mathcal{L}$ irreducibly) iff $\mathcal{L}$ is of the fol. types: A_n, $n = p^m - 1$; B_n, $n = [(p^m-1)/2]$; C_2; D_{2^n}, D_6, D_{14}; G_2, F_4, E_6, E_8.

Theorem. Conjecture 2 is true for types A_n, B_n, and exeptional ones.

Now assume that $\mathcal{L}$ admits some orth. dec. $\mathcal{D}$ s.t. a subgroup $G \subset \mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ acts irreducible on $\mathcal{L}$. Consider the set $\mathcal{M}_G$ consisting from all G-invariant $\mathbb{Z}$-modules $\Lambda \subset \mathcal{L}$ with the properties: (1) $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \mathcal{L}$; (2) The restriction $K|_\Lambda$ is an integer positive definite form on Λ.

So we have the set $\mathcal{M}_G$ of Euclidean lattices and many of them have a reach group $G = \mathrm{Aut}(\Lambda)$.

Here are some results:

Type of $\mathcal{L}$	$\dim \Lambda$	Λ	$\widetilde{G} = \mathrm{Aut}(\Lambda)$
G_2	14		$\mathbb{Z}_2 \times G_2(3)$
F_4	52		$\mathbb{Z}_2 \times L_4(3) \leq G \leq \mathbb{Z}_2 \cdot \mathrm{Aut}(L_4(3))$
E_6	78	(it is expected)	$\mathbb{Z}_2 \times Fi_{22} \leq G \leq \mathbb{Z}_2 . \mathrm{Aut}(Fi_{22})$
E_8	248		$\mathbb{Z}_2 \times F_3$
E_8	248	even unimodular	$\mathbb{Z}_2 \circ L_4(5) \leq G \leq \mathbb{Z}_2 \cdot \mathrm{Aut}(L_4(5))$
A_2	8	even unimodular	$\mathbb{Z}_2 \circ O_8^+(2)$
A_4	24	even unimodular	$\mathbb{Z}_2 \circ Co_1$
B_3	21	unimodular	$\mathbb{Z}_2 \times Sp_6(2)$
D_4	28	unimodular	$\mathbb{Z}_2 \times \Omega_8^+(2) \leq G \leq \mathbb{Z}_2 \cdot \mathrm{Aut}(\Omega_8^+(2))$

Reference: A. I. Kostrikin, Pham Huu Tiep „Orthogonal Decompositions and Integral Lattices. Walter de Gruyter, Berlin (to be published).

April 15, 1992

April 24, 1992. Multiplicative subgroups of finite index in a field.

Daniel B. Shapiro, Ohio State University

In 1988 P. Berrizbeitia found a new, elementary proof of an old result about finite fields: Lemma. If K is a finite field then every element of K can be expressed as x^3+y^3 for some $x, y \in K^*$, except when $|K| = 4, 7, 13, 16$. Subsequently Leep-Shapiro (1989) extended this idea to infinite fields K, proving that if $G < K^*$ is a subgroup of index 3 then $G+G=K$.

Berrizbeitia realized that for generalizations one should examine $G-G$. He used Van der Waerden's Theorem on arithmetic progressions to prove

Proposition. If K is a field of characteristic 0 and $G < K^*$ is a subgroup of finite index, then $G-G=K$.

In joint work with V. Bergelson we have generalized this to arbitrary infinite fields. There are two main ingredients to the proof

(1) Abelian groups are amenable.

(2) Ramsey's Theorem.

The argument goes through for a class of rings. If R is an associative ring with 1 define R to be in the class $\mathcal{U}$ if

(i) there is an additively invariant probability measure μ on R such that $\mu(R^*) > 0$, and

(ii) there is an infinite set in R having invertible differences (i.e. there exist $a_1, a_2, \dots \in R$ such that $a_i - a_j \in R^*$ whenever $i \neq j$.)

Theorem. If R is in the class $\mathcal{U}$ and if $G < R^*$ is a subgroup of finite index, then $G - G = R$.

For example any finite dimensional algebra over an infinite field is in the class $\mathcal{U}$. More generally if R is a semilocal ring (in the sense that $R/\mathrm{rad}\,R$ is semisimple artinian) and if R has no finite non-zero homomorphic images then R is in the class $\mathcal{U}$.

On the other hand the ring $R = M_2(\mathbb{Q}[x])$ has the "$(G-G)$-property" but R is not in the class $\mathcal{U}$.

This work will appear in Proc. Amer. Math. Soc.

Daniel B. Shapiro

Den 8 Mai, 1992 "Ein allgemenes Kriterium für die Existenz p-adischer L-Funktionen"

A. A. Panchishkin (Moskauer Staatsuniversität)

Es sei p eine Primzahl. Die berühmte Kummersche Kongruenzen für die speziellen Werte $\zeta(1-k) = -B_k/k$ $(k \geq 1)$ Riemannscher Zeta-Funktion sind zur Existenz p-adischer L-Funktion von Kubota-Leopoldt äquivalent. Diese Funktion ist eine $\mathbb{C}_p$-analytische Funktion auf die Gruppe $X_p = \mathrm{Hom}_{cont}(\mathbb{Z}_p^\times, \mathbb{C}_p^\times)$ aller stetigen p-adischen Charakteren von der Gruppe $\mathbb{Z}_p^\times$ p-adischer Einheiten ($\mathbb{C}_p = \hat{\bar{\mathbb{Q}}}_p$ ist der Tate-Körper). Wir betrachten Euler-Produkte vom Typ $L(M,s) = \prod_p L_p(M, p^{-s}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$, wobei M ein reines Motiv über $\mathbb{Q}$ mit Koeffizienten im Zahlkörper $T = \mathbb{Q}(\langle a_n \rangle)$ ist. Hierbei ist $L_p(M,X)^{-1} = \det(1 - X \cdot r_\lambda(Fr_p^{-1}) | M_\lambda^{I_p}) \in T[X]$ das charakteristische Polynom des Frobenius-Elements Fr_p in die Galois-Darstellung $r_\lambda : Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to GL(M_\lambda)$ auf der λ-adischen Realisierung M_λ von M (λ ein Primideal von T, $(\lambda, p) = 1$). Für ein Dirichlet-Charakter χ und $m \in \mathbb{Z}$ ist die Twistung $N = M(\chi)(m)$ durch $L(N,s) = \sum \chi(n) a_n n^{-s-m}$ definiert. Ist N ein kritisches Motiv, so hat man nach Vermutung von Deligne $L(N,0)/c^+(N) \in T(\chi)$, ($c^+(N)$ das Period von N).

Wir konstruieren p-adische L-Funktionen, die diese algebraische Zahlen p-adisch interpolieren. Ein allgemeines Kriterium für die Existenz entsprechenden p-adischen L-Funktionen durch die Bedingung $P_{Nwt,p}(d^+) = P_{Hdg}(d^+)$ ist gegeben, wobei $P_{Nwt,p}, P_{Hdg} : [0,d] \to \mathbb{R}$ sind die Polygone von Newton und Hodge des Motivs M, und $d^+ = \dim_{\mathbb{C}}(M_{dR}/F^0 M_{dR})$ (F^i ist die absteigende Hodge Filtration).

Wir besprechen Beispiele wann man die Gültigkeit dieses Kriteriums überprüfen kann. Diese Beispiele sind sowie mit Motive $M(f)$ elliptischer und Hilbertscher Modulformen f, als auch mit ihre Tensorprodukte verbunden.
Diese Ergebnisse werden im Artikel "Motives over totally real fields and p-adic L-functions" in Annales de l'Institut Fourier" publiziert (siehe auch Lect. Notes in Math, N 1471).

А. Панчишкин

May 15, 92.

On Hadwiger's Covering Conjecture

An old and unsolved problem of discrete and combinatorial geometry is due to Hadwiger: Prove that any convex body of $\mathbb{E}^d$ can be covered by 2^d smaller homothetic bodies. Besides the obvious relation to Borsuk's conjecture the above problem of Hadwiger is related to several other problems of discrete and combinatorial convexity. In the talk we will survey most of the known results as well as the recent new ones. Many of the new results were obtained by the following observation of the speaker: Let $\mathbb{K} \subset \mathbb{E}^d$ be a convex body with $O \in \operatorname{int} \mathbb{K}$ furthermore, let $h(\mathbb{K})$ be the smallest number of smaller homothetic bodies of $\mathbb{K}$ with which it is possible to cover $\mathbb{K}$. Then $h(\mathbb{K})$ is the smallest number of hyperplanes of $\mathbb{E}^d$ that strictly separate the faces of the polar body $\mathbb{K}^* = \{ X \in \mathbb{E}^d \mid \langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY} \rangle \leq 1 \text{, for all } Y \in \mathbb{K} \}$ from O.

Károly Bezdek

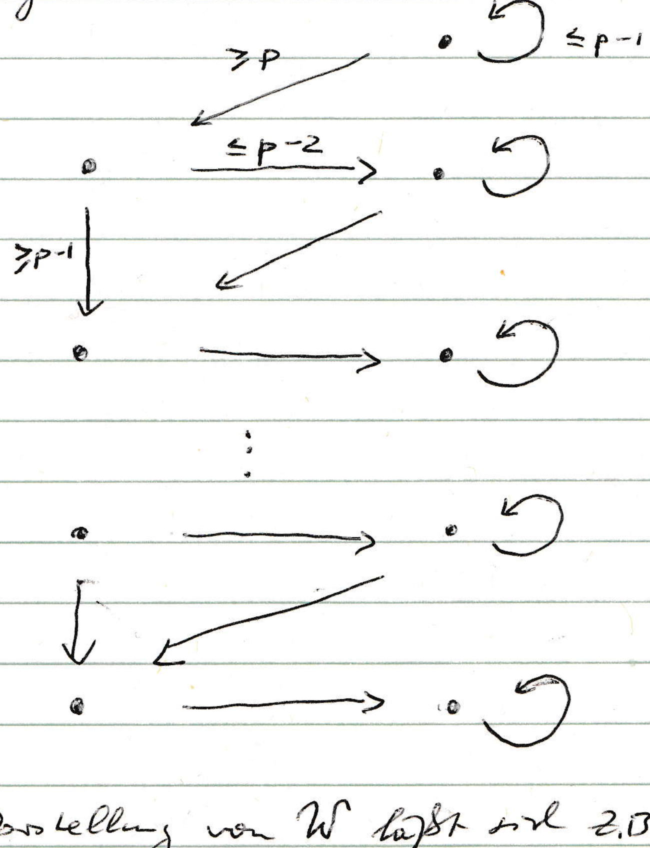
(Károly Bezdek)
Eötvös University,
Budapest, Hungary.

22. Mai 1992

ÜBER DIE GLOBALE STRUKTUR ZELLULÄRER AUTOMATEN

HEINZ-OTTO PEITGEN (BREMEN)

Sei $P_{p^\tau} = \{(n,k) : p^\tau \nmid \binom{n+k}{k}\}$ für p prim und $\tau \in \mathbb{N}$. Wir beschreiben ein dynamisches System $W : \mathbb{R}^{4\tau-2} \to \mathbb{R}^{4\tau-2}$, dessen Attraktor die fraktalen Strukturen von P_{p^τ} dekodiert. Das (diskrete) dynamische System W wird durch ein hierarchisches iteriertes Funktionensystem realisiert, dessen Elemente p-adische Kontraktionen sind. Die Diskussion von P_{p^τ} dient als Beispiel für die p-Stark'en Fermat Automaten, deren globale Evolution sich durch assoziierte hierarchische iterierte Funktionensysteme beschreiben läßt. Die hierarchische Selbstähnlichkeit von P_{p^τ} spiegelt sich in dem folgenden Graphen wieder, der W zu Grunde liegt.



Aus dieser Darstellung von W läßt sich z.B. die Hausdorff-Dimension von P_{p^τ} bestimmen.

Heinz-Otto ◎.

27 - May '92.

Unramified Witt groups and rationality Questions.

Let k be a field of char $\neq 2$. We denote by $W(k)$ the Witt group of quadratic forms over k. If K/k is ~~the~~ a finitely generated field extension (most often, what we have in mind are transcendental field extensions of k), then we denote by $W_{nr}(K)$ the "unramified Witt group of K". This group $W_{nr}(K)$ is a subgroup of $W(K)$ and is defined as

$$W_{nr}(K) = \bigcap_{v} W(\mathcal{O}_v)$$

where v is a rank one discrete valuation ring on K that is trivial on k, and $\mathcal{O}_v$ is the discrete valuation ring of v and $W(\mathcal{O}_v)$ is the Witt group of the ring $\mathcal{O}_v$ (cf. W. Scharlau: Quadratic & Hermitian forms). In particular, if X is a smooth projective variety over k, then one can consider $W_{nr}(k(X))$, where $k(X)$ is the function field of k. For $\dim X \leq 2$, $W_{nr}(k(X)) = W(X)$, the Witt group of symmetric bilinear bundles on X.

Using the Unramified Witt group and its relation to unramified cohomology groups, one gets interesting results on the geometry of X, particularly when $k = \mathbb{R}$. For instance, it can be proved (cf. R. Sujatha, Math. Ann, 288 (1990)) that when X is a smooth projective real rational surface (i.e. such that $X \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{R}} \operatorname{Spec} \mathbb{C}$ is birational to $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$), $W_{nr}(\mathbb{R}(X)) \simeq \mathbb{Z}^s \oplus (\mathbb{Z}/2)^{s-1}$, where $s = \#$ of connected components of the set of $\mathbb{R}$-rational points of X in the Euclidean topology. In particular such an X is $\mathbb{R}$-birational to $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ if and only if $W_{nr}(\mathbb{R}(X)) \simeq \mathbb{Z}$.

Colliot-Thélène and Ojanguren (Inv. Math. 97 (1989)) uses the Unramified Witt group to construct examples of algebraic 3-folds over $\mathbb{C}$ which are unirational but non-rational. Their example is much more simpler than all earlier known examples due to Iskovskih-Manin, Clemens-Griffiths, Artin-Mumford, etc.

R. SUJATHA

29. Mai 92

Das Einbettungsproblem $SL(2,\ell) \to PSL(2,\ell)$ über $\mathbb{Q}$.

Für $\ell \equiv \pm 3 \bmod 8$ funktioniert die Methode von Serre und Fröhlich: $\tilde{G} = SL(2,\ell)$ ist Spinüberlagerung von $G = PSL(2,\ell)$ sogar für die reguläre Darstellung. Man berechnet die lokalen Witt-Invarianten der Spurform (für eine beliebige Galoiserweiterung von $\mathbb{Q}$ ergibt sich für alle ungeraden Primzahlen $h_p = (p,d)^{r-1}(p,e_0)^r \cdot (p,-1)^{\frac{r(r-1)}{2} + r\left[\frac{p^f-1}{2} + \frac{e}{2} - 1\right]}$ wenn $2 \nmid f$, $2 \mid e$ und $h_p = (-1)^r \left(p, (-1)^{\frac{rf}{2}} d\right)$ wenn $2 \mid f$, $2 \mid e$ und $h_p = 1$ wenn $2 \nmid e$). Man findet das Einbettungskriterium:

1. L total reell
2. Für $p \neq 2$, $2 \mid e$ gilt
   p hat ungeraden Restklassengrad $\Longleftrightarrow$ $p \equiv 1 \bmod 4$.

Für $\ell \equiv \pm 1 \bmod 8$ funktioniert sicher die reguläre Darstellung nicht mehr: $\tilde{G}$ wird $G \times Z_2$ und dementsprechend verschwinden alle h_p. Nach Kemper liegt bei $\ell \equiv \pm 1 \bmod 16$ die prinzipielle Grenze der Methode: Wenn ein Element aus G mit Ordnung 2^f in $\tilde{G}$ die Ordnung 2^{f+1} bekommen soll, dann muß (über $\mathbb{Q}$) $f \leq 2$ sein.

Es gelingt aber, durch Betrachtung der 2-Sylowgruppen das Problem direkt zu lösen. Man erhält dabei eine Verallgemeinerung der Witt'schen Konstruktion von Quaternionenkörpern auf verallgemeinerte Quaternionenkörper, die einen gegebenen Diederkörper enthalten. Man kann solche Körper „explizit" angeben; und das Problem im Titel ist genau dann lösbar, wenn 1. L total reell und 2. Wenn $p \neq 2$, $2 \mid e$, dann muß gelten:

$$\mathrm{Syl}_2 \subset G_z \text{ zyklisch} \Rightarrow \mathrm{ord}_2\left(\tfrac{p-1}{2}\right) \geq \mathrm{ord}_2\, e$$
$$\text{„} \quad \text{nicht} \quad \text{“} \Rightarrow \mathrm{ord}_2\left(\tfrac{p+1}{2}\right) \geq \text{“}$$

Sigrid Böge

~~24 May 19~~ 1 June 1992

Canonical bases in tensor products.

Let $\mathfrak{g}$ be a finite dimensional simple Lie algebra over $\mathbb{C}$ and let U be the corresponding Drinfeld-Jimbo quantized enveloping algebra over $\mathbb{Q}(v)$ (v an indeterminate). The simple integrable (hence finite dimensional) U-modules are naturally parametrized by ~~[illegible]~~ n-tuples $a=(a_1, \dots a_n)$ of natural numbers. Let V_a be the U-module corresponding to a. The author has proved (Jour. of A.M.S. 1990) that V_a has a canonical basis B_a (as soon a highest weight vector has been fixed). We now consider a tensor product $V_a \otimes V_b$ as a U-module using the Hopf algebra structure on U.
It turns out that $V_a \otimes V_b$ has again a canonical basis $B_{a,b}$. It is compatible with many U-submodules of $V_a \otimes V_b$ (in particular it is not $B_a \otimes B_b$ in general). $B_{a,b}$ is obtained from $B_a \otimes B_b$ by a procedure which involves a variant of Drinfeld's R-matrix.
$B_{a,b}$ has the following stability property. Consider the unique U-module homomorphism $\varphi: V_{a+c} \otimes V_{\bar{c}+b} \to V_a \otimes V_b$ (a, b, c dominant weights, $\bar{c}$ obtained from c by the opposition automorphism) which takes the (lowest weight vector in V_{a+c}) $\otimes$ (highest weight vector of $V_{\bar{c}+b}$) to the analogous vector of $V_a \otimes V_b$. ~~Then~~ Let I_φ be the kernel of φ. Then $B_{a+c, \bar{c}+b} \cap I_\varphi$ is a basis of I_φ hence φ defines a bijection $B_{a+c, \bar{c}+b} - (B_{a+c, \bar{c}+b} \cap I_\varphi) \xrightarrow{\sim} B_{a,b}$.

Let $\dot{U}$ be the following modification of U: we denote by $K_1, \dots, K_n$ the standard generators of the Cartan part of U and for any $x=(x_1, \dots x_n)$, $x'=(x'_1, \dots x'_n)$ in $\mathbb{Z}^n$ we set ${}_xU_{x'} = U / \sum (K_i - v^{x_i}) U + \sum U (K_i - v^{x'_i})$. Let $\dot{U} = \bigoplus_{x,x'} ({}_xU_{x'})$. Then $\dot{U}$ is naturally an algebra without 1. It has a family of orthogonal idempotents $1_x \in {}_xU_x$ (the image of 1 under $U \to {}_xU_x$). The stability property of $B_{a,b}$ implies that $\dot{U}$ has a canonical basis which maps to $0 \cup B_{a,b}$ under the natural [redacted] homomorphism $\dot{U} \to V_a \otimes V_b$ for any a, b. We conjecture that the multiplication and comultiplication of $\dot{U}$ have structure constants in $\mathbb{N}[v, v^{-1}]$.

G. Lusztig

5. Juni 1992

Altes und Neues zur Planetenbewegung und zur Dynamik starrer Körper in Räumen konstanter Krümmung.

Es wurde zur Historie der Punktmechanik und der Dynamik starrer Körper in Räumen konstanter Krümmung berichtet: Diese Historie beginnt (1848–1851) mit Janos Bolyai, Peter Gustav Dirichlet (1851/52), Eugenio Beltrami (1869), Ernst Schering (1870) und Rudolf Lipschitz (1870).

Wilhelm Killings Arbeit von 1885 (J. reine angew. Math. 98, 1–48) bringt fundamentale Arbeiten zur Planetenbewegung in Räumen konstanter Krümmung: Er entdeckt die dort zutreffende Form der drei Keplerschen Gesetze. Liebmann deutet 1905 die beschränkten und unbeschränkten Bahnen der Planeten als „Kegelschnitte" in einer metrischen Beschreibung, d.h. als „geometrische Orte" aller Punkte, die von einem Punkte und einem „Zykel" (in seiner Terminologie) gleichen Abstand haben. In seiner Kölner Dissertation (1990) hat Jürgen Zitterbarth diese klassischen Resultate vervollständigt. [Die „Zykeln" von Liebmann sind genau Kurven konstanter geodätischer Krümmung (in diesen einf. zushgden vollst. Räumen konstanter Krümmung).]

Die Behandlung der Dynamik starrer Körper gelang in der Dissertation uniform für die verschiedenen Werte der Krümmungskonstanten $\varkappa \in \mathbb{R}$ durch Benutzung der (nach W. Killing) auf Weierstraß zurückgehenden Modelle dieser Räume konstanter Krümmung.

In der Dynamik starrer Körper für Krümmungswerte $\varkappa \neq 0$ gibt es Abweichungen zur euklidischen Newtonschen Mechanik, die aber für $\varkappa \to 0$ stetig in die Gesetze der Newtonschen Mechanik übergehen. Ein Hauptresultat der Dissertation: Die Levi-Civita-Parallelverschiebung kann auch für $\varkappa \neq 0$ durch die Richtung der Drehachse eines kugelsymmetrischen, kräftefrei bewegten Kreisels „realisiert" werden.

Peter Dombrowski (Köln)

12. Juni 92

STANDARDBASEN IN POTENZREIHENRINGEN

Es gehört zu den klassischen Resultaten der kommutativen Algebra, daß sowohl der Polynomring als auch der Ring der formalen Potenzreihen über einem Körper noethersch sind. Etwa gleichzeitig und unabhängig voneinander bewiesen Buchberger (Polynomringe, 1965) und Hironaka (Potenzreihenringe, 196[illegible]) die Existenz gewisser kanonischer Idealbasen in diesen Ringen. Im Polynomring heißen diese Basen Gröbnerbasen; sie stellen den bestmöglichen Ersatz dar für das erzeugende Element im Hauptidealring der univariaten Polynome. Insbesondere lassen sich Gröbnerbasen immer aus beliebigen vorgelegten Idealbasen berechnen, und diese Berechnung liefert dann Lösungen einer Vielzahl von algorithmischen Problemen im Zusammenhang mit Idealen. Die von Hironaka eingeführten kanonischen Idealbasen in Potenzreihenringen heißen Standardbasen; wie sich im nachhinein herausstellt, sind sie das natürliche Analogon zu Gröbnerbasen. In der weiteren Entwicklung nach 1965 haben sie im Vergleich zur Gröbnerbasentheorie eher ein Schattendasein geführt, vermutlich wegen des natürlicherweise geringeren Interesses an Potenzreihen. Ein solches Interesse ist erst in letzter Zeit im Zusammenhang mit gewissen Problemen der theoretischen Informatik erwacht. Hironaka selbst hat seine Standardbasen ad hoc für einen ganz bestimmten, außerhalb der Algebra liegenden Zweck eingeführt. Vom Standpunkt der Algebra gesehen sind seine Ergebnisse fragmentarisch. Erst in den letzten zwei Jahren entstand eine Theorie der Standardbasen, die die Analogie zu den Gröbnerbasen völlig enthüllt und damit für einen Algebraiker befriedigend ist. Weitere Einzelheiten und Literaturhinweise finden sich in J. of Pure and Applied Algebra 66 (1990), 219-227.

Thomas Becker
Universität Passau

19. Juni 1992

Azyklische affine Varietäten

Für eine affine Varietät V werden drei Eigenschaften betrachtet:
(a) V ist diffeomorph (homöomorph) zu $\mathbb{C}^n$.
(b) V ist kontrahierbar.
(c) $H_*(V;R) \cong H_*(\mathbb{C}^n;R)$ für einen Unterring $R \subset \mathbb{Q}$.
Im Fall (a) heißt V eine affine Raumform. Im Fall (c), $R=\mathbb{Z}$, $\dim V=2$ eine Homologie-Ebene. Man studiert derartige Varietäten mittels Kompaktifizierungen:
(1) Algebraisch: $V \cong X \setminus D$, X projektive Varietät, $D \subset X$ Divisor.
(2) Topologisch: $V \cong B \setminus \partial B$, B kompakte glatte Mannigfaltigkeit mit Rand ∂B.

Eine Homologie-Ebene entsteht nach einem Satz von Gurjar und Shastri immer in der Form $X \setminus D$, X rationale projektive Fläche, D Divisor mit normalen Kreuzungen aus rationalen Kurven, der duale Schnittgraph $\Gamma(D)$ von D ist ein Baum mit Rang $H_2(X)$ Ecken und unimodularer Schnittform. Durch eine Kontraktion $\pi: X \to \mathbb{P}^2$ wird aus D eine ebene algebraische Kurve $C=\pi(D)$. Es entsteht das Problem, ebene algebraische Kurven zu klassifizieren, die zur Konstruktion von Homologie-Ebenen dienen können.
Vermutung: Homologie-Ebenen lassen sich immer aus einer Konfiguration von Geraden und Quadriken erhalten.
Die geeigneten Geradenkonfigurationen wurden von mir klassifiziert; höchstens 10 Geraden sind nötig (für Flächen vom allgemeinen Typ).
Höherdimensionale affine Raumformen sind nur beispielsweise bekannt. Mit Hilfe von Brieskorn-Polynomen lassen sich für jedes $n \geq 4$ Polynome $q: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften konstruieren: (1) q ist regulär (=keine Singularitäten). (2) Jede Faser $q^{-1}(c)$ ist diffeomorph zu $\mathbb{C}^{n-1}$. (3) q ist keine Projektion eines Produktes. (4) Die Fasern tragen eine exotische algebraische Struktur.

Tammo tom Dieck (Göttingen)

June 19, 1992

Groups with bounded generation, their generalizations and applications

An abstract group Γ is said to have bounded generation (BG) if there are such elements $\gamma_1, \ldots, \gamma_t \in \Gamma$ that $\Gamma = \langle\gamma_1\rangle \ldots \langle\gamma_t\rangle$ where $\langle\gamma_i\rangle$ denotes the cyclic subgroup generated by $\langle\gamma_i\rangle$. The first nontrivial examples of such groups have been found by Carter and Keller who showed that the group $SL_n(\mathcal{O})$ where $n \geq 3$, $\mathcal{O}$ is the ring of integers in some algebraic number field, does have (BG). Their methods were generalized by O. Ta to get the following result.

__Theorem 1.__ (Tavgen). Let G be a Chevalley group of normal or twisted type of rank ≥ 2, K be an algebraic number field, S be a finite subset in V^K containing V^K_∞. Then $G_{\mathcal{O}(S)}$ has (BG).

One can also consider the evident analog of (BG) in the class of profinite groups. A large series of examples of such groups is provided by

__Theorem 2.__ (Platonov, Rapinchuk). Let G be a simple simply connected group over an algebraic number field K, $S \subset V^K$ be any subset containing V^K_∞. Then the group $G_{A_S(S)}$ of S-integral S-adèles is a profinite group with bounded generation.

The complete description of profinite groups with (BG) is possible only in the class of pro-p-groups: these coincide with analytic pro-p-groups. Some applications of this fact to the repr. th

__Proposition 1.__ If Γ has (BG), then it is linear iff it is almost p-residually finite for some p

__Theorem 3__ (Rapinchuk). Let Γ have (BG). Assume that Γ satisfies the following condition: for any subgroup $\Gamma_1 \subset \Gamma$ of finite index the group $\Gamma_1/[\Gamma_1, \Gamma_1]$ is finite. Then Γ has finite representation type, i.e. it has only finitely many inequivalent irreducible representations in each dimen

However the most interesting applications of (BG) pertain to the congruence subgroup proble. Let G be a simple simply connected group over the field K of algebraic numbers, $S \subset V^K$ be a finite subset containing V^K_∞. Analysing the paper of Carter and Keller I conjectured (1989) that for $\Gamma = G_{\mathcal{O}(S)}$ the congruence subgroup property (CSP) (i.e. finiteness of the congruence kernel $C = C^S(G)$) is equivalent to (BG). First I proved that if Γ has (BG) then $C/[C,C]$ is finite. A year later it was proven by Platonov, Rapinchuk and A. Lubotzky that (BG) implies finiteness of the whole C. However as (BG) is not so easy to check we undertook a search of other properties which would also imply (CSP) but be easier to check. Specify the following condition on a profinite group Δ:

(PG)' for any integer $n > 0$ and any prime p there are such constants c and k that $|\Delta/\Delta^{np^\alpha}| \leq c p^{\alpha k}$ for all $\alpha > 0$. (It is easy to see that (BG) $\Rightarrow$ (PG)').

__Theorem 4__ (Platonov-Rapinchuk). Assume that G_K has standard description of normal subgroups and G is K_v-isotropic for all $v \in S \setminus V^K_\infty$. Then if the profinite completion $\hat{\Gamma}$ of $\Gamma = G_{\mathcal{O}(S)}$ satisfies (PG)' then Γ has (CSP).

It was shown that (PG)' for $\hat{\Gamma}$ where $\Gamma = SL_n(\mathbb{Z})$ $(n \geq 3)$ or $SL_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$ can be checked by a straightforward computation.

A. Rapinchuk

June 26, 1992

Let X = real algebraic variety in $\mathbb{R}^n$ (ie real zeros of finite number of polynomials with real coefficients). If X is nonsingular it has the structure of a differentiable manifold. We may ask about the converse: Given a differentiable manifold M (compact, connected) is it diffeomorphic to a nonsingular real algebraic variety and if so, in how many different ways. Historically the theorems related to this question are as follows:

(1935) Seifert: If $M \subset \mathbb{R}^n$ has trivial normal bundle then $\exists$ diffeotopy $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\sigma_t} \mathbb{R}^n$ such that σ_0 = identity $\sigma_1(M)$ = nonsingular connected component of real algebraic set.

(1952) Nash: If $M \subset \mathbb{R}^n$ then $\exists$ k and diffeotopy $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \xrightarrow{\sigma_t} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, $\sigma_0 = id$, $\sigma_1(M \times (0))$ = nonsingular connected component of real algebraic set

(1970) Tognoli: Same as Nash except he could drop "connected component of". This result needs bordism theory

(1982) Akbulut, King: $M \subset V \subset \mathbb{R}^n$ where V = nonsingular real algebraic set. $\exists$ k and diffeotopy $V \times \mathbb{R}^k \xrightarrow{\sigma_t} V \times \mathbb{R}^k$ such that σ_0 = identity and $\sigma_1(M \times (0))$ = algebraic (nonsingular) subset of $V \times \mathbb{R}^k$ provided one assumes that all elements of homology $H_*(V, \mathbb{Z}/2)$ are given by algebraic subvarieties

(1990) Bochnak, Kucharz: Given $M \subset \mathbb{R}^n$ where $n \geq 2 \dim M + 1$ and given open neighborhood $\mathcal{O}$ of i (= inclusion of M in $\mathbb{R}^n$) in $C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ then $\exists$ uncountable family of embeddings $e_\alpha \in \mathcal{O}$ such that $e_\alpha(M)$ = nonsingular real algebraic subset of $\mathbb{R}^n$ and the $e_\alpha(M)$ are all birationally distinct

Michael A Brubner

(New Mexico)

June 26, 1992. Dinakar Ramakrishnan (Pasadena)

Tate conjecture for Shimura surfaces.

Let X be a smooth, projective algebraic surface over $\mathbb{C}$. Denote by $\mathrm{Div}(X)$ the group of divisors (on X), i.e., finite, formal $\mathbb{Z}$-linear combinations of (algebraic) curves on X, and by $\mathrm{Pic}(X)$ the group of divisor classes, i.e., $\mathrm{Div}(X)$ modulo the divisors of meromorphic functions on X. Then there is a canonical divisor class map $cl: \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow H^2_{top}(X, \mathbb{Q})$, which associates to each curve C the Poincaré dual of its homology class. Moreover, the image of cl lands in $Hg(X) := H^2_{top}(X,\mathbb{Q}) \cap H^{1,1}$. A well known theorem of Lefschetz asserts that $cl(\mathrm{Pic}(X)) \otimes \mathbb{Q} = Hg(X)$ (= the group of Hodge cycles). Now, X being algebraic, it can be defined over a field k which is finitely generated over the prime field $\mathbb{Q}$. Denote by $\bar{k}$ an algebraic closure of k in $\mathbb{C}$, and by $\mathrm{Pic}(X/k)$ the group of divisor classes which are rational over k. Then there is, for every prime ℓ, an ℓ-adic divisor class map

$$cl_\ell : \mathrm{Pic}(X/k) \longrightarrow H^2_{et}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1))^{Gal(\bar{k}/k)} =: \mathcal{J}_\ell(X/k)$$

which is compatible with cl via the comparison ~~map~~ isom.: $H^2_{top}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes 2\pi i \xrightarrow{\sim} H^2_{et}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1))$. ($H^*_{et}$ is the étale cohomology.) A very important conjecture of Tate asserts that $cl_\ell(\mathrm{Pic}(X/k)) \otimes \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} \mathcal{J}_\ell(X/k)$ (= the group of Tate cycles rational over k).

Let B be a quaternion algebra over a totally real number field F with ring of adeles $\mathbb{A}_F$ such that B is split at exactly two infinite places, say τ_1 and τ_2. For any (neat) compact open subgroup K of $B^*(\mathbb{A}^f_F)$, we consider the Shimura surface S_K, defined over the number field E corresponding to the stabilizer in $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ of the subset $\{\tau_1, \tau_2\}$ of $\mathrm{Hom}(F, \mathbb{R})$. Its complex points are given by the double coset space: $B^*(F) \backslash B^*(\mathbb{A}_F)/K^h K$, where K^h is the centralizer in $B^*(F \otimes \mathbb{R})$ of the map $h: \mathbb{C}^* \longrightarrow B^*(F \otimes \mathbb{R})$, $a+ib \longmapsto \left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, 1, \ldots, 1 \right)$. The following generalizes a thm of Harder, Langlands, Rapoport for $B = M_2(F)$, $[F:\mathbb{Q}] = 2$.

$\boxed{\text{Theorem: (joint with V. K. Murty) The Tate conj. holds for } S_K \otimes_E k, \text{ for any } k \supseteq E.}$

The proof constructs period relations to reduce to Lefschetz's theorem.

3. Juli 1992

Binomialidentitäten – kombinatorische und algorithmische Aspekte

Ausgangspunkt für den Vortrag ist ein Problem, das mir im Februar 1992 von Bielefelder Mathematikern zugetragen wurde: man soll

$$(*) \qquad \sum_k \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 = \sum_k \binom{n}{k}\binom{n+k}{k} \sum_j \binom{k}{j}^3$$

beweisen. Diese Identität ist leicht für viele Werte von n per Computer zu verifizieren – ein Beweis liegt aber nicht auf der Hand, jedenfalls scheinen einfache Manipulationen nicht auszureichen.
Ich gebe mehrere Beweise für (*), worauf es mir aber über das spezielle Problem hinaus ankommt, ist der systematische Aspekt: es handelt sich um eine Aussage über hypergeometrische Reihen. Man kann also die klassische hypergeometrische Maschinerie verwenden: in der Tat erweist sich (*) als Spezialfall bzw. Konsequenz einer Spezialisierung von Baileys bilinearer erzeugender Funktion für die Jacobi-Polynome.
Einen ganz anderen Zugang bietet die Methode von D. Zeilberger zur "automatischen" Verifikation hypergeometrischer Identitäten, die man auch in diesem Fall erfolgreich einsetzen kann.

Volker Strehl, Erlangen

10. Juli 1992

Es gibt nicht-schälbare Triangulierungen der 3-Sphäre

Nicht-schälbare Zellenzerlegungen der 3-Sphäre sind mindestens seit den 1930er Jahren bekannt. Die Frage nach nicht-schälbaren Triangulierungen wurde 1987 von Victor Klee gestellt, mit dem Hinweis, daß man zwar nicht-schälbare Triangulierungen der 3-Zelle kenne, daß aber die Übertragbarkeit dieses Ergebnisses auf die 3-Sphäre nicht klar sei.

Wir beweisen nun ein Lemma: Ist $\mathbb{C}$ eine schälbare Triangulierung von S^3 und ist Z ein q-Circuit im 1-Skelett von $\mathbb{C}$, dann ist die Brückenzahl des Knoten-Typs von Z höchstens $2q$.

Der Beweis ist sehr einfach: Man zeigt, daß (S^3 minus ein Interval) so auf E^3 abgebildet werden kann, daß jede Kante von $\mathbb{C}$ auf einen Bogen abgebildet wird, der höchstens ein (relatives) Maximum der Koordinate z von E^3 hat.

Nun benötigen wir nur noch eine Zellenzerlegung von S^3 in eine Kugel P mit Henkeln K_i und verdichten Scheiben F_i (deren Ränder Heegaard Kurven auf $P \cup K_i$ folgen) und einem restlichen Raumstück R, so daß einer der Henkel K_i, z.B. K_1, zusammen mit P, einen verknoteten Vollring mit beliebig groß vorgeschriebener Brückenzahl, b, bildet. Das ist auf Grund der grundlegenden Ergebnisse von Horst Schubert (aus den 1950er Jahren) über Brücken-Zahlen aber ohne Schwierigkeiten möglich.

Das Ergebnis ist: Zu jeder positiven ganzen Zahl m gibt es eine Triangulierung $\mathbb{C}_m$ von S^3, so daß $\mathbb{C}_m$ und die ersten m successiven baryzentrischen Unterteilungen von $\mathbb{C}_m$ nicht schälbar sind.

Wolfgang Haken
University of Illinois
Urbana, IL 61801 U.S.A.

17. Juli 1992

Der J-Homomorphismus und was daraus geworden ist

Der J-Homomorphismus $J: \pi_n(O(k)) \to \pi_{n+k}(S^k)$ wurde 1942 von G. Whitehead definiert. Hierbei ist $\pi_n(O(k))$ die n^{te} Homotopiegruppe der orthogonalen Gruppe und $\pi_{n+k}(S^k)$ die n+k-te Homotopiegruppe der k-Sphäre. Läßt man k wachsen, erhält man den stabilen J-Homomorphismus, $J: \pi_n(O) \to \pi_n^S(S^0)$ oder allgemeiner $J: [X, O] \to \{X_+, S^0\} = \pi_S^0(X)$. Die ~~Grup~~ linke Seite $[X,O]$ ist nichts anderes als die KO-Gruppe $KO^{-1}(X)$ die rel. gut zu berechnen ist, die rechte Seite $\pi_S^0(X)$ ist die stabile Kohomotopie von X und weitgehend unbekannt. Gründe für die Wichtigkeit von J sind z.B. 1) daß Bild J kommt vor bei der Berechnung von Θ_n, der Gruppe der differenzierbaren Sphärenstrukturen auf S^n oder 2) Bild J ist die einfachste Schicht – nach rationaler Information – der stabilen Homotopietheorie.

Zu einer konzeptuellen Behandlung des J-Homomorphismus dient die sog. Bild J-Theorie Ad^*, die man als Fasertheorie von $\psi^k - 1$ auf der p-lokalen K-Theorie konstruieren kann. Der klassische J-Homomorphismus hat eine Erweiterung zu $j_A: Ad^0(X) \to \pi_S^0(X)$ (als Anwendung einer Lösung der Adams Vermutung.). Mit der kan. Abbildung $\Delta: KO^{-1}(X) \to Ad^0(X)$ hat man $j_A \circ \Delta = J$. Komponiert man j_A mit dem Hurewicz Homomorphismus h_A: $\pi_S^*(X) \to Ad^*(X)$ der Bild J-Theorie Ad^* so erhält man eine Bijektion ($p \neq 2$ Tornehave, $p = 2$ May). Dies ergibt eine leichte Bestimmung von Bild J für Räume wie $X = S^n$. Dies läßt sich verallgemeinern zu: Satz: G endl. Gruppe. Dann gibt es ein $n_0(G)$ so daß für alle $n > n_0(G)$ $h_A: \pi_n^S(BG) \to Ad_n(BG)$ eine spaltende Surjektion ist.

Die Beziehung zwischen Bild J-Theorie und stabiler Homotopietheorie wird weiter geklärt durch den Lokalisierungssatz $v_1^{-1}\pi_*^S(X, \mathbb{Z}/p^n) \cong Ad_*(X, \mathbb{Z}/p^n)$ der für $p=2$ von Mahowald und $p \neq 2$ von Miller stammt. Als Anwendung einer qualitativen Version dieses Satzes erhält man eine Bestimmung von $\pi_{2n}^S(P_\infty\mathbb{C}/P_m\mathbb{C}) \to H_{2n}(P_\infty\mathbb{C}/P_m\mathbb{C})$ für m fest, $n \geq n_0(m)$. Die Kohomologieoperationen der zusammenhängenden Bild J-Theorie lassen sich ebenfalls berechnen.

K. Knapp (Wuppertal)

16 October 1992

Gelfand - Graev Representations of Reductive groups over Finite Fields and Exponential Sums. C. W. Curtis

Let G be a reductive group defined over a finite field with Frobenius endomorphism $F: G \to G$. A Gelfand - Graev representation of the finite group $G^F = \{g \in G : F(g) = g\}$ is an induced representation $\gamma = \mathrm{ind}_{U_0^F}^{G^F} \psi$, where ψ is a one-dimensional representation of the group of rational points U_0^F on the unipotent radical U_0 of an F-stable Borel subgroup, such that ψ is in general position. The Hecke algebra of γ is the subalgebra $\mathcal{H}$ of the group algebra KG^F (where K is an algebraically closed field of characteristic zero in which the representations are taken) defined by $\mathcal{H} = e_\psi KG^F e_\psi$, where $e_\psi \in KU_0^F$ is the idempotent corresponding to ψ. It is known that $\mathcal{H}$ is a commutative algebra, and that its irreducible representations correspond bijectively to the irreducible components of γ. The problem is to determine the irreducible representations of $\mathcal{H}$, using the virtual characters $\{R_{T,\theta}\}$ of G^F defined by Deligne and Lusztig.

Theorem 1. For each pair (T, θ) (with T a maximal F-stable torus and $\theta \in \mathrm{Irr}\, T^F$), and each Gelfand Graev character Γ, there exists a unique irreducible character $\chi_{T,\theta}$ of G^F such that $(\chi_{T,\theta}, \Gamma) \neq 0$ and $(\chi_{T,\theta}, R_{T,\theta}) \neq 0$.

Let $f_{T,\theta} : \mathcal{H} \to K$ be the representation of the Hecke algebra of Γ determined by $\chi_{T,\theta}$.

Theorem 2. Let T be an F-stable maximal torus. There exists a unique homomorphism of algebras $f_T : \mathcal{H} \to KT^F$ with the property that each representation $f_{T,\theta}$ can be factored

$$f_{T,\theta} = \hat{\theta} \circ f_T$$

where $\hat{\theta}$ is the extension of θ to a representation of the group algebra.

It is shown (through an example) that each homomorphism f_T implies an identity for exponential sums over finite fields.

Charles W. Curtis Eugene Oregon USA

23 Oktober 1992

Fourierkoeffizienten von Modulformen und Jacobiformen

Das "erweiterte" Basisproblem besteht darin, zu vorgegebener Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq SL(2,\mathbb{Z})$ und vorgegebenem Gewicht k die Fourierkoeffizienten einer Basis für $M_k(\Gamma)$ und $J_{k,m}(\Gamma)$ in geschlossener Form aufzustellen. Hierbei bezeichnet $M_k(\Gamma)$ den Raum der Modulformen auf Γ vom (ganzzahligen) Gewicht k und $J_{k,m}(\Gamma)$ den Raum der Jacobiformen auf Γ vom Gewicht k und Index m.
Die Ideallösung hierfür wäre die Angabe von expliziten, geschlossenen, finiten Formeln $\alpha(n,k,\Gamma,Z)$ (Z ein "Parameter"), sodaß $M_k(\Gamma) = \mathrm{Spann}_{\mathbb{C}} \langle \sum_{n\geq 0}^{\infty} \alpha(n,k,\Gamma,Z)\, e^{2\pi i \tau n/t} \mid Z \in \text{"Parameter-Raum"} \rangle$ (t = Spitzenbreite von Γ bei ∞, $\tau \in \mathfrak{H}$ = obere Halbebene), und eine analoge Beschreibung für Räume von Jacobiformen.
Unmittelbare Anwendungen solcher Formeln sind: Aufstellung expliziter Formeln für die Darstellungsanzahlen von quadratischen Formen, Tabellierung von Fourierkoeffizienten von Modul- und Jacobiformen, Algorithmus zur Aufstellung "Tunnell-artiger" Sätze.
Im Vortrag wurden die bekannten Lösung(sansätze) diskutiert: Darstellung von Modulformen durch Thetareihen, Berechnung von Modulformen mittels der Spurformel für Hecke-Operatoren, die Manin'schen Formeln für die Eigenwerte von Hecke-Operatoren ("Manin-Reziprozität"), eine Lösung des Basisproblems für Jacobiformen auf $SL(2,\mathbb{Z})$ durch den Vortragenden (vgl. Invent. Math. 1990: Explicit formulas ....). Anschließend wurde eine Theorie skizziert, die das erweiterte Basisproblem vollständig für solche Kongruenzuntergruppen Γ löst, die eine "vernünftige" Hecke-Theorie gestatten (z.B. $\Gamma = \Gamma_0(m), \Gamma_1(m), \Gamma(m), \ldots$).
Als Illustration ~~der~~ ~~dabei~~ auftretenden Formeln wurde der folgende "Tunnell-artige" Satz formuliert: <u>Satz</u>: Ist eine positive Fundamentaldiskr. $D \equiv 1 \bmod 8$ eine Kongruenzzahl, d.h. Flächeninhalt eines Dreiecks mit rationalen Seiten, so gilt $v_+(D,r) = v_-(D,r)$, wo r irgendeine Lösung von $r^2 \equiv D\ (128)$ ist und
$$v_\pm(D,r) = \#\left\{(a,b,c)\in\mathbb{Z}^3 \,\middle|\, \begin{array}{l} b^2-4ac = D,\ b^2<D,\ \pm a>0 \\ a \equiv 3\frac{b+r}{2}\ (32),\ 3c \equiv \frac{b-r}{2}\ (32) \end{array}\right\}.$$

Nils-Peter Skoruppa (MPIM Bonn)

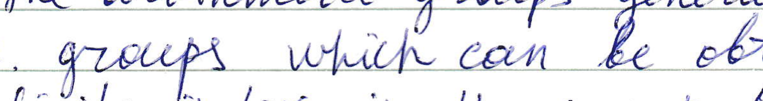
30 October, 1992

Discrete groups generated by reflections and reflective lattices.

Discrete groups generated by reflections in Lobachevsky n-space are described by hyperbolic Coxeter schemes. The problem of classification of such groups having the fundamental domain of finite volume is of interest. There exist comlete descriptions of such groups in small dimentions 2 (H. Poincare, F. Klein) and 3 (E. M. Andreev) and proof of absence of them in big dimentions ≥ 30 in compact case (E. B. Vinberg) and ≥ 996 in non-compact case (M. N. Prokhorov and A.G. Khovansky).

The arithmetic groups generated by reflections (i.e. groups which can be obtained as subgroups of finite index in the group $O(L)$ of authomorphisms of a hyperbolic lattice L) is of independent interest. If such subgroup exists then L is called reflective.

The greatest dimention of Lobachevsky space where arithmetic discrete group of compact type is known is 8 (V. O. Bugaenko), of non-compact type — is 21 (R. Borcherds). The lattice giving an example of such a group of compact type in Λ^8 is $[-(\sqrt{5}+1)] \perp E_8$. The Coxeter scheme of this group is



The following theorem helps to reduce the question of reflectivity to small dimentions

Theorem (V. O. Bugaenko). A direct orthogonal hyperbolic summend of reflective hyperbolic lattice is reflective (under supposion that the ring of integers of the ground field is factorial).

Vadim Bugaenko, Moscow
SFB 343

06.11.92: Moduli for hypersurface singularities and moduli for Lie algebras.

Let k be a field and let $f \in k[\underline{x}]$, $\underline{x} = x_1, \dots, x_n$, be a polynomial. Abusing the language one denotes by f the complete local k-algebra $k[[\underline{x}]]/(f)$; the singularity of the hypersurface $f=0$ at the origin. If $\underline{S} = \mathrm{Spec}(S)$ is any pointed affine k-scheme then a polynomial $F_S \in S[\underline{x}]$ is said to be a deformation of f to $\underline{S}$ if the morphism $S[\underline{x}] \to k[\underline{x}]$ induced by the point $S \to k$, maps F_S to f.
Associated to an isolated hypersurface singularity f there are defined an algebraic invariant $\tau(f)$, the Turina number, and a topological invariant $\mu(f)$, the Milnor number. If $\{\underline{x}^{\underline{\beta}}\}_{\underline{\beta} \in B}$ is a basis for $k[[\underline{x}]]/(f, (\underline{x}) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \mid i=1,\dots,n)$ then $H = k[t_{\underline{\beta}}]_{\underline{\beta} \in B}$, with the obvious point and $F = f + \Sigma t_{\underline{\beta}} \underline{x}^{\underline{\beta}}$ define a <u>miniversal</u> family for f, containing all singularities close to f. Let $\underline{S}_\tau$ (resp. $\underline{S}_{\mu,\tau}$) be the substratum of $\underline{H} = \mathrm{Spec}(H)$ along which $\tau(F(\underline{t}))$ (resp. $\tau(F(\underline{t}))$ and $\mu(F(\underline{t}))$) stay constant. In the SLN #1310, Gerhard Pfister and I proved that there are, in the category of algebraic spaces, good quotients of $\underline{S}_\tau$ (resp. $\underline{S}_{\mu,\tau}$) producing a sequence of "good" local moduli spaces M_τ (resp $M_{\mu,\tau}$). In particular we proved for $f = x_1^{m_1} + x_2^{m_2}$ that $M_{\mu,\tau_{min}}$ is a scheme and that $\dim M_{\mu,\tau} \geq \dim M_{\mu,\tau+1}$ for $\tau_{min} \leq \tau \leq \tau+1 \leq \tau(f) = \mu(f) = \mu$. Moreover we found examples showing that $M_{\mu,\tau_{min}+1}$ is not nec. a scheme, and that for surfaces one may have $\dim M_{\mu,\tau_{min}} < \dim M_{\mu,\tau}$ for $\tau > \tau_{min}$.
In a joint paper with Harald Bjar, Compositio 1990, we prove in a similar way that the Lie algebras $\mathfrak{g}$ of dimension τ with fixed $\dim_k H^i(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = h_i$, $i = 0, \dots, \tau$, have, in the category of alg. sp. a fine moduli $\mathbb{L}(\underline{h})$. If for a singularity f, one associates the Lie algebra $L^0(f) := \mathrm{Der}_k(k[[\underline{x}]]/(f)) / \mathrm{Der}_\pi$, where Der_π is the Lie ideal of derivations that lift to any deformation of f, then one gets a morphism of alg. spaces $\ell(\underline{h}) : M(\underline{h}) \to \mathbb{L}(\underline{h})$, $\underline{h} = (h_0, \dots, h_{\tau(f)})$, where $\{M(\underline{h})\}$ is the obvious stratification of M_τ. We prove, for $f = x_1^{m_1} + x_2^{m_2}$, that $\ell(\underline{h})$ is an immersion (with some few exceptions) and we then formulate an obvious Conjecture.

Olav Arnfinn Laudal

Algorithmen für Netzwerkfluß

Sei $G = (V,E)$ ein gerichteter Graph, $s,t \in V$ ausgezeichnete Knoten und $cap: E \to \mathbb{R}_+$ eine Kapazitätsfunktion. Ein Fluß ist eine Funktion $f: E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $f(e) \leq cap(e)$ für alle e und

$$\sum_{(v,w)\in E} f(v,w) = \sum_{(w,v)\in E} f(w,v)$$

für alle $v \in V \setminus \{s,t\}$. Der Wert $val(f)$ eines Flusses ist

$$val(f) = \sum_{(s,w)\in E} f(s,w) - \sum_{(w,s)\in E} f(w,s).$$

Wir stellen ~~einen~~ Algorithmen zur Berechnung maximaler Flüsse vor. Die Laufzeit ist $\min\{nm, n^3/\lg n\}$, wobei $n = |V|$ und $m = |E|$

K. Mehlhorn
(Saarbrücken)

(13.11.92)

"Coding Theory and Equations over Finite Fields"

We recall the basic problem of the theory of error-correcting codes, and we show that a certain family of equations over finite fields is useful to solve it. We introduce several connections with trace function, character sums, algebraic curves and related objects.

(20-11-92) J. WOLFMANN (Toulon)

27 November 1992

Structure of Linear Groups over General Rings

This is a survey of the theory of linear groups over associative rings. We touch the following proplems: normal structure, automorphisms, presentations, conjugacy classes, representations, subgroups.

First we recall the classical answers for the case of fields or skew-fields. It turns out that for some of the abovementioned questions there is no hope to generalize the answers. Say, the description of conjugacy classes or representations becomes wild even for such rings as $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.

On the other side some other questions, like description of normal subgroups, commutator formulae, automorphisms, generators and relations admit very nice answers - at least in the qualitatif sense - for quite general classes of rings.

We state some of these results in the stable range, for commutative rings, PI-rings, etc. and discuss related unsolved problems. Special attention is paid to the class of weakly finite rings.

N.A. Vavilov (St.-Petersburg)

2 Dezember 1992

"The group of Quadratic algebras and Arithmetic in the Witt group"

Let R be a commutative ring and let $Qu(R)$ be the group of isomorphism classes of quadratic (i.e. fin. gen. proj. of rank 2) separable (a generalization of the usual concept for fields) algebras over R. The group $Qu(R)$ plays an important role in the theory of integral quadratic forms over R. It "contains" for example the answers to the following questions:

Let M be a fin. gen. projective module over R.

1) Suppose M is free with basis $\mathfrak{X} = \{x_1, .., x_n\}$ and that $q: M \to R$ with associated bilinear form h is a non-singular quadratic form.

What (square) classes in $R^*/(R^*)^2$ are represented by the discriminant

$$(-1)^{n(n-1)/2} \det h(x_i, x_j)$$

(as q varies over all possibilities)?

2) Suppose R is Dedekind. So $M \simeq R \oplus \ldots \oplus R \oplus \mathfrak{a}$ for some fractional ideal $\mathfrak{a}$. What conditions (nec. and suff.) on $\mathfrak{a}$ provide a non-singular quadratic form q on M?

3) Suppose $R = R_S$ the ring of S-integers in a global field. What is the group structure of the quadratic Witt group $W_q(R)$? Further, what is the structure of the quotient $W(R)/W_q(R)$ where $W(R)$ is the Witt group of symm. bilinear forms? (Note that $q \to b$ provides an injection $W_q(R) \to W(R)$).

ANSWERS: (1) Precisely the square classes of the form $(a^2+4b)(R^*)^2$, (of course $a, b \in R$ and $a^2+4b \in R^*$)

(2) $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{a}$ has the structure of a discriminant module whose class vanishes under $\mathrm{Disc}(R) \to \mathrm{Disc}(R/4R)$

(3) Too technical for present purposes

Alex Hahn (Notre Dame, z.Z. Innsbruck)

18 Dezember 1992.

Kombinatorische Bedingungen für Glattheit von Teilvarietäten von Fahnenmannigfaltigkeiten.

X ist die Fahnenmannigfaltigkeit einer komplexen reduktiven Liegruppe und T ist ein Torus in G. Es sei Y eine T-stabile Teilvarietät von X. Carrell und Peterson [1] bewiesen vor kurzem folgendes:
Satz: Es sei $y \in Y$ ein isolierter Fixpunkt von T in Y. Dann ist die Anzahl der T-stabilen Kurven in Y durch den Punkt y mindestens dim Y. Gleichheit gilt falls Y glatt ist in y.
Sie wenden den Satz an im Fälle dass Y eine Schubertvarietät ist, und finden dann einen Beweis einer Vermutung von Deodhar (über die Weylgruppe von G).

Im Vortrag handelt es sich um eine andere Anwendung. Es sei θ ein innerer Automorphismus von G der Ordnung 2, mit Fixpunktgruppe K. Dann hat K endlich viele Bahnen in X. Der Satz wird jetzt angewandt im Fälle dass Y Abschluss einer Bahn ist. Die Glattheitsbedingung wird jetzt formuliert im Rahmen der Kombinatorik der Bahnen, die Richardson und ich neulich entwickelt haben [2]

[1] J.B. Carrell & D.H. Peterson, The Bruhat graph of a Coxeter group, a conjecture of Deodhar and rational smoothness of Schubert varieties, preprint (erscheint in Proc. AMS Summer Institute on Algebraic Groups).
[2] R.W. Richardson & T.A. Springer, The Bruhat order on symmetric varieties, Geom. Ded. 35 (1990), 389–436.

T.A. Springer (Utrecht)