8 January 1993

Higher Adelic Theory

The talk is devoted to a brief description of the generalization the classical adelic theory to the case of higher dimensions. It includes such things as n-dimensional local fields, higher local class field theory and a generalisation of the Bruhat-Tits building.

A. Parshin (Moscow)

15 January 1993

Amenability: Classical and Modern

The theory of amenability of groups began in earnest in a 1929 paper of J. von Neumann, which consisted of a detailed study of the "problem of measure":

Given a transformation group (G, X), when does $\exists$ a finitely additive, invariant, positive measure μ on X such that $\mu(A) = 1$, $A \subseteq X$ a given subset.

The problem had been posed by ~~Banach~~ Hausdorff in 1914 for $X = \mathbb{R}^n$, $A = [0,1]^n$, and G the isometry group. If $(G, X=G, A=G)$ has a positive solution, then G is <u>amenable</u> and von Neumann derived a number of examples and constructions preserving this property. For $G \subseteq$ isometry group, he showed the problem of measure $(G, \mathbb{R}^n, [0,1]^n)$ has a positive solution $\Leftrightarrow$ G is amenable.

Another major pioneering figure in amenability was M. M. Day. He defined a locally compact group to be amenable if $L_\infty(G)^*$ has an invariant mean μ, i.e. a positive linear functional such that $\mu(1_G) = 1$ and $\mu(l_g f) = \mu(f)$ always, where $l_g f(x) = f(gx)$. He and Furstenberg also characterized amenability in terms of always having fixed points on compact, convex sets under affine actions.

Another fruitful approach to amenability is via the universal compact, convex semigroup compactification $\hat{S}$ of a group G. This semigroup has a minimal ideal which is a right ideal $\Leftrightarrow$ G is amenable. The left ideals in the minimal ideal are all isomorphic and measure how far the group is from being amenable. In general, they have some natural geometric structure (maximal flag manifolds in the case of semisimple groups, or more precisely, the probability measures on such).

The semigroup analogue is also consider, $S \subseteq G$ a Lie group.

J. Lawson – L.S.U., Baton Rouge

22 Januar 1993.

Schrödinger-Gleichung mit rotationsinvarianter Singularität.

Seien $U = \{x \in \mathbb{R}^m / 0 < \|x\| < 1\}$, $m \geq 2$, und
$M(U) = \{$ positive Maße auf $\mathbb{R}^m$ mit: $\forall V \subset \bar{V} \subset \bar{U} \setminus \{0\}$ ist $p_V = \int G_z^V \mu(dz)$ stetig und reel auf $V\}$.
Für $V \subset U$ bezeichnen wir mit ${}^\mu\mathcal{H}(V) = \{u \in \mathcal{C}(V)\ \Delta u - u\mu = 0$ im Distributionen Sinne$\}$ und ${}^\mu\mathcal{H}_0(U) = \{h \in {}^\mu\mathcal{H}^+(U) : \lim_{|x| \to 1} h(x) = 0\}$.
Wir sagen, daß μ das Picard-Prinzip (bezeichnet wird mit μ P.P) erfüllt, falls der konvexe Kegel ${}^\mu\mathcal{H}_0(U)$ von einer Funktion erzeugt wird. Für radiale Maße μ in $M(U)$ geben wir, mittel der Green-Funktion ${}^\mu G$ von U und der Operator $\Delta - \mu$, die folgende Charakterisierung: μ P.P genau dann wenn
$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\|x\|^2} \left(\int_{S^{dm-1}} {}^\mu G(\|x\| z, x)\, \sigma_{dm-1}(dz) \right) \lambda(dx) = +\infty$ (σ_{d-1} ist die normierte Oberflächemaß auf $S^{dm-1} = \{x \in \mathbb{R}^m / \|x\| = 1\}$). Wir setzen $M_p(U) = \{\mu \in M(U) / \mu$ radial und μ P.P$\}$. Dann gilt für $c \geq 0$:
$\mu \in M_p(U)$, ν radial mit $0 \leq \nu \leq \mu \Rightarrow c\mu$ und ν sind im $M_p(U)$.
Weiter beweisen wir das "Order Comparison Theorem":
μ_i $i \in \{1, 2\}$ radial und $\frac{1}{c}\mu_1 \leq \mu_2 \leq c\mu_1$ dann gilt μ_1 P.P $\Leftrightarrow \mu_2$ P.P.
Mit einer Charakterisierung von wesentlichen Mengen für das Picard-Prinzip, zeigen wir daß der Kegel $M_p(U)$ ist aber nicht konvex (es existieren $\mu_1, \mu_2 \in M_p(U)$ mit $\mu_1 + \mu_2 \notin M_p(U)$).

Abderrahman BOUKRICHA (Tunis)

Some remarks on representations in algebraic groups

Arjeh M. Cohen Jan 1993.

There are interesting examples of finite subgroups of simple algebraic groups G which are maximal in some sense (e.g. as closed Lie subgroups when viewed over $\mathbb{C}$). A series of examples is given by:

<u>theorem</u> Kostant's conjecture holds: If G has Coxeter number h such that $2h+1$ is a prime power, say q, then $L(2,q)$ embeds in $G(\mathbb{C})$.

[The case $G = E_7$ is dealt with by Kleidman and Ryba, the case E_8 by C., Griess, and Lisser.]

I discuss the existence of a splitting field for an arbitrary finite group L with respect to a simple algebraic group G defined over a field k of characteristic prime to $|L|$. It is the minimal finite extension field k_1 of k for which any morphism of groups $L \to G(l)$ with $l \supseteq k$ is equivalent to a morphism $L \to G(k_1)$.

The notion is used to prove the following result (from joint work with Wales and Griess):

<u>theorem</u> Let r be a prime. Then for a finite simple group L the following hold:

(i) if $L \leq G(\mathbb{C})$, then there is $b \in \mathbb{N}$ with $L \lneqq G(\mathbb{F}_{r^b})$

(ii) if $L \leq G(\mathbb{F}_{r^a})$ for some $a \in \mathbb{N}$ and $\gcd(r, |L|) = 1$, then $L \lneqq G(\mathbb{C})$.

It would be interesting to have some quantitative information on the splitting field k_1. For instance, for $L(2,61) \leq E_8(\mathbb{C})$ (cf. Kostant's conjecture), it is conjectured that $L \lneqq E_8(\mathbb{Q}(\sqrt{61}))$.

5 – II – 1993

Abelian varieties and Newton polygons.

Frans OORT (UTRECHT – NL).

We construct closed subsets of moduli spaces.

E.g. $\left\{ C \mid g(C) = 3,\ C = C_4' \subset \mathbb{P}^2,\ \begin{array}{c} \cancel{\ } \\ C \text{ has} \geq \text{hyperflex} \end{array} \right\} / \cong \ = V_1 \subset \mathcal{A}_3$

(amusing exercise: $\overline{V_1} \cap$ Hyperelliptic locus $= \emptyset$ in $\mathcal{A}_3$).

If X is an AV, $/K$, $K \supset \mathbb{F}_p$,

$X[p](\overline{K}) \cong (\mathbb{Z}/p)^f$, $f = p\text{rank}(X)$

$\mathcal{A}_g \otimes \mathbb{F}_p \supset V_i := \{(X,\lambda) \mid f_X \leq i\}$

Th (Koblitz, Mumford–Norman, FO): $\dim V_i = \frac{1}{2}g(g+1) - (g-i)$

Exa: $V_0 \subset \mathcal{A}_3 \otimes \mathbb{F}_p$, V_0 complete, $\dim V_0 = 3$

Que: $W \subset \mathcal{A}_g \otimes \mathbb{C}$, W complete, what possibilities we have for $\dim W$? Using Satake-compactification we see:

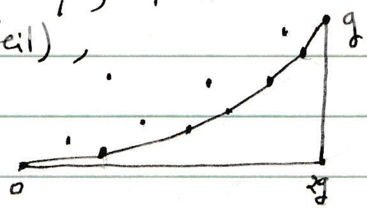
$\exists W$, complete, $\dim W = g-1$, $W \hookrightarrow \mathcal{A}_g \otimes \mathbb{C}$

!: $\exists W \subset \mathcal{A}_g \otimes \mathbb{F}_p$, W complete, $\dim W = \frac{1}{2}g(g+1) - g = \frac{1}{2}g(g-1)$.

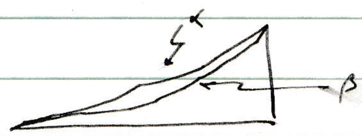
$\forall X/K$, $K \supset \mathbb{F}_p$, $\exists$ Newton polygon, e.g. $K = \mathbb{F}_q$, $q = p^n$

$(F^n : X \to X) = \pi \in \mathrm{End}(X)$, $f = f^\pi \in \mathbb{Z}[T]$ (Weil),

$f = \sum \alpha_{2g-i} T^i$, $\mathcal{N}(X) =$ lower convex hull of $\{(i, \frac{1}{n} v_p(\alpha_i))\}$

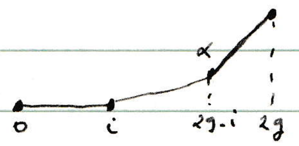


$W_\alpha := \{(X,\lambda) \mid \mathcal{N}(X) \prec \alpha\}$ $\qquad \alpha \prec \beta$



Th (Grothendieck, Katz): $W_\alpha \subset \mathcal{A}_g \otimes \mathbb{F}_p$ is closed.

Exa:



this α defines $W_\alpha = V_i$.

Th $\dim(W_\alpha) = \frac{1}{2}g(g+1) - l(\alpha)$, where $l(\alpha)$ is the length of the longest chain $\alpha \precneqq \alpha_1 \precneqq \alpha_2 \precneqq \cdots \precneqq \alpha_l$.

Exa supersingular σ, $\dim(W_\sigma) = [g^2/4]$.

Exa Conj Manin: $\forall \alpha$, $\exists$ ~~A~~ X: $\mathcal{N}(X) = \alpha$

Exa Conj Koblitz: $\forall \alpha \prec \beta$, $\exists\ \mathcal{G}_1 \rightsquigarrow \mathcal{G}_0$, $\mathcal{N}\mathcal{G}_1 = \beta$, $\mathcal{N}\mathcal{G}_0 = \alpha$

23-04-93.

Heat equation on Riemannian manifolds.

Alexander Grigoryan (Moscow – Bielefeld)

Let us consider a Riemannian manifold M being non-compact and geodesically complete (also smooth and connected) and the heat equation

$$u_t - \Delta u = 0 \qquad (1)$$

on $M \times (0, +\infty)$ where $u = u(x,t)$, $x \in M$, $t > 0$. It is known ~~and~~ that there exists always the heat kernel $p(x,y,t)$ being the smallest positive fundamental solution to (1). It is also well-known that for a wide class of manifold including Euclidean space and hypobolic space, the conservation law is true:

$$\forall y \in M \ \forall t > 0 \qquad \int_M p(x,y,t)\,dy \equiv 1 \qquad (2)$$

Theorem 1 Let $V(R)$ be the volume of a ball centered at some fixed point $x_0 \in M$ of radius R. If

$$\int^{\infty} \frac{R\,dR}{\log V(R)} = \infty \qquad (3)$$

then the conservation law (2) is valid.

For exampel, (3) holds if $V(R) = \exp(cR^2)$. It turned out that the speed of possible growth of the volume $V(R)$ given by (3) is optimal: if for some function $V(R)$ (3) is false then one can construct a manifold with the volume growth $V(R)$ where the conservation law fails.

Theorem 2 If

$$\int^{\infty} \frac{R\,dR}{V(R)} = \infty \qquad (4)$$

then the manifold M admits no positive fundamental solution to Laplace equation $\Delta u = 0$ i.e. $\int_0^\infty p(x,y,t)\,dt = \infty$

(if $\int_0^\infty p(x,y,t)\,dt < \infty$ then it is exactly a positive fundamental solution to the Laplacian).

7.04.93

"Pinching und Pseudoisotopietheorie"
Michael Weiss (Bielefeld)

Eine vollständige, einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, M^n, deren Schnittkrümmung $\sec(M)$ den Bedingungen $1/4 < \sec(M) \leq 1$ genügt, ist homöomorph zu S^n. (Satz von Rauch-Berger-Klingenberg, ca. 1960.) Es ist unbekannt, ob M auch diffeomorph zu S^n sein muss. Folgende Begriffe sind bei der Untersuchung dieser Frage nützlich.

Sei $W(M)$ der Raum aller Morsefunktionen $f: M \to \mathbb{R}$, die genau zwei kritische Punkte besitzen. Die Abbildung

$$p_M : W(M)/\sim \longrightarrow (M\times M-\Delta)/\sim$$
$$f \longmapsto (f^{-1}(\min.), f^{-1}(\max))$$

ist eine Faserung (wobei die Äquivalenzrelation von $f \sim -f$ bzw. $(x,y)\sim(y,x)$ erzeugt worden). Außerdem ist $(M\times M-\Delta)/\sim$ homotopieäqu. zu $\mathbb{R}P^n$ (weil M homöomorph zu S^n ist).

SATZ (mit Voraussetzungen wie im Satz von RBK): Die Faserung p_M besitzt einen Schnitt.

Für eine beliebige Homotopiesphäre M^n, ohne Riemannsche Metrik, ist die Definition von p_M immer noch sinnvoll, aber in vielen Fällen besitzt p_M keinen Schnitt. Beispiel: Ist M die Milnor-Homotopiesphäre (dim = 7, 11, 15, ...), dann besitzt p_M noch nicht einmal einen Schnitt über

$$\mathbb{RP}^2 \subset \mathbb{RP}^n \simeq (M\times M-\Delta)/\sim .$$

Für den Beweis solcher Abschätzungen braucht man viel Pseudoisotopietheorie, während der Beweis der obenstehenden Sätze fast elementar ist.

14.5.93

Index reduction formulas for twisted flag varieties via K-theory

A. Wadsworth (University of California at San Diego)

This is joint work with Panin and Merkurjev.

Let F be a field, F_{sep} its separable closure, and $\Gamma = \mathcal{G}(F_{sep}/F)$ the absolute Galois group of F. Let G be a quasisplit connected adjoint semisimple group over F and P a parabolic subgroup of G. Let $\gamma \in Z^1(\Gamma, G(F_{sep}))$, a cocycle, and let $X = {}_\gamma(G/P)$, the γ-twist of $G/P = \{gP \mid g \in G\}$. So X is a smooth absolutely irreducible projective variety. Let $F(X)$ be the function field of X over F. Let B be any central simple algebra over F, and let $\operatorname{ind}(B) =$ Schur index of B $(= \sqrt{\dim_F D}$, where $B \cong M_n(D)$, D a division algebra).

Panin has recently computed $K_*(X;B)$, which is the Quillen K-theory of the exact category $\mathcal{P}(X;B) = \{$sheaves of $\mathcal{O}_X \otimes_F D$-modules which are locally free of finite rank as $\mathcal{O}_X$-modules$\}$. From this we have obtained an index reduction formula for $F(X)$. Here is the formula in the simpler case when G is split: Let $\tilde{G}$ be the universal cover of G, so we have an exact sequence $0 \to Z \to \tilde{G} \to G \to 0$, where $Z =$ center of $\tilde{G}$, a finite group. Let $\tilde{P} =$ inverse image of P in $\tilde{G}$. Let $C = \operatorname{Hom}(Z, F^*)$, the dual of Z. For each $\chi \in C$, pick any nonzero representation (V_χ, ρ_χ) of $\tilde{G}$ such that $\rho_\chi|_Z = \oplus\chi$. Then G acts on $\operatorname{End}_F(V_\chi)$ (because $\tilde{G}$ acts, so that Z acts trivially); let $A_\chi = {}_\gamma(\operatorname{End}_F(V))$, a central simple algebra over F. Let

$$n_{\chi,P} = \gcd\{\dim W \mid (W,\rho) \text{ is a representation of } \tilde{P} \text{ and } \rho|_Z = \oplus\chi\}.$$

<u>Theorem</u>. Assume G is split. For any central simple algebra B over F,

$$\operatorname{ind}(B \otimes_F F(X)) = \gcd_{\chi \in C}\left(n_{\chi,P}\operatorname{ind}(B \otimes_F A_\chi)\right) = \gcd_{\chi \in C}\left(\operatorname{ind}(A_\chi \otimes_F F(X))\operatorname{ind}(B \otimes_F A_\chi)\right).$$

Further work has led to good explicit formulas for the $n_{\chi,P}$ in many cases, including all the simple groups (and all their parabolics). This result encompasses and generalizes the index reduction formulas obtained previously by Schofield and van den Bergh (for X = Brauer-Severi variety), Merkurjev (for X = quadric hypersurface), A. Blanchet (for X = generic partial splitting variety of a central simple algebra), D. Saltman (for

X = transfer of Brauer-Severi variety or generic partial splitting); auf D. Tao
(for X = involution variety for ~~a~~ a central simple algebra with orthogonal involution).

Adrian Wadsworth

21. Mai 1993

Einige Aspekte der Theorie der Hypergruppen

Eberhard Kaniuth (Paderborn)

Eine systematische Untersuchung von Hypergruppen setzte mit der grundlegenden Arbeit von Jewett (1975) ein. Hypergruppen stellen eine mathematische Struktur dar, die die einer Gruppe weitgehend verallgemeinert und deshalb auch erheblich unzugänglicher ist. Grob gesprochen wird die Multiplikation (in der Gruppe) ersetzt durch eine Faltungsstruktur, bei der je zwei Punkten des zugrundeliegenden lokalkompakten Hausdorffraumes K ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit kompaktem Träger auf K zugeordnet. Es werden eine Reihe von Klassen von Hypergruppen und einige ihrer Eigenschaften vorgestellt:

1. Konjugationsklassen kompakter Gruppen und Dualräume kompakter Gruppen stellen (zueinander duale) Hypergruppen dar.
2. Doppelnebenklassenhypergruppen G//H (G lokalkompakte Gruppe, H kompakte Untergruppe), insbesondere Gelfand-Paare, stehen in engem Zusammenhang mit sphärischen Funktionen.
3. Folgen orthogonaler Polynome geben häufig Anlaß zu Hypergruppen-Strukturen auf $\mathbb{N}_0$ und umgekehrt.
4. Sturm-Liouville-Hypergruppen auf $\mathbb{R}_+$, die mit singulären Sturm-Liouvilleschen Randwertproblemen zusammenhängen.

Berichtet wird auch über Fragen aus der harmonischen Analyse auf kommutativen Hypergruppen: Fortsetzung von Charakteren von Unterhypergruppen, Dualitätstheorie, Plancherel-Formel, Existenz von Haar-Maßen, Probleme der Spektralsynthese.

E. Kaniuth

28. 5. 1993

On the smooth structures on the elliptic surfaces and related topics

Masaaki Ue (Kyoto University)

A compact complex surface S is called an elliptic surface if it admits a holomorphic projection $\pi: S \to B$ to some Riemann surface B whose general fiber is a nonsingular elliptic curve. Elliptic surfaces (as real 4-dimensional manifolds) give typical examples of exotic (homeomorphic but non-diffeomorphic) smooth 4-manifolds. There are some known facts.

1. The homeomorphism types of the elliptic surfaces are completely classified.
   (i) If π_1 is not finite cyclic, homeomorphic elliptic surfaces are actually diffeomorphic.
   (ii) If π_1 is finite cyclic, the TOP classification comes from Hambleton-Kreck's result.
2. For any $r>0$, there exist infinitely many elliptic surfaces with $\pi_1 = \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ which are mutually homeomorphic but non-diffeomorphic to each other. (Friedman-Morgan etc.)
3. For some elliptic surface S, there is a 4-manifold X homeomorphic to S, but not diffeomorphic to any complex surface.
   Decomposable examples. (Freedman-Donaldson, Hambleton-Kreck)
   Indecomposable cases. (First discovered by Gompf-Mrowka.)

We can generalize the last cases to:

Theorem 1 Let S be an elliptic surface with $\pi_1 S$ finite and $k = e(S)/12 \geq 2$ (where $e(X)$ is the euler number of X). If π_1 is cyclic we further assume some technical conditions. Then there exist infinitely many smooth 4-manifolds S_i ($i \in \mathbb{N}$) homeomorphic to S, such that the universal coverings $\tilde{S}_i$'s are non-diffeomorphic to each other, indecomposable (up to homotopy 4-spheres), and never diffeomorphic to complex surfaces.

We can deform the examples in Theorem 1 to show

Theorem 2 Let $X = (2n-1)\mathbb{C}P^2 \# (10n-1)\overline{\mathbb{C}P^2}$, or $nK3 \# (n-1)S^2 \times S^2$ where n is divided by some odd integer r with $1 < r < n$ ($K3$ is the $K3$-surface). Then there exist infinitely many C^∞ free $\mathbb{Z}_r$-actions on X with generator γ_i ($i \in \mathbb{N}$) such that the orbit spaces X/γ_i's are mutually homeomorphic but non-diffeomorphic to each other.

M. Ue

4.6.1993

Mathematik und Technologie

R. Bulirsch (TU München)

Mathematik und auch Informatik sind grundlegende Wissenschaften für die Technologie unserer Zeit. Man hat das in dem Satz "Hochtechnologie ist mathemat. Technologie" zusammengefaßt. Das ist nicht neu: Bereits um die Jahrhundertwende hatte man in Deutschland die Bedeutung der Mathematik für die technischen Wissenschaften erkannt. – Im Vortrag wird auf wichtige Aufgaben der Mathematik in den angewandten Wissenschaften eingegangen: Berechnung von Halbleitern (Lösung nichtlin. part. Diffgl. vom ellipt. Typ); Chip-Konstruktion (Lösung großer nichtlin. Systeme gewöhnl. Diffgl. (1000 – 50000)); optimale Robotersteuerung (Variationsprobl. mit Nebenbed.); Kernspin- und Computer-tomographie (Inversion der Radon-transformation), optimale Bremsung von Raumfahrzeugen in der Erdatmosphäre, optimale Steuerung von Raumsonden (Variationsprobleme mit Nebenbed.), Bildübertragung etc. (Dias und Filme)

R. Bulirsch

7.6.1993. The method of orbits: An overview with examples. A. A. KIRILLOV (Moscow State University & Independent University of Moscow).

The main idea of the orbit method is based on the following "experimental fact":

$$\underbrace{\hat{G}}_{\text{The set of all unirreps of a Lie group } G} \;\underset{\text{most difficult to explain}}{\cong}\; \underbrace{\mathfrak{g}^*/G}_{\text{The set of all } G\text{-orbits in the space } \mathfrak{g}^* \text{ dual to } \mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)}$$

The method can be applied to a Lie group in a broad sense (e.g. ∞-dimensional group, p-adic or adelic group, algebraic group over a finite field or quantum group).

For G = Virasoro-Bott group (a central extension of the group $\mathrm{Diff}_+ S^1$) an open subset in $\mathfrak{g}^*$ is covered by orbits which are infinite dimensional Kähler manifolds. They are holomorphically equivalent to the space of univalent functions on the unit disc.

For G = unitriangular group of order $n\times n$ with coefficients in $\mathbb{F}_2$ the classification of coadjoint orbits is connected with many interesting combinatorial problems (such as up-down permutations, Morse polynomials, Euler-Bernoulli triangle etc.). There is a "partition function-type" formula for the number of orbits:

$$O_n = 2^{-n(n-1)} \sum_{\substack{X,Y\in\mathfrak{g} \\ F\in\mathfrak{g}^*}} (-1)^{\langle F,[X;Y]\rangle}.$$

References. Encyclopädia of Math. Sci., Vol 4 & Vol 22 /Springer's translation of the Russian Series/

Funkt. Anal. & Appl. 27, № 1 (1993), 73-75.

Contemporary Mathematics Vol 145. Representation theory of Groups and Algebras, R. Lipsman, J. Adams, R. Hart, S. Kudla, J.-S. Li, J. Rosenberg, eds. (1993)

Kirillov.

11/6/93

Darstellungen von generischen Hecke-Algebren und ihren Spezialisierungen

(M. Geck, RWTH Aachen)

In diesem Vortrag wird ein Überblick über Ergebnisse in der "gewöhnlichen" und "modularen" Darstellungstheorie von Hecke-Algebren gegeben. Diese spielen eine Rolle etwa in der Theorie der Knoten & Verkettungen und ihrer Invarianten (etwa Jones-Polynom) und der gewöhnlichen und modularen Darstellungstheorie von endlichen Gruppen vom Lie-Typ.

Sei also W eine endliche Weyl-Gruppe und $H = H_K(u)$ zugehörige generische Hecke-Algebra über dem Quotientenkörper K des Ringes der Laurent-polynome $A = \mathbb{Z}[u, u^{-1}]$ in einer Unbestimmten u. Die Darstellungen von H werden in Analogie zur endl. Gruppentheorie als "gewöhnlich" bezeichnet. Es wird gezeigt, wie man das Konzept einer Charaktertafel von endl. Gruppen auf Hecke-Algebren verallgemeinern kann. (Gemeinschaftsarbeit mit G. Pfeiffer).

Eine Abbildung $f: A \to k$, $u \mapsto q \in k$ heißt eine Spezialisierung, und die daraus abgeleitete Algebra $H_k(q) = k \otimes_A H$ spezialisierte Hecke-Algebra. Unter geeigneten Voraussetzungen an f wird hierdurch eine Zerlegungsabbildung zwischen den Grothendieck-Gruppen von $H_K(u)$ und $H_k(q)$ induziert. Es wird gezeigt, daß diese jeweils über Grothendieck-Gruppen von Hecke-Algebren über Kreisteilungskörpern k mit q = Einheitswurzel, faktorisieren. Auf diese Weise wird auch eine Übersicht über die "modularen" Darstellungen der spezialisierten Algebren $H_k(q)$ gewonnen.

Schließlich wird (für Typ A_n) gezeigt, wann eine Hecke-Algebra über einem Kreisteilungskörper endlichen Darstellungstyp hat.

Meinolf Geck

18.6.93 Algebraische Funktionenkörper und Codierungstheorie

Henning Stichtenoth, Univ. Essen

Es ging im wesentlichen darum zu zeigen, daß der "Hermite-sche Funktionenkörper" $F = K(x,y)$, definiert durch die Gleichung $y^q + y = x^{q+1}$, in vieler Hinsicht sehr bemerkenswert ist.

- unter allen Funktionenkörpern hat er eine – im Verhältnis zu seinem Geschlecht – größte Automorphismengruppe.
- er hat, für $K = GF(q^2)$, die maximale Anzahl rationaler Punkte.

Insbesondere die zweite dieser Eigenschaften macht den Hermite'schen Funktionenkörper für die Codierungstheorie interessant. Einerseits haben die geometrischen Goppa-Codes, die aus ihm abgeleitet werden, besonders gute Parameter. Zum anderen wird gezeigt, wie man diesen Funktionenkörper benutzen kann, Aussagen über die Gewichtshierarchie dualer BCH-Codes zu gewinnen.

[illegible]

18.6.93 On discreteness of hyperbolic motion groups with elements of finite order.

(D. Derevnin, Tyumen)

Let $\Gamma = \langle A, B \rangle$, $A^n = B^m = 1$, $(m,n>2)$ be a group of hyperbolic motions of H^3. We suppose, that there is set of hyperbolic distances $R = \{r_i : r_1 < r_2 < \dots, r_i \to r_\infty < \infty\}$ such, that Γ is a discontinuous group only if the hyperbolic distance $r(A,B)$ between the fixed sets of elements ~~of~~ A and B belong to R or are more than r_∞. The boundary distance r_∞ (for $m,n>2$) after which Γ begins to act freely was noted. We investigated the method of finding distances $r_1, r_2, \dots$ for any $m,n>2$. In case $m=n=4$ we determined r_1, r_2 ($ch\, r_1 = \sqrt{2}$, $ch\, r_2 = 1.6159\dots$).

[illegible]

25.6.93

Zur Kohomologie von Zopf-Gruppen

Erich Ossa, Univ. Wuppertal

In der Homotopietheorie haben die Zopfgruppen ihren Auftritt vor allem als Fundamentalgruppen der Konfigurationsräume des $\mathbb{R}^2$. Dabei ist der Konfigurationsraum der Mannigfaltigkeit M definiert als die Mannigfaltigkeit $C_k(M)$ der k-elementigen Teilmengen von M; es ist also die k-te Zopfgruppe $Br_k = \pi_1 C_k(\mathbb{R}^2)$. Die Homologie der Konfigurationsräume spielt auf Grund des Segal-May'schen Approximationssatzes für $\Omega^2 S^2 X$ (und für $\Omega^n S^n X$) eine wesentliche Rolle bei der Konstruktion von Homologie-Operationen für iterierte Schleifenräume. Die für die $\mathbb{F}_p$-Homologie bei $p>2$ notwendigen Operationen wurden erstmals von F. Cohen in seiner Dissertation (Teil II von Cohen-Lada-May, Springer Lecture Notes 533) ~~durch~~eingeführt; mit ihrer Hilfe konnten $H_*(\Omega^2_0 S^2)$ und $H_*(Br_k)$ mit $\mathbb{F}_p$-Koeffizienten vollständig berechnet werden. Ziel des Vortrags ist es zu zeigen, wie sich die komplizierten kombinatorischen Rechnungen in F. Cohens Arbeit durch eine darstellungstheoretische Betrachtung der Kohomologie der reinen Zopfgruppen Br_k^0 vermeiden lassen.

E. Ossa

2.7.93 Additive Abbildungen zwischen Ringen Holomorpher Funktionen

R. B. Burckel, Kansas State Univ. (USA)
z. Z. Erlangen

Das Thema ist die Beziehung zwischen Ring-Isomorphismen $H(\Omega_1) \to H(\Omega_2)$ [holomorpher Fkt. auf Gebieten $\Omega_j \subset \mathbb{C}$] und konformen Isomorphismen der entsprechenden Gebieten. Und zwar beschäftigen wir uns mit Abbildungen von allgemeinerer Art, beispielsweise den Ring-Derivationen. Für $\mathbb{C}$-Algebra-Homomorphismen ist alles sehr durchsichtig und elementar. Verzichtet man dagegen auf die $\mathbb{C}$-Linearität, dann ist die Sache schwieriger. Trotzdem reichen elementare Methoden aus, um einen "Ursatz" zu beweisen, nämlich: U, W seien offene Mengen in $\mathbb{C}$, $\varphi: W \to \mathbb{C}$ eine stetige, offene Abb. und $T: H(U) \to C(W)$ eine additive Abbildung, die

$$T(if) = iT(f) \qquad \text{und} \qquad T(If) = \varphi \cdot T(f) \qquad \forall f \in H(U)$$

erfüllt, wobei I die Identitätsfunktion auf U bezeichnet. Dann hat T die folgende Form: für jedes $f \in H(U)$ ist

$$Tf = \begin{cases} (f \circ \varphi) \cdot T(\mathbb{1}) & \text{in } W \cap \varphi^{-1}(U) \\ 0 & \text{in einer (von } f \text{ abhängigen) Umgebung von } W \setminus \varphi^{-1}(U). \end{cases}$$

Als Korollar bekommt man den Satz von BERS, KAKUTANI und CHEVALLEY, daß T ein Ringisomorphismus von $H(U)$ auf $H(W)$ genau dann ist, wenn $Tf = f \circ \varphi$ $\forall f$ (bzw. $Tf = \overline{f \circ \overline{\varphi}}$ $\forall f$), wobei φ ein konformer Isomorphismus von W auf U (bzw. auf $\{\bar{z} : z \in U\}$) ist. Auch der folgende Satz von J. BECKER (1978) ist ein Korollar:

Die Abbildung Δ ist genau dann eine Ringderivation (d. h. $\Delta(fg) = f \cdot \Delta g + g \cdot \Delta f$ $\forall f, g$) auf $H(U)$ ist wenn $\Delta(f) = f' \cdot \Delta(I)$ $\forall f$ gilt.

R. B. Burckel

07/07/1993 Deformations of representations of hyperbolic lattices

M. Kapovich, University of Utah, USA

Let $\Gamma \subset PSL(2,\mathbb{C})$ be a lattice. Our aim is to understand the representation varieties $R(\Gamma, G) = \mathrm{Hom}(\Gamma, G)/G$ for various Lie groups G. We start with $G = SO(4,1)$, $\rho_0 : \Gamma \hookrightarrow SO(4,1)$ – natural inclusion. Conjecture: ρ_0 is locally rigid $\Leftrightarrow$ the orbifold $O = \mathbb{H}^3/\Gamma$ has no incompressible suborbifolds $O^2 \subset O$ which are not virtual fibers in fibration over S^1. We prove this to be true in the case of reflection groups and for infinitely many Dehn surgeries on 2-bridge knots. Our next problem – understand the generalization of bending deformations from the case of a "graph of groups" to a "~~complex~~ polygon of groups". In the case when $\Gamma \subset PSL(2,\mathbb{C})$ has a decomposition of this type the space of generalized bending deformations coinsides with the variety of solutions of the equation:

$g_1 \cdot \ldots \cdot g_n = 1$; $g_j \in G_j$ – maximal tori in $SO(3)$.

Another description of such variety can be made via representations of hyperbolic reflection groups $R \subset SO(2,1)$. On this way we prove that the representation variety has at worst quadratic singularities and compute their signatures. Finally we discuss the global structure of this variety in the case $n = 4, 5$.

Kapovich

09/07/1993

A representation associated with a finite group

Let G be a finite group, and let G^p be the smallest normal subgroup of G such that G/G^p is a p-group. Denote by $\mathcal{L}(G)$ the set of all sub-groups including G^p for some prime p, and put $\mathcal{M}(G) = \{H \mid H \leqq G \text{ and } H \notin \mathcal{L}(G)\}$. We define the real G-representation $V(G)$ by $V(G) = (\mathbb{R}[G] - \mathbb{R}) - \oplus_{p \mid |G|} (\mathbb{R}[G/G^p] - \mathbb{R})$. Then one has

<u>Theorem</u> $\mathcal{M}(G) = \mathrm{Iso}(G, V(G) \setminus \{0\})$.

Our study of $V(G)$ and $\mathcal{M}(G)$ presents the following applications.
these are answers to classical problems

<u>Theorem A</u> (with elementary proof) Let G be not of prime power order and let n be an arbitrary integer $\geqq 1$. Then there exists a G-map $S(2(\mathbb{R}[G] - \mathbb{R}) \oplus nV(G)) \longrightarrow S(2(\mathbb{R}[G] - \mathbb{R}))$.

<u>Theorem B</u> Let G be not of prime power order and let $n = 5(|G|-1) + m$ with $m \geqq 1$. Then G admits a smooth, fixed point free action on the euclidean space E^n such that E^H is diffeomorphic to E^k, $k = 5(|G/H| - 1) + m$, for each $H \in \mathcal{M}(G)$.

G is called an Oliver group if there never exists a normal series $P \lhd H \lhd G$ such that P and G/H are of prime power order and H/P is cyclic.

<u>Theorem C</u> Let G be an Oliver group and let l be an even integer $\geqq 6$. Then G admits a smooth, one fixed point action on S^n such that $T_x(S) \cong l\,V(G)$ $(x \in S^G)$, where

$$n = l\{(|G|-1) - \sum_{p \mid |G|} (|G/G^p| - 1)\}.$$

The key tool to proving Theorem C is the new equivariant surgery theory by A. Bak and myself.

Masaharu Morimoto
(Okayama, Japan)

16/07/1993

Dynamical and ergodic properties of subgroup actions on homogeneous spaces

G. Margulis, Yale University, USA

Let G be a locally compact group, Γ a lattice in G (i.e. a discrete subgroup with finite covolume), and H a closed subgroup in G. Consider the action of H on G/Γ by left translations. The classical case is when G is a connected Lie group and H is a one-parameter subgroup. Then there are two main possibilities: (a) H is diagonalizable over $\mathbb{R}$; (b) H is unipotent. In the case (a) the dynamical and ergodic properties of the action of H on G/Γ are approximately the same as for hyperbolic dynamical systems (positive entropy, Kolmogorov property and etc.) In the case (b) the situation is very different. The difference can be explained by the exponential divergence of the trajectories in the first case and by the polynomial divergence in the second one. During last 10-15 years it was realized that the study of the dynamic of the actions of unipotent groups on homogeneous spaces is closely related to some problems in number theory and Diophantine approximations. We discuss some of these connections.

Margulis

15 October 1993

On connections between Grayson's and Suslin's approaches to motivic cohomology

A. Nenashev (after A. Suslin), St. Petersburg, RUSSIA

Let $\mathcal{F}$: Schemes $\to$ ab. groups be a contravariant functor. Define singular homology of a scheme X with coefficients in $\mathcal{F}$ to be $H_*^{sing}(X;\mathcal{F}) = H_*(\mathcal{F}(X\times\Delta^\cdot))$ where $\Delta^\cdot = (d \mapsto \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[T_0,\dots,T_d]/(\Sigma T_i - 1))$ is the standard cosimplicial scheme.

Let $\mathcal{F}(X) := Gr^t(X)$ (resp. $Gr^t_\oplus(X)) = K_0(\mathcal{P}(X;\mathbb{G}_m^t))$ (resp. $K_0^\oplus(\mathcal{P}(X;\mathbb{G}_m^t))$, where $\mathcal{P}(X;\mathbb{G}_m^t)$ is the exact category whose objects are tuples $(P;\alpha_1,\dots,\alpha_t)$ with $P\in\mathcal{P}(X)$ a vector bundle on X, $\alpha_i\in \operatorname{Aut}P$, $\alpha_i\alpha_j=\alpha_j\alpha_i$; then we obtain Grayson's homology $H_*(X;Gr^t)$ (resp. $H_*(X;Gr^t_\oplus)$). Grayson proved that the chain complexes $Gr^{\wedge t}_\oplus(X\times\Delta^\cdot)$ (or, equivalently, simplicial abel. groups) are homotopy equivalent to the successive quotients of a certain filtration $K(X)=W^0\leftarrow W^1\leftarrow W^2\leftarrow\dots$ on the K-theory space $K(X)$, and therefore we have a spectral sequence of the Atiah-Hirzebruch type $E_2^{p,q}=H^{p-q}(X,\mathbb{Z}(-q))$ $\Rightarrow K_{-p-q}(X)$ with $H^i(X,\mathbb{Z}(t)) = H^{sing}_{2t-i}(X;Gr^{\wedge t}_\oplus)$.

On the other hand, let $\mathcal{F}(X) := Sus^t(X)$ = free ab. group on cycles in $X\times\mathbb{G}_m^t$ that are finite and surjective over X, and let $Sus^{\wedge t}(X) := Sus^t(X)/\Sigma\, \operatorname{im}(Sus^{t-1}(X))$ (By the way, $Gr^{\wedge t}$ is defined in the same way), then we obtain Suslin's singular homology $H_*^{sing}(X; Sus^{\wedge t})$.

<u>Theorem (Suslin).</u> Let R be a regular noetherian integrally closed domain, and $S=\operatorname{Spec}R$. Then there is a natural map $Gr^{\wedge t}(S)\to Sus^{\wedge t}(S)$. If $R=F[X_1,\dots,X_n]$, where F is a field, then this map is an isomorphism.

<u>Corollary.</u> We have a natural map of chain complexes $Gr^{\wedge t}(S\times\Delta^\cdot)\to$ $\to Sus^{\wedge t}(S\times\Delta^\cdot)$ which is an isomorphism if $R=F[X_1,\dots,X_n]$.

<u>Conjecture 1</u> This map is a quasiisomorphism for any regular noetherian ring or at least for any local regular ring.

<u>Conjecture 2.</u> The natural map $Gr^{\wedge t}_\oplus \to Gr^{\wedge t}$ ~~is a q~~ gives rise to a quasiisomorphism of complexes, at least for a field or a regular local ring.

These two conjectures would imply that we can transfer Atiah-Hirzebruch spectral sequence to Suslin's cohomology, which, in its turn, would be a good step towards the comparison of algebraic and topological K-theory of complex algebraic varieties.

A. Nenashev (Ненашев)

29/10/93

Trialität, Kompositionen und Algebren

M. A. Knus, ETH, Zürich

Sei $q(x) = x_1^2 + \cdots + x_4^2 - x_5^2 - \cdots - x_8^2$ die quadratische Form der Dimension 8 mit maximalem Index und seien SO_8, PSO_8, $Spin_8$ die zugehörenden klassischen Gruppen. Bekanntlich operiert die Permutationsgruppe S_3 auf $Spin_8$ und PSO_8 ("Trialität"). Eine explizite Beschreibung dieser Operation wird mit Clifford-Algebren beschrieben.

Die Kohomologie-Menge $H^1(Gal(F_s/F), PO_8(F_s))$, wo F_s der separable Abschluss von F ist ($char F \neq 2$), klassifiziert zentral einfache F-Algebren der Dimension 64 mit Involutionen vom orthogonalen Typ. Für eine solche Algebra gilt $(A \otimes F_s, \sigma \otimes 1) \simeq (End_{F_s}(V), \sigma_q)$, wobei σ_q die Involution ist, welche durch q bestimmt ist, i.e.

$$q(f(x), y) = q(x, \sigma_q(f)y).$$

Zu (A, σ) kann man eine Clifford-Algebra $C(A,\sigma)$ zuordnen; für $(A, \sigma) = (End_F V, \sigma_q)$ ist es die gerade Clifford-Algebra von q. Das Zentrum Z von $C(A,\sigma)$ ist quadratisch über F und falls $Z = F \times F$, hat (A, σ) triviale Diskriminante. Dann $C(A,\sigma) \simeq C^+(A) \times C^-(A)$ und beide Algebren $C^+(A)$, $C^-(A)$ sind zentral einfach der Dimension 64, mit orthogonalen Involutionen. Die Menge $H^1(Gal(F_s/F), PSO_8)$ klassifiziert Tripeln (A, B, C) von z.e. Algebren der Dimension 64 mit $C(A,\sigma) \simeq B \times C$. Die induzierte Operation von S_3 ist durch Permutation. Weiter werden die Objekten beschrieben, welche durch $H^1(Gal(F_s/F), PSO_8 \rtimes S_3)$ und $H^1(Gal(F_s/F), Spin_8 \rtimes S_3)$ klassifiziert sind. Im ersten Fall sind es spezielle z.e. Algebren über L, L eine separable kubische Erweiterung von F, welche im Zusammenhang mit Lie-Algebren vom Typ D_4 hängen. Im zweiten Fall, verallgemeinerte Kompositionen, welche bei exzeptionelle Jordan-Algebren vorkommen.

M.-A. Knus

4/11/93

The least field of definition of a subgroup of PSL_2

E.B. Vinberg, Moscow University

It is known (Vinberg, 1971), that for any Zarisky dense subgroup $\Gamma \subset PSL_2$ there exists the least field of definition, say, K_Γ, and that it is generated over $\mathbb{Q}$ by the numbers $\mathrm{tr}\, Ad(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$. In the talk, for $\Gamma = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_p \rangle$, a finite set of products of the traces

$$\mathrm{tr}\, \gamma_i, \quad \mathrm{tr}\, \gamma_i \gamma_j \ (i<j), \quad \mathrm{tr}\, \gamma_i \gamma_j \gamma_k \ (i<j<k)$$

is explicitly indicated, which generates K_Γ over $\mathbb{Q}$. The method includes investigating the $\mathbb{Q}$-algebra of polynomials on

$$(SL_2)^p = \underbrace{SL_2 \times \dots \times SL_2}_{p} = \{(X_1, \dots, X_p) : X_1, \dots, X_p \in SL_2\}$$

generated by the traces of the form

$$\mathrm{tr}\,(X_{i_1}^{\pm 1} \dots X_{i_k}^{\pm 1})^2,$$

and, in particular, proving that it coincides with the algebra of invariants

$$\mathbb{Q}[(PSL_2)^p]^{SL_2}$$

with respect to the action of SL_2 on $(PSL_2)^p$ by simultaneous conjugations.

Э. Винберг

5/11/93

Finitely generated subgroups of GL_2 and SL_2.

Kyoji Saito
RIMS, Kyoto University

We study a representation variety of a group Γ into $GL_2(R)$ and $SL_2(R)$ functorially for arbitrary commutative ring R with 1. Since R is not a field, standard technics for the invariants of a reductive group action fail. Nevertheless we can overcome difficulties. The idea is inspired by a work of H. Helling 1974, Inv., who showed that the Teichmüller space is a component of real affine algebraic variety.

Put $\quad \tilde{A}_2(\Gamma) := \mathbb{Z}[a(\gamma), b(\gamma), c(\gamma), d(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma] / I$

where I is the ideal $(\sigma(e) - I_2,\ \sigma(\gamma\delta) - \sigma(\gamma)\sigma(\delta),\ \gamma, \delta \in \Gamma)$ and $\sigma(\gamma) = \begin{pmatrix} a(\gamma), & b(\gamma) \\ c(\gamma), & d(\gamma) \end{pmatrix}$ for $\gamma \in \Gamma$. Of course, the algebra gives the representability: $\mathrm{Hom}_{gr}(\Gamma, GL_2(R)) \cong \mathrm{Hom}_{ring}(\tilde{A}_2(\Gamma), R)$, and the group scheme PGL_2 acts on $\tilde{A}_2(\Gamma)$ adjointly.

Let us introduce a "universal character ring" by

$$\tilde{R}_2(\Gamma) := \mathbb{Z}[s(\gamma), d(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma] / J$$

where $J = (s(e) - 2,\ d(e) = 1,\ d(\gamma\delta) = d(\gamma)d(\delta) = d(\delta)d(\gamma),\ s(\gamma\delta) + d(\gamma)s(\gamma^{-1}\delta) - s(\gamma)s(\delta)$ for $\gamma, \delta \in \Gamma$. Define a ring homomorphism $\tilde{R}_2(\Gamma) \to \tilde{A}_2(\Gamma)$ by $s(\gamma) \mapsto \mathrm{tr}\,\sigma(\gamma)$ and $d(\gamma) \mapsto \det \sigma(\gamma)$ whose images are in the invariant subring. Let $\pi : \mathrm{Spec}\,\tilde{A}_2(\Gamma) \to \mathrm{Spec}\,\tilde{R}_2(\Gamma)$ be the associated morphism. Define also a closed subscheme $\tilde{V} := \bigcap_{\alpha, \beta \in \Gamma} \{ s(\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}) - 2 = 0 \}$ in $\mathrm{Spec}\,\tilde{R}_2(\Gamma)$. It is easy to see that $\pi^{-1}(\tilde{V})$ consists of representations either abelian or reducible. Then we have:

<u>Theorem</u> The restriction $\pi| : \mathrm{Spec}\,\tilde{A}_2(\Gamma) \setminus \pi^{-1}(\tilde{V}) \to \mathrm{Spec}\,\tilde{R}_2(\Gamma) - \tilde{V}$ is a universal principal PGL_2-bdle w.r.t. the etal topology. In particular, $\mathrm{Spec}\,\tilde{R}(\Gamma) - \tilde{V}$ is the universal geometric quotient variety of the space of non-abelian and irreducible representations of Γ into GL_2.

The same statements follows also for representations of Γ into SL_2 by replacing the rings $\tilde{A}_2(\Gamma)$ and $\tilde{R}_2(\Gamma)$ by their quotient rings $A_2(\Gamma)$ and $R_2(\Gamma)$ divided by the augumentation ideal generated by $d(\gamma) - 1$ for $\gamma \in \Gamma$.

Kyoji
斎藤恭司
京都大学数理解析研究所

12/11/93

Weil-Uniformisierungen und Fundamentalbereiche arithmetischer Gruppen über Funktionenkörpern

Ernst-Ulrich Gekeler
Universität des Saarlandes

Wir betrachten den Zusammenhang zwischen arithmetischen Untergruppen $\Gamma \subset \Gamma(1) = GL(2,A)$ ($A = \mathbb{F}_q[T]$, $\mathbb{F}_q$ endl. Körper) und der Klassifikation elliptischer Kurven E/K ($K = \mathbb{F}_q(T)$) sowie der Uniformisierung Drinfeld'scher Modulkurven M_Γ über der ∞-adischen Komplettierung K_∞ von K. In diesem Kontext gilt die folgende Aussage, die ein Analogon zur Vermutung von Shimura, Taniyama und Weil darstellt:

Ist E/K elliptische Kurve mit (a) E/K_∞ = Tate-Kurve, (b) der „endliche" Teil des Führers von E ist (n) ($n \in \mathbb{F}_q[T]$ nichtkonstant), so ist E Isogeniefaktor von J_Γ = Jacobische der Modulkurve M_Γ zu $\Gamma = \Gamma_0(n) = \{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \mid c \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ n)\}$

Die Kohomologie solcher Modulkurven ist einfach durch die Kohomologie des Quotienten $\Gamma\backslash\mathcal{T}$ des Bruhat-Tits-Baums $\mathcal{T}$ von $PGL(2,K_\infty)$ ausdrückbar, was eine Klassifikation aller E/K mit (a), (b) ermöglicht, d.h. zu gegebenem n können alle E bis auf Isogenie explizit bestimmt werden.

Die Jacobische J_Γ besitzt über K_∞ eine Darstellung als Quotient eines Torus $\mathbb{G}_m^g$ modulo eines Gitters $\Lambda \cong \mathbb{Z}^g$. Ergebnisse von Raynaud und Reversat-G. erlauben die Berechnung der Gruppe der Zusammenhangskomponenten des Néron-Modells sowie der Ordnung $v(t)$ einer „starken Weil-Kurve" $E/K_\infty = \mathrm{Tate}(t)$ durch Daten des (leicht berechenbaren) Graphen $\Gamma\backslash\mathcal{T}$.

Ernst-Ulrich Gekeler

19/11/93

Garbentheorie auf dem Bruhat-Tits-Gebäude

Peter Schneider
Universität zu Köln

Sei K ein lokalkompakter nichtarchimedischer Körper und G die Gruppe der K-rationalen Punkte einer zushgden reduktiven K-Gruppe. Das Bruhat-Tits-Gebäude X zu G ist ein lokalkompakter Raum mit

- einer Metrik, bzgl. welcher eindeutige Geodätische existieren,
- einer d-dim. (d := halbeinfacher K-Rang von G) lokal endlichen CW-Struktur (die Zellen sind Polysimplizes und heißen Seiten F)
- einer isometrischen und zellulären G-Aktion.

Wir (= Stuhler + S.) wollen die glatte Darstellungstheorie von G mit Hilfe von Objekten auf X untersuchen. Dazu werden zunächst "gute" Filtrierungen

$$P_F^+ \supseteq U_F^{(0)} \supseteq \dots \supseteq U_F^{(e)} \supseteq \dots$$

der Stabilisatoren P_F^+ der Seiten von X konstruiert. Zu fester glatter G-Darstellung V und festem $e >> 0$ genügend groß kann man dann die Invarianten $V^{U_F^{(e)}}$ bzw. Coinvarianten $V_{U_F^{(e)}}$ benutzen, um ein Koeffizientensystem $\gamma_e(V)$ bzw. eine Garbe $\underset{\sim}{V}$ auf X zu konstruieren. Für irreduzibles V lassen sich Homologie von $\gamma_e(V)$ und Cohomologie mit kompaktem Träger von $\underset{\sim}{V}$ berechnen. Erstere ist stets trivial. Dies liefert kanonische projektive Auflösungen in der Kategorie der G-Darstellungen. Es liefert auch eine Dualitätstheorie auf der derivierten Kategorie der Darstellungen endlicher Länge.

Weiter hat diese Theorie Anwendungen auf die harmonische Analysis von G. Zu jedem irreduziblen V lassen sich sehr explizit Funktionen f_{EP}^V, lokal konstant mit kompaktem Träger, auf G konstruieren ("Euler-Poincaré-Funktionen") mit einer Reihe nützlicher Eigenschaften. Zum Beispiel geben ihre elliptischen Orbitalintegrale die Werte der Charakterfunktion zu V. Hieraus folgt dann eine Hopf-Lefschetz-Spurformel für den Charakterwert $\Theta_V(h)$ als Spur von h auf der Cohomologie der Fixpunktmenge X^h mit Koeffizienten in der Garbe $\underset{\sim}{V}$ für elliptisches h (diese Cohomologie ist endlich dimensional!).

P. [illegible]

26.11.93

On the distribution of subgroups normalized by a given subgroup

Alexei Stepanov

Electrotechnical University of S.-Petersburg.

A great number of results on the distribution of subgroups in G containing a given ~~subgroups~~ D or normalized by D is subject to a single principle. Namely, a whole lattice of subgroups under consideration is divided into intervals in such a manner that factorgroups of the upper bound of each interval modulo the lower one provides complete information on the distribution of those subgroups.

For example we have in linear groups following patterns of this kind of distributions:

a) parabolic subgroups of semisimple algebraic groups (all those subgroups are selfnormalized and not conjugate);

b) subgroups of Chevalley groups over fields containing split maximal torus (all factorgroups are sections of $N_G(D)/D$);

c) subgroups of classical groups over a commutative ring containing a subgroup of elementary block-diagonal matricies;

d) subgroups of Chevalley groups over commutative rings normalized by the elementary subgroup.

We introduce the condition of strong polynormality. Namely, D is strongly polynormal in G if $\forall H \leq G : [[H, D], D] = [H, D]$. Let P be D-perfect in G if $[P, D] = P$ and let P_α $(\alpha \in \mathcal{A})$ be all D-perfect subgroups in G. Then, clearly, D is strongly polynormal in $G \Leftrightarrow \forall H \leq G$ normalized by D $\exists! \alpha \in \mathcal{A}$ such that $P_\alpha \leq H \leq C_\alpha$ wher C_α is the largest subgroup with the property $[C_\alpha, D] = P_\alpha$. Now, with help of group theoretical calculations we can for example unite patterns (c), (d) by establishing the strong polynormality of subgroup D of elementary block-diagonal matricies in a classical group and the "standard" family of D-perfect subgroups.

АВС

3.12.93

Topologische Hochschild Homologie und MacLane Homologie

Rainer Vogt
Universität Osnabrück

Bökstedt führte 1985 den topologischen-Hochschild-Homologie-Funktor ein, indem er im wesentlichen Ringe durch Ringspektren, Moduln durch Modulspektren und $\otimes_{\mathbb{Z}}$ durch das Smashprodukt ersetzte. Dieser Funktor verhält sich zu Waldhausens Algebraischer K-Theorie topologischer Räume wie klassische Hochschild-Homologie zur klassischen Algebraischen K-Theorie.
Es war eine Überraschung, als T. Pirashvili 1990 die Vermutung aufstellte, daß Bökstedts THH für klassische Ringe R nichts anderes als die von MacLane 1956 eingeführte Homologie $H_*^{ML}(R)$ ist.
Pirashvili und Waldhausen bewiesen Ende 1990 diese Vermutung, indem sie nachwiesen, daß der Funktor THH eine Reihe von Axiomen erfüllt, die H_*^{ML} charakterisieren.
Ziel des Vortrags ist es, in der Sprache der "Algebra über topologischen Räumen", genauer, der Algebra von Spektren, einen kurzen heuristischen Beweis dieser Vermutung anzugeben, der überdies eine Vergleichsabbildung zwischen den beiden Funktoren liefert. Dieser heuristische Beweis läßt sich mit den Methoden von Bökstedt in eine exakte Form bringen.

Rainer Vogt

10.12.93

Rationality problem for algebraic groups

Alexander Merkurjev
St-Petersburg State University

Let F be a field and G be connected linear algebraic group defined over F. How to determine whether the variety of the group G is rational?

The group G is called <u>R-trivial</u> if for any field extension L/F ~~and~~ all L-points of G are R-equivalent to 1.

<u>Proposition</u> (Colliot-Thélène, Sansuc). If G is a rational group then G is R-trivial.

The group of R-equivalence classes $G(F)/R$ can be computed in the following two cases:

(I) Let A be a central simple algebra over a field F, $G = SL_1(A)$. Voskresenskii has calculated: $G(F)/R = SK_1(A) = G(F)/[A^\times, A^\times]$.

<u>Conjecture</u> (Suslin). The group $G = SL_1(A)$ is R-trivial iff the index of A is a square-free.

<u>Theorem 1</u>. If $\operatorname{ind} A$ is divisible by 4 then $G = SL_1(A)$ is not R-trivial.

(II). Let $\operatorname{char} F \neq 2$ and q be non-degenerate quadratic form over F, $G = PSO(q)$ = projective special orthogonal groups. Then $G(F)/R = G(q)/F^{\times 2} \cdot \prod N_{E/F}(E^\times)$, where $G(q) = \{a \in F^\times : aq \simeq q\}$ and the product is taken over all finite field extensions E/F such that q is hyperbolic over F.

Denote by $C_0(q)$ the even Clifford algebra of q.

<u>Theorem 2</u> If $d = \operatorname{disc}(q) \notin F^{\times 2}$ and $\operatorname{ind} C_0(q) \geq 4$ then the group $G = PGO(q)$ is not R-trivial.

Merk

17.12.93

Zum Umkehrproblem der Galoistheorie

W.D. Geyer, Erlangen

Das Umkehrproblem der Galoistheorie fragt nach der Struktur der absoluten Galoisgruppe $G_K = Gal(\bar{K}|K)$ eines Körpers K, oder etwas schwächer, nach der Menge der endlichen Faktorgruppen von G_K, d.h. die Frage, welche endlichen Gruppen als Galoisgruppen über K realisierbar sind. Dies ist ein sehr aktuelles Forschungsgebiet, die klassische Frage ($K = \mathbb{Q}$) hat in den letzten 20 Jahren viele Teilantworten erfahren, von einer Lösung ist man heute aber noch weit entfernt.
In gewissen Fällen hat man vollständige Antworten: Ist K ein algebraischer Funktionenkörper über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k, also der Funktionenkörper einer algebraischen Kurve $\mathcal{C}$ über k, so ist G_K eine freie proendliche Gruppe vom Rang $\# k$. Für $k = \mathbb{C}$ ist das ein klassisches Resultat aus der Überlagerungstheorie Riemannscher Flächen (G_K ist der projektive Limes aller Monodromiegruppen endlicher [verzweigter] Überlagerungen von $\mathcal{C}$, und die letzteren kennt man aus der Topologie), für char $k=0$ überträgt sich das via „Lefschetz"-Prinzip, und für char $k = p$ ist das ein ganz neues Ergebnis von F. Pop, das mittels rigider analytischer Methoden bewiesen wird. Bereits Hilbert benutzte 1892, als er in einer berühmten Arbeit den ersten Baustein zum Umkehrproblem der Galoistheorie legte, die geometrische Theorie der Überlagerungen Riemannscher Flächen, um die alternierenden Gruppen A_n als Galoisgruppen über $\mathbb{Q}$ zu erkennen. Das Bindeglied zwischen Zahlentheorie und Geometrie ist der ebenfalls in dieser Arbeit zu findende Hilbertsche Irreduzibilitätsatz, der ein zentrales Hilfsmittel der heutigen Bearbeitung des Umkehrproblems der Galoistheorie ist.
Im Vortrag wird über zwei Arbeiten berichtet, die ausnahmsweise ohne Hilberts Irreduzibilitätsatz auskommen. Zum einen (Zusammenarbeit mit M. Jarden) werden nilpotente Gruppen G als Galoisgruppen über arithmetischen Funktionenkörpern realisiert, sofern für keinen Primteiler ℓ der Gruppenordnung die ℓ^{ten} Einheitswurzeln im Grundkörper sind. Die Bedingung an diese ℓ bewirkt, daß die Verzweigung der Erweiterung so genau kontrolliert werden kann, daß man das Geschlecht der überlagernden Kurve abschätzen kann. Zum anderen (Zusammenarbeit mit Jensen) werden Prodiedergruppen über endlich erzeugten Körpern studiert und offene Fragen diskutiert.

W.D. Geyer