6.01.95. The metaplectic kernel for algebraic groups over number fields

A. Rapinchuk

This talk is devoted mainly to the results obtained in a recent joint work with G. Prasad. Let G be a simple simply connected algebraic group defined over an algebraic number field K. For a finite (possibly, empty) set S of places of K, let $A(S)$ denote the ring of S-adèles (i.e. adèles without the components corresponding to places in S). Then the metaplectic kernel is defined as follows:

$$M(S,G) = \mathrm{Ker}\,\left(H^2(G(A(S))) \to H^2(G(K))\right).$$

Here $H^2(*)$ stands for $H^2(*, I)$ where $I = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ regarded as trivial module. Moreover, $H^2(G(A(S)))$ is the second cohomology group defined via measurable cochains which can be replaced by continuous ones in the main case when S contains all archimedian places. The topology on $G(K)$ in this definition is assumed to be discrete. The elements of $M(S,G)$ are in one-to-one correspondence with the equivalence classes of central topological extensions $1 \to I \to E \xrightarrow{\pi} G(A(S)) \to 1$ splitting over $G(K)$. In this interpretation, $M(S,G)$ is closely related to computation of the congruence kernel in the congruence subgroup problem for S-arithmetic subgroups of G. On the other hand, the case $S = \phi$ is of importance for the theory of adelic automorphic forms. The following result yields practically a complete description of $M(S,G)$. Assume for simplicity that S contains all archimedian places.

Theorem 1. If S contains a place v_0 which is either non-archimedian such that G is K_{v_0}-isotropic, or is real such that $G(K_{v_0})$ is not topologically simply connected, then $M(S,G)$ is trivial. Otherwise, $M(S,G)$ is isomorphic to a subgroup of $\hat{\mu}(K)$, the dual group to the group of all roots of unity in K.

We can prove the same result without the assumption that S contains all archimedian places, for all groups except for some forms of types ${}^2A_n$ and ${}^2E_6$.

Corollary 1. (Weak metaplectic conjecture). For a finite set V of places, let $G(K,V) = \prod_{v \in V} G(K_v)$. If either V consists entirely of non-archimedian places, or G is not of type ${}^2A_n$ or ${}^2E_6$, then the restriction map $H^2(G(K,V)) \to H^2(G(K))$ is injective.

This Corollary is used to solve in the positive the congruence subgroup problem over semi-local subrings of K. For a finite set V of non-archimedian places let $O_V = \{a \in K \mid v(a) \leq 1 \text{ for all } v \in V\}$.

Theorem 2. Suppose that $G(K)$ has the standard description of normal subgroups (i.e. satisfies the Platonov-Margulis conjecture), and that V contains all non-archimedian anisotropic places for G. Then the congruence subgroup problem for $G(O_V)$ has positive solution, i.e. every non-central normal subgroup in $G(O_V)$ is V-adically open, or equivalently, the corresponding congruence kernel is trivial.

A. Rap.

13.01.1995 Kleinsche Gruppen und polymorphe Funktionen

Sei Γ eine Fuchssche Gruppe in $\mathbb{H}^{\pm} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \gtrless 0\}$ und G eine Kleinsche Gruppe. R. Hidalgo und ich betrachten eine polymorphe Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \to \Omega(G) \quad (\text{Diskontinuitätsmenge von } G),$$

so daß gilt

$$\forall \gamma \in \Gamma \ \exists g \in G : \quad f \circ \gamma = g \circ f.$$

Wenn G nichtelementar ist, und $0, 1, \infty \in \Lambda(G) = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega(G)$ gilt, so zeigen wir, daß $\overline{f(\bar{z})} = f(z)$ und $\Lambda(G) \subset \mathbb{R}$ gilt.

Wir setzen voraus, daß

(i) Γ vom Divergenztyp

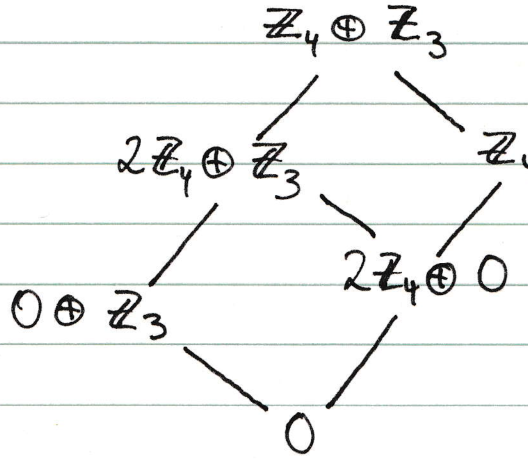
(ii) $\Omega(G)$ nicht zusammenhängend ist

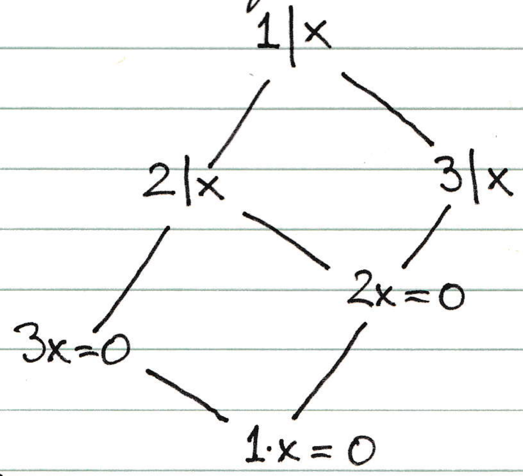
ist. Wir müssen offenlassen, ob (i) und (ii) wirklich notwendig sind. Insbesondere (ii) ist beweisbedingt.

Ch. Pommerenke (TU Berlin)

20.1.95 Neuere algebraische Anwendungen einer modelltheoretischen Dualität für Moduln

Betrachtet man die abelsche Gruppe $A = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3$ (wobei $\mathbb{Z}_n$ für $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ steht), stellt man schnell fest, daß alle ihre Untergruppen von der Form kA oder $A[k] = \{a \in A : ka = 0\}$ sind ($k \in \mathbb{N}$). Alle Untergruppen von A sind also Lösungsmengen einer Formel der Form $k|x$ oder einer Formel der Form $kx = 0$. Bildlich dargestellt:





Macht man nun das einfache Experiment, eine durch $kx = 0$ definierte Untergruppe (d.h., $A[k]$) auf die durch $k|x$ definierte (d.h., kA) abzubilden und umgekehrt, so ergibt sich ein zum ursprünglichen Verband antiisomorpher Verband, gewissermaßen der alte Verband auf den Kopf gestellt.

Was hinter diesem Phänomen steht, ist die sog. elementare Dualität, wie sie von Mike Prest um 1984 für gewisse, sog. positiv primitive Formeln für Links- und Rechtsmoduln über einem fixierten Ring eingeführt wurde. Prest selbst benutzte diese Methode in einem Problem aus der Darstellungstheorie, und es war Ivo Herzog, der um 1989 deren volle Tragweite feststellte.

Im Vortrag wird sie für eine neue Beschreibung der sog. Mittag-Leffler-Moduln benutzt, die neben eleganten

Beweisen alter Resultate die Lösung bis dato offener Probleme (u.a. von Facchini) erlaubt.
Eine weitere Anwendung betrifft die Untersuchung gewisser nichtkommutativer „Prüferringe", wie sie von Warfield betrachtet wurden (gemeinsam mit G. Puninski und M. Prest). Dabei enthüllt die elementare Dualität gewisse Symmetriephänomene, die bis dahin verborgen geblieben sind.

Philipp Rothmaler (Kiel)

27. I. 1995

Harmonic functions on Siegel domains.

This is to report on some recent work of Ewa Damek, Andrzej Hulanicki and Richard Penney concerning harmonic functions on Siegel domains.

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_1}$ be a regular cone, i.e. non-empty open convex cone Ω with vertex at 0 and containing no entire straight line. Given a regular cone Ω in $\mathbb{R}^{n_1}$, we say that a Hermitian bilinear map $\Phi: \mathbb{C}^{n_2}\times\mathbb{C}^{n_2}\to\mathbb{C}^{n_1}$ is Ω-positive, if $\Phi(z_2,z_2)\in\overline{\Omega}$ for $z_2\in\mathbb{C}^{n_2}$ and $\Phi(z_2,z_2)=0$ implies $z_2=0$. The domain $D=\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^{n_1}\times\mathbb{C}^{n_2}: \operatorname{Im} z_1 - \Phi(z_2,z_2)\in\Omega\}$ is a Siegel domain determined by Φ and Ω. Two groups of biholomorphic mappings of D onto itself are considered. $N(\Phi)=\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{C}^{n_2}$ with multiplication $(x',z')(x'',z'')=(x'+x''+2\operatorname{Im}\Phi(z',z''), z'+z'')$ and $A=\mathbb{R}^+\times\ldots\times\mathbb{R}^+$ acting on $\mathbb{R}^{n_1}$ by dilations and extended to $\mathbb{C}^{n_1}$ and $\mathbb{C}^{n_2}$ in such a way that $a\Phi(z_2,w_2)=\Phi(az_2,aw_2)$. $N(\Phi)$ acts on D by $(x,u)(z_1,z_2)=(z_1+x+2i\Phi(z_2,u)+i\Phi(u,u), z_2+u)$. Hardy spaces $H^p(D)$ are defined as follows. $H^p(D)$ is the set of all holomorphic $F: D\to\mathbb{C}$ such that $\|F\|^p_{H^p(D)}=\sup_{t\in\Omega}\int_{N(\Phi)}|F((x,u)(it,0))|^p\,dx\,du<+\infty$. $H^2(D)$ is a Hilbert space which has the reproducing kernel $S(w,z)$: $F(w)=(S(w,\cdot),F)_{H^2}$. If $F\in H^p$ we write $F_t((x,u))=F((x,u)(it,0))$, where $(x,u)\in N(\Phi)$ and $t\in\Omega$. The limit $\lim_{t\in\Omega}F_t=F_0$ exists in $L^p(N(\Phi))$. Moreover, $F(z)=\int_{N(\Phi)}S_0(z,(x,u))F_0((x,u))\,dx\,du$ for $F\in H^2(D)$. In 1962 Hua introduced the corresponding Poisson kernel $P(z,(x,u))=\frac{|S_0(z,(x,u))|^2}{S(z,z)}$. Our first theorem is this: for every $f\in L^p(N(\Phi))$, $p>1$, we have $\lim_{t\to 0 \text{ admissibly}}\int P((y,w)(it,0),(x,u))f(x,u)\,dx\,du=f(y,w)$ a.e.

<u>Theorem 2</u>. Let $D=M+i\Omega$, where M are real $n\times n$ symmetric matrices, $\Omega\subset M$, positive definite matrices. There exists an elliptic differential operator L on D such that bounded L-harmonic functions on D are ~~pr~~ precisely the Poisson-Hua integrals of L^∞ functions on $N(\Phi)=M$.

Andrzej Hulanicki
Institute of Mathematics
Wrocław University
Pl. Grunwaldzki 2/4 Breslau, Poland

3.2.95

Galois-Darstellungen zu Drinfeld Moduln

1) Ein klassisches Resultat von Serre besagt: Sei E eine elliptische Kurve über einem Zahlkörper K, sei ℓ eine rationale Primzahl und sei Γ das Bild von $\mathrm{Gal}(\bar K/K)$ in der Darstellung auf den Tate-Modul $T_\ell E = \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell, E(\bar{\mathbb{Q}})) \cong \mathbb{Z}_\ell^2$. Wenn $\mathrm{End}_{\bar K}(E) = \mathbb{Z}$ ist, so folgt: Γ ist offen in $GL_2(\mathbb{Z}_\ell)$.

2) Die Mumford-Tate-Vermutung ist eine Verallgemeinerung dieses Satzes.
Sei A eine abelsche Varietät über K. Sei eine Einbettung $K \hookrightarrow \mathbb{C}$ fixiert, dann ist $A(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^g/\Lambda$ für ein kokompaktes $\mathbb{Z}$-Gitter Λ. Die komplexe Struktur entspricht der Angabe einer Darstellung $\mathbb{C}^* \to \mathrm{Aut}(\Lambda\otimes\mathbb{R})$. Die Mumford-Tate-~~Vermutung~~ Gruppe $MT(A)$ ist die kleinste über $\mathbb{Q}$-definierte algebraische Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\Lambda\otimes\mathbb{Q}) \cong GL_{2g,\mathbb{Q}}$, so daß $\mathbb{C}^*$ in $MT(A)(\mathbb{C})$ zu liegen kommt. Der Tate-Modul $T_\ell A$ ist kanonisch $\cong \Lambda\otimes\mathbb{Z}_\ell$, deshalb kann man das Bild Γ von $\mathrm{Gal}(\bar K/K)$ mit der Mumford-Tate-Gruppe vergleichen.
Vermutung: Eine geeignete offene Untergruppe von Γ ist offen in $MT(A)(\mathbb{Q}_\ell)$.
Der Beweis der Tate-Vermutung von Faltings war ein wesentlicher Schritt in diese Richtung.
Ein neueres Ergebnis von Serre ist der Beweis der M.T. Vermutung für $\dim(A)$ ungerade und $\mathrm{End}_{\bar K}(A$

3) Eine Lösung des analogen Problems für Drinfeld Moduln ist in Sicht.
Sei $\mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper mit q Elementen. Ein Drinfeld Modul über einem Körper $F/\mathbb{F}_q$ ist (im einfachsten Fall) ein $\mathbb{F}_q$-Ring-Homomorphismus $\varphi: A := \mathbb{F}_q[T] \to F\{\tau\}$; hierbei ist $F\{\tau\} \cong \mathrm{End}_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{G}_{a,F})$ der nicht-kommutative Polynomring über F mit Kommutationsregel $\tau x = x^q\tau$, und τ operiert auf $\mathbb{G}_{a,F}$ durch $x \mapsto x^q$.
Für ein Ideal $I = (f) \subset A$ ist $\ker(\varphi(f))(\bar F) \cong (A/I)^r$ sofern $\frac{d}{dx}\varphi(f)(x) \in F$ ungleich null.
(Schreibe $\varphi(T) = u_0 + u_1\tau + \dots + \overset{\neq 0}{u_r}\tau^r$, dann ist $\frac{d}{dx}\varphi(f)(x) = f(u_0)$.)
Sei jetzt $u_0 \in F$ transzendent. Dann ist $f(u_0) \neq 0$ für jedes $0 \neq f \in A$.
Für ein Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ ist der Tate Modul $T_\mathfrak{p}\varphi := \mathrm{Hom}_{A_\mathfrak{p}}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{p}^{-n}/A, \bigcup_{n=1}^{\infty} \ker(\varphi(\mathfrak{p}^n))\right) \cong (A_\mathfrak{p})^r$. Hierauf operiert dann $\mathrm{Gal}(\bar F/F)$. Sei Γ dessen Bild in $GL_r(A_\mathfrak{p})$.
Satz: Sei $u_0 \in F$ transzendent, $\mathrm{End}_{\bar F}(A) = A$, und F endlich erzeugt über $\mathbb{F}_q$.
Dann ist Γ offen in $GL_r(A_\mathfrak{p})$.

4) Wichtiger Teil des Beweises sind ~~der~~ der Beweis der Tate-Vermutung für Drinfeld Moduln (von Taguchi, Tamagawa) sowie die Klassifikation von kompakten Zariski-dichten Untergruppen von $SL_r(A_\mathfrak{p})$.

Richard Pink
Universität Mannheim

10.2.35

On homogeneous spaces of rank one

Let G/H be an arbitrary homogeneous space of a connected reductive group G. The Embedding theory tries to describe all possible embeddings of G/H up to ~~the~~ a G-isomorphism. It turns out that two integers are of great importance in these questions. The first one is the complexity of G/H and the second one is the rank.

Definition $c(G/H) = \operatorname{tr.deg} k(G/H)^B$ is called the complexity of homogeneous space G/H (here $B \subset G$ is a Borel subgroup)

In order to define rank, consider the subset $k(G/H)^{(B)}$ of all B-semiinvariant functions of the field $k(G/H)$. For each $f \in k(G/H)^{(B)}$, let $\lambda_f \in \mathfrak{X}(B)$ be the corresponding character. The set $\{\lambda_f \mid f \in k(G/H)^{(B)}\}$ is a subgroup of $\mathfrak{X}(B)$. The rank of this (free abelian) group is called the rank of G/H. It will be denoted by $r(G/H)$

Theorem 1 Let $r(G/H) = 0$. Then H is parabolic and hence $c(G/H) = 0$. $\boxed{\;}$

Since G/P is complete, when H is parabolic, it has no non-trivial embedings. Consider the following case: homogeneous spaces of rank one. The spherical ones (i.e. that of complexity zero) were investigated by Brion, Akhiezer, Huckleberry. For instance, they obtained a characterization of this spaces in terms of completions, i.e. complete embeddings. My results concern homog. spaces of rank 1 without conditions [sphericality].

Theorem 2 Let $r(G/H) = 1$. Then $c(G/H) \leq 1$. Moreover, if $c(G/H) = 1$, then G/H is obtained from 3-dim. homogeneous space of SL_2 by inducing.
(This means, there exist a parabolic subgroup $Q \subset G$ and a surjective homomorphism $Q \xrightarrow{\varphi} SL_2$ s.t. $H = \varphi^{-1}(F)$ for some finite $F \subset SL_2$) $\boxed{\;}$

The following is an embedding characterization of homog. spaces of rank one.

Theorem 2 The following conditions are equivalent:

(1) $r(G/H) = 1$.

(2) there exists a completion $G/H \hookrightarrow X$ s.t. the boundary $\partial X := X \setminus (G/H)$ is a divisor consisting of closed orbits. $\boxtimes$

The proofs of these theorems rely on some general methods of computing complexity and rank for actions of reductive groups.

Dmitri Panyushev
Moscow Radioelectronics & Automation Inst.
(z.Z. Bochum)

17.02.95. Endomorphism rings of modules and linear groups over rings.

1. Description of isomorphisms of linear groups over rings.

2. Isomorphisms and antiisomorphisms of endomorphism rings of strong generators (in particular, isomorphisms and antiisomorphisms of rings of matrices).

3. Generalised polynomial identities in rings:
a) Lie isomorphisms of skewelements of prime rings with involution;
b) Kegel type problem for PI-rings.

Alexander V. Mikhalev
Moscow State University,
Department of Mechanics and Mathematics.

21.04.95

Brauer groups of local elliptic and hyperelliptic curves and central division algebras over their function fields.

V. Yanchevskii. Institute of Math. Acad. Sci, Belarus, Minsk.

Let k be a local field of char $k = 0$. Despite of impressive achivements of multidimensional class field theory so far it is very little known about finite-dimensional division central algebras over function fields of projective smooth varieties of X defined over k. ~~Even~~ Even in the case of curves X, where k is a finite extension of $\mathbb{Q}_p$ there is no a complete (and explicit) description of such algebras. The first step in direction of obtaining such a description is an attempt to try to investigate the unramified subgroup $Br_{nr}\, k(X)$ of $Br\, k(X)$, where $k(X)$ is the function field of a curve$X$. The goal of the talk is to give an abstract characterization of abelian group $Br_{nr}\, k(X)$ in case of local elliptic curves X and to give an explicit description of all central division algebras which ~~are~~ represents all elements of 2-torsion part of $Br_{nr}\, k(X)$, in case of local elliptic curves X and a hyperelliptic ones with good reduction.

27.04.95

What is and what should be
"higher dimensional algebra"?
Ronald Brown, University of Wales, Bangor

This talk gives background motivation to a talk given here in 1986. This will be justified in that the intuitive ideas may last longer than the technical results and constructions (e.g. non abelian tensor products of groups) there described.

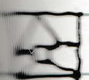
The aim has been, since the mid 1960's, to generalise group theory to all dimensions so as to obtain more calculations in homotopy theory, in the first instance. Once this proves the methods work, the aim is to investigate the wider applications of such a theory in mathematics and science.

The type of problems considered are local-to-global problems. So one expects to move

linguistic model of geometry $\longrightarrow$ algebra $\longrightarrow$ computation $\downarrow$ geometry

But for local-to-global problems, a key ingredient is subdivision. So the basic approach comes under the slogan:

"Find algebraic inverses to subdivision"

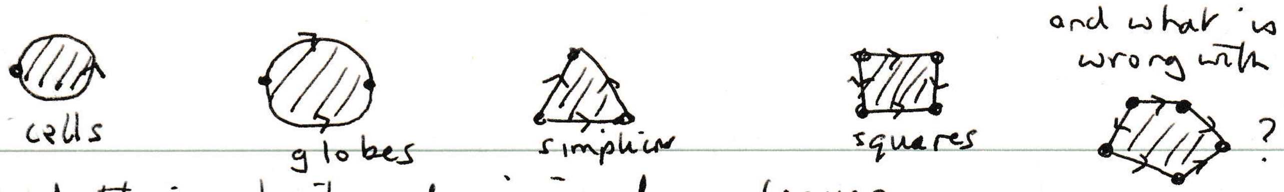

Sample?

This leads to the idea of freeing mathematics from the dependence on a linear notation and on compositions which are always defined.

Instead one seeks to describe algebraic structures made up of elements whose inter-relations and compositions, and the axioms on these, are given by geometric considerations.

*

In homotopy theory one is faced by the puzzle of the variety of building blocks from which such a theory might be made. They might be:



and their higher dimensional analogues.

It turns out that these figures correspond to equivalent universes in which "higher dimensional group theory" can be formulated. The equivalence between these theories (each expressed as a category of algebraic objects) allows algebraic transformations between different geometries. In particular, a tautology in one theory becomes a non-trivial relation in another. This is what leads to computation.

[Example: The homotopy 2-type of $B\mathbb{Z}_{n^2} \cup CB\mathbb{Z}_n$ is described by the generator of $H^3(\mathbb{Z}_n, A_n)$, where A_n is a $\mathbb{Z}_n$-module, and this group is cyclic of order n. So we want some very specific answers! The interest is that, in this instance, the philosophy leads to new computations in homotopy theory, requiring, in fact, the analysis of new algebraic constructions.]

My own interest has concentrated on the extensions

groups $\subseteq$ groupoids $\subseteq$ multiple groupoids.

It is now a commonplace that there are many geometric situations where groups are inadequate, or where the insistence on their use leads to technical complications.

I should mention that many others are studying different structures of the form of "higher dimensional algebra". There are braided monoidal categories for studying braid groups; various categories of knots and tangles; the attempts to define "weak ∞-categories" by physicists with an interest in theories of gravitation. There seems to be considerable agreement that the matters indicated in (*) above will enable, have enabled, new mathematics and new applications. Fortunately, there are many dimensions also of interpretation of (*).

R Brown.

5.5.95 L^2-Betti Zahlen W. Lück, Mainz

L^2-Betti Zahlen wurden von Atiyah im Zusammenhang mit seinem L^2-Index Theorem eingeführt. Man kann sie für Riemannsche Mannigfaltigkeiten über die Spur des Wärmeleitungskernes der universellen Überlagerung definieren. Allgemeiner definiert man die p-te L^2-Betti Zahl eines endlichen CW-Komplexes X als

$$b_p^{(2)}(X) = \dim_{\mathcal{N}(\pi)} C_*^{(2)}(X) \quad \in \mathbb{R}^{\geq 0}$$

wobei $\dim_{\mathcal{N}(\pi)}$ die Dimension der von Neumann Algebra der Gruppe und $C_*^{(2)}(X)$ der L^2-Kettenkomplex ist, d.h. die Hilbert Komplettierung von $C_*(\tilde{X})$. Folgende Vermutungen sind bis heute ungelöst:

Singer Vermutung: M Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nicht-negativer Schnittkrümmung. Dann gilt

$$b_p^{(2)}(M) = 0 \quad \text{für } 2p \neq \dim M$$

Atiyah Vermutung:

$$b_p^{(2)}(X) \in \mathbb{Q}$$

$$b_p^{(2)}(X) \in \mathbb{Z} \quad \text{falls } \pi_1(X) \text{ torsionsfrei ist}$$

Die Atiyah Vermutung impliziert die Nullteilervermutung für endlich präsentierte Gruppen ($\mathbb{Z}\pi$ nullteilerfrei $\Leftrightarrow$ torsionsfrei). Folgender Satz unterstützt diese Vermutungen.

Satz [Lott-L.] Sei M kompakte orientierbare 3-Mannigfaltigkeit mit Primzerlegung $M = M_0 \# M_1 \ldots \# M_m$, wobei $|M_i|$ endlich oder M_i Haken, Seifert oder hyperbolisch ist und $|\pi_1(M)| = \infty$. Dann gilt

$$b^{(2)}(M) = m-1 + \sum \frac{1}{|\pi_1(M_i)|} + \#\{C \in \pi_0(\partial M) \mid C \cong S^2\}$$

$$b^{(2)}(M) = b_2^{(2)}(M) - \chi(M), \quad b_p^{(2)}(M) = 0 \quad \text{für } p \neq 1,2$$

Folgende Sätze beweisen Vermutungen von M. Gromov

__Satz__ $F \to E \to S^1$ sei Faserung von endlichen CW-Komplexen. Dann gilt $b_p^{(2)}(E) = 0$

Dieser Satz zeigt, daß einige potentielle Gegenbeispiele zur Singer Vermutung keine Gegenbeispiele sind

__Satz__ Sei $F \to E \to B$ Faserung von CW-Komplexen mit endlichen 2-Gerüsten. Sei Bild $(\pi_1(F) \to \pi_1(E))$ unendlich und $\mathbb{Z}$ Untergruppe von $\pi_1(B)$. Dann ist $b_1^{(2)}(E) = 0$

__Korollar__ $1 \to \Delta \to \Gamma \to \pi \to 1$ Erweiterung von unendlichen endlich präsentierten Gruppen und $\mathbb{Z}$ sei Untergruppe von π. Dann gilt

1) $\operatorname{def}(\Gamma) = \max\{g - r \mid \Gamma = \langle s_1 \ldots s_g \mid R_1 \ldots R_r \rangle\} \leq 1$

2) M geschl. orient. 4-Mfkt mit $\pi_1(M) = \Gamma$. Dann ist $|\operatorname{sign}(M)| \leq \chi(M)$.

__Satz__ Sei X endlicher CW-Komplex und $\pi = \pi_1(X)$ residuell endlich d.h. es gibt $\pi \supset \Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \ldots \Gamma_n$ wobei $\Gamma_i \subset \pi_1(X)$ normal ist und endlichen Index hat und $\bigcap \Gamma_i = \{1\}$. Sei $X_i \to X$ die zu Γ_i gehörige Überlagerung. Dann gilt

$$b_p^{(2)}(X) = \lim_{n \to \infty} \frac{b_p(X_i)}{[\pi : \Gamma_i]}$$

wobei $b_p(X_i)$ die gewöhnliche Betti Zahl und $[\pi : \Gamma_i]$ der Index sind

W. Lück

12.05.95

The least field of definition
of a subgroup of $PSL_2(\mathbb{C})$

Let $\Gamma \subset PSL_2(\mathbb{C})$ be a Zarisky dense subgroup. A field $K \subset \mathbb{C}$ is called a field of definition of Γ, if all the adjoint operators $Ad(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, are written over K in a suitable basis. It is known (for example, Vinberg 1971) that there exists the least field of definition of Γ; it is generated over $\mathbb{Q}$ by $\operatorname{tr} Ad(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$; it is invariant under commensurability. Let us denote this field by K_Γ. The subject of the talk is how to find K_Γ in practice, if Γ is given by its generators $\gamma_1, \dots, \gamma_p$. It turns out that K_Γ is generated by ~~the traces of the adjoint operators of some~~ finitely many explicitly given products of traces $\gamma_{i_1} \dots \gamma_{i_k}$. For example, in the case $p=3$ these are the products $\cancel{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3}$

$(\operatorname{tr}\gamma_i)^2$, $i=1,2,3$, $(\operatorname{tr}\gamma_i\gamma_j)^2$ $(i,j=1,2,3,\ i<j)$,

$\operatorname{tr}\gamma_i\gamma_j \cdot \operatorname{tr}\gamma_i \cdot \operatorname{tr}\gamma_j$ $(i,j=1,2,3,\ i<j)$,

$\operatorname{tr}\gamma_i\gamma_j \cdot \operatorname{tr}\gamma_j\gamma_k \cdot \operatorname{tr}\gamma_i \cdot \operatorname{tr}\gamma_k$ $(i,j,k=1,2,3,\ i<k,\ j \neq i,k)$,

$\operatorname{tr}\gamma_1\gamma_2 \cdot \operatorname{tr}\gamma_2\gamma_3 \cdot \operatorname{tr}\gamma_3\gamma_1$,

$\operatorname{tr}\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \cdot \operatorname{tr}\gamma_1 \cdot \operatorname{tr}\gamma_2 \cdot \operatorname{tr}\gamma_3$,

$\operatorname{tr}\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \cdot \operatorname{tr}\gamma_i\gamma_j \cdot \operatorname{tr}\gamma_k$ $(i,j,k=1,2,3,\ i<j,\ k \neq i,j)$.

To prove this, the ideology of invariant theory is applied.

E.B. Vinberg
Moscow University

19.5.95

Liegruppentheorie vom Standpunkt der Homotopietheorie

Die Charakterisierung des Homotopietyps eines topologischen Raumes, ist eines der grundlegenden Probleme in der Homotopietheorie. Im wesentlichen kann man dies mit Hilfe algebraischer Invarianten nur für Sphären und Eilenberg-MacLane Räume.

Eine alte Idee von Rector, besagt Liegruppen homotopietheoretisch zu studieren, das heißt statt der kompakten Liegruppe G betrachtet man den zugehörigen klassifizierenden Raum BG. Klassische Liegruppentheorie wird dann als Leitfaden für die Analyse des Homotopietyps von BG benutzt. Um ein solches Programm durchzuführen ~~ben~~ ist ~~es~~ ein Lexikon nötig, das gruppentheoretische Begriffe in Homotopietheorie übersetzt. Dies geschieht mit Hilfe des Funktors

B: Gruppen $\to$ Räume, der, wie gesagt jeder top. Gruppe ihren klassifizierenden Raum zuordnet. Zu einer kompakten Liegruppe G gehört dann ein Tripel $(G, BG, \Omega BG \simeq G)$. Man definiert nun: Ein endlicher Schleifenraum X ist ein Tripel $(X, BX, \Omega BX \simeq X)$ wobei X $\mathbb{Z}$-endlich ist, d.h. $H_*(X, \mathbb{Z})$ ist endlich erz. $\mathbb{Z}$-Modul. Dann lassen sich alle wesentlichen Begriffe wie maximaler Torus, und Weylgruppe auch homotopietheoretisch formulieren, aber nicht jeder endliche Schleifenraum hat tatsächlich einen maximalen Torus.

Deswegen geht man zu Komplettierungen über (ein Trick von Bousfield und Kan) und ~~topt ctf~~ nennt einen Schleifenraum $(X, BX, \Omega BX \simeq X)$ eine p-kompakte Gruppe, falls BX komplett ist, und X mod-p endlich, d.h. $H_*(X, \mathbb{F}_p)$ ist endlich. Die wichtigsten Beispiele sind auch durch komplettierte kompakte Liegruppen gegeben.

Dwyer und Wilkerson haben dann gezeigt, daß die p-kompakten Gruppen sich tatsächlich, wie erhofft, wie kompakte Liegruppen verhalten. Es gibt immer einen maximalen Torus, und eine Weylgruppe die ähnliche Eigenschaften hat wie im klassischen Fall.

Mit dieser Methode kann man dann klassifizierende Räume

Um gewisse Klassen von kompakten Lie'schen Gruppen schon auf Kohomologie durch algebraische Invarianten charakterisieren, z.B. ließ sich folgender Satz beweisen.

<u>Satz</u> Sei G 1-zshgd kompakte Lie'sche Gruppe, ~~so~~ mit $H_*(G;\mathbb{Z})$ p-torsionsfrei. ~~Sei p~~ und sei $p > 2$.
Sei X ein p-kompletter Raum mit der Eigenschaft
$H^*(X;\mathbb{F}_p) \cong H^*(BG;\mathbb{F}_p)$ als Algebra über der Steenrod-Algebra. Dann gilt: X ($\simeq B\Omega Y$, Y, $\Omega Y \simeq \Omega Y$) ist p-kompakte Gruppe und Y und $BG^\wedge_p$ sind homotopieäquivalent.

Ein globales Resultat ohne weitere Voraussetzung gilt auch bei $G = U(n)$ für alle Primzahlen. Mit Hilfe der arithmetischen Quadrate zeigt sich dann auch der integrale bzw. globale Homotopietyp von $BU(n)$ charakterisieren (mit Hilfe komplexer K-Theorie).

<u>Satz</u>. Sei Y 1-zshgd CW-Komplex, Sei $K(Y) \cong K(BU(n))$ als λ-Ringe. Dann sind Y und $BU(n)$ homotopieäquivalent.

Dietrich Notbohm
Universität Göttingen.

26.5.1995

Oddness – a measure of 3-edge-colourability

Let G be a cubic graph. Then the oddness $\omega(G)$ is the minimal number l such that there exist disjoint circuits $C_1, \dots, C_m$ in G with

$$l = |V(G) \setminus (V(C_1) \cup \dots \cup V(C_m))| + |\{i \leq m;\ C_i \text{ is odd}\}|.$$

$\omega(G)$ is a measure of 3-edge-colourability since $\omega(G) = 0$ iff G is 3-edge-colourable.
We prove the following: Let G be a cubic graph with $\omega(G) \leq 4$ such that G does not contain bridges. Then there exist cycles $C_1, \dots, C_5$ in G such that each edge is contained in C_i for exactly two i. Here a cycle is an Eulerian subgraph of G. As a corollary we obtain such cycle-double-coverings in each bridgeless graph containing a Hamiltonian path or a spanning subdivision of $K_{1,3}$.

Andreas Huck
Universität Hannover.

2.5.1995

Results in extremal graph theory.

The main ingredient of the results is the so-called Blow-Up Lemma which is not harder to prove than to state

$\mathcal{H}$ is a graph with vertex set $V_1, V_2, \ldots V_k$ $|V_i| = \gamma_i n$

$V(\mathcal{H}) = \bigcup V_i$ $\mathcal{H}$ is k-partite.

max degree of $\mathcal{H} \leq l$.

G is a dense graph on the same vertex set. Every pair $(V_i\, V_j)$ is ε-regular. The lemma states that G contains $\mathcal{H}$.

Endre Szemerédi
Rutgers University
University of Paderborn.

9.6.1995.

Recent developments in Invariant Theory

Invariant Theory has a history that is almost one-and-a-half centuries long. It owes its existence to certain problems of number theory, algebra and geometry, which appeared in the works of Gauss, Jacobi, Eisenstein and Hermite.

Invariants came into existence as a tool to distinguish (and, ultimately, to classify) nonequivalent objects in the algebraic problems, where the equivalence relation is given by the orbits of a group G acting on a set X. In the classical setup, the set X is a finite dimensional vector space V and G is a group of linear transformations of V. One can consider the problems of Invariant theory as the far reaching generalizations of the problems of reducing to the „canonical forms" of different kinds of objects of linear algebra or, which is almost the same, of projective geometry.

During its long history Invariant theory passed through several periods of flourishings and stagnations. The last 20 years are marked by the new vigorous developments of this old branch of algebra, inspired by its numerous connections with algebraic groups, representation theory, commutative algebra, algebraic geometry.

The talk is intended for the general audience and contains a survey of some recent developments of Invariant theory: 1) main problems, 2) Hilbert fourteenth problem, 3) Constructive invariant theory, 3) role of reductive groups in Invariant theory, 4) complexity of algebras of invariants, 5) "nice" representations.

V. Popov,
Moscow State University, MGIEM

16.06.1995

On the Burnside problem for even exponents

The free m-generated Burnside group $B(m,n)$ of exponent n is defined by the presentation $B(m,n) = \langle a_1, a_2, \dots, a_m \mid X^n = 1 \text{ for all } X \rangle$ or, equivalently, $B(m,n)$ is the relatively free m-generated group in the variety of groups of exponent n. The question of finiteness of $B(m,n)$ for given m and n ($m, n \geq 2$) is known as the Burnside problem. The positive answer to the question is known for $n=2,3$ (Burnside 1902), $n=4$ (Sanov 1940) and $n=6$ (M.Hall 1957) for any m. In general, the negative solution to the Burnside problem is given by the theorem of Novikov-Adian stating that $B(m,n)$ is infinite for any $m \geq 2$ and odd $n \geq 665$. The theory elaborated by Novikov and Adian for this purpose allowed to prove some other properties of groups $B(m,n)$ and was applied also for constructing many examples of groups with unusual properties. But attempts to generalize the Novikov-Adian theory (and, in particular, to prove that groups $B(m,n)$ are infinite for some $n = 2^k$, which would give a negative solution of the Burnside problem for almost all n) encountered essential difficulties. The main difficulty is that the structure of finite subgroups of $B(m,n)$ in case of even n is reacher than in case of odd n when all finite subgroups are cyclic. These difficulties were overcomed in recent works by S.V. Ivanov (1994) for $n = 2^{16} r \geq 2^{48}$ and by Lysionok (submitted) for $n = 16r \geq 8000$.

Theorem. Let $m \geq 2$ and $n = 16r \geq 8000$. Then

(a) $B(m,n)$ is infinite;

(b) $B(m,n)$ is infinitely presented;

(c) $B(m,n)$ has an exponential growth function;

(d) ~~$B(m,n)$~~ any finite subgroup of $B(m,n)$ embeds in a finite direct product $D_{2n} \times D_{2k} \times D_{2k} \times \dots \times D_{2k}$ where k is the largest 2-power divisor of n and $D_{2t} = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^t = 1 \rangle$ is the dihedral group of order $2t$.

The statements (b), (c) of the theorem and the fact that all finite subgroups of $B(m,n)$ are cyclic in the case of odd $n \geq 665$ were proved by Adian.

I. G. Lysionok

Лысенок

23.06.95

„Darstellungsmoduln von nichthalbeinfachen Gruppenalgebren und Hecke-Algebren als lineare Codes

Ein Grundproblem der Codierungstheorie stellt die Suche nach (linearen) Codes dar, die bei vorgegebenem Alphabet GF(q) und Länge n maximale Dimension und Minimaldistanz aufweisen — die Existenz solcher Codes wird durch den nichtkonstruktiven Satz von Shannon gewährleistet.
Kennt man zu einem linearen Code $\mathcal{C}$ eine Automorphismengruppe G, dann wird der Code $\mathcal{C}$ zu einem Darstellungsmodul von G.
Im Vortrag wurden zunächst lineare Codes behandelt, die in einer Filtrierung des Radikals einer lokalen Gruppenalgebra KG (G p-Gruppe, char K = p) bilden. Zu derartigen Codes kennt man seit kurzem ein effizientes Decodierungsverfahren. Gewisse Linksideale in Gruppenalgebren KG einer Gruppe G mit normaler zyklischer p-Sylow-Untergruppe ähneln verallgemeinerten konkatenierten Codes und sind deshalb ebenfalls für die Praxis von Interesse.
Des weiteren wurden die codierungstheoretischen Eigenschaften von Spechtmoduln und deren Verallgemeinerungen (James-Moduln) kurz skizziert.
Schließlich besitzen gewisse homomorphe Bilder von Specht- und James-Moduln, die Darstellungsmoduln von Hecke-Algebren (vom Typ A) bilden, gute codierungstheoretische Eigenschaften. In dieser Klasse von Hecke-Moduln finden sich alle primitiven verallgemeinerten Reed-Muller Codes sowie (charakteristikfreie Versionen von) Simplex-Codes und eine Reihe neuartiger Codes.

Karl-Heinz Zimmermann
Univ. Bayreuth

30. 6. 95

Zur Geometrie der Modulgruppe
(Paul Schmutz)

Neben der zahlentheoretischen Bedeutung hat die Modulgruppe $\Gamma(1) = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : ad-bc=1, a,b,c,d \in \mathbb{Z}\}$ auch eine (unterschätzte) geometrische Bedeutung, die über die (normalen) Untergruppen anschaulich gemacht werden kann. Die Konjugationsklassen von $\Gamma(1)$, die bekanntlich auch den binären quadratischen Formen mit positiver Diskriminante entsprechen, sind auch in 1:1 Korrespondenz mit den Isometrieklassen von Systolen von $\Gamma(N)$ (Hauptkongruenzuntergruppen), wobei die Systole die kürzeste geschlossene Geodätische von $H/\Gamma(N)$ ist.
Es folgt, dass die Multiplizität der Systolen von $H/\Gamma(N)$ sehr gross ist, und wir zeigen auch, dass die Länge der Systole von $H/\Gamma(N)$ maximal ist verglichen mit allen anderen Flächen im Teichmüllerraum von $\Gamma(N)$. Diese Art von Extremalprobleme für Systolen ist ein nicht-euklidisches Analogon zu Problemen der besten Kugelpackungen.
Ferner betrachten wir die Spurmenge einer Fuchsschen Gruppe Γ: $Sp(\Gamma) = \{|tr(\gamma)| : \gamma \in \Gamma\} = \{a_1 < a_2 < a_3 < \ldots\}$ und ordnen sie der Grösse nach.
<u>Satz</u>: Sei $Sp(\Gamma(N)) = \{a_1 < a_2 < \ldots\}$ und $Sp(\Gamma') = \{a_1' < a_2' < \ldots\}$, wobei Γ' eine Gruppe aus dem Teichmüllerraum von $\Gamma(N)$ ist.
Dann gilt $a_i \geq a_i'$, $\forall i$.

Dieses Phänomen kann auch bei euklidischen Gittern auftreten, zB. beim 2-dim Sechseckgitter (Vermutung).
Ferner geben wir eine Charakterisierung für arithmetische Gruppen:
<u>Satz</u>: Seien Γ nichtkompakte Fuchssche Gruppen von endl. Volumen. Dann ist Γ arithmetisch genau dann, wenn eine Konstante C existiert, so dass $\#\{a < M : a \in Sp(\Gamma)\} \leq 1 + CM$, $\forall M$.
<u>Vermutung</u>: Dies gilt auch im kompakten Fall.

P. Schmutz
MPI Bonn

7.7.1995

Cohomological invariants for algebraic groups

Markus Rost, Univ. Regensburg

Für eine einfachzusammenhängende lineare algebraische Gruppe G über einem Körper k gibt es eine Galois-kohomologische Invariante

$$\theta : H^1(k, G) \longrightarrow H^3(k, \mu_n^{\otimes 2})$$

Hier hängt n vom Typ der Gruppe G ab.
In speziellen Fällen ist die Invariante θ seit langem bekannt. Für $G = \mathrm{Spin}(n)$ kann man sie etwa aus Arason's e_3-Invariante für quadratische Formen erhalten, vermöge (Char $k \neq 2$)

$$\theta : H^1(k, \mathrm{Spin}(n)) \longrightarrow I^3(k)/I^4(k) \xrightarrow{e_3} H^3(k, \mathbb{Z}/2)$$

J-P. Serre hatte die Konstruktion ~~einer~~ einer $H^3(\mathbb{Z}/3)$- für $G = F_4$ und einer $H^3(\mu_5^{\otimes 2})$-Invariante für $G = E_8$ vorgeschlagen.

Dies führte schließlich zur Konstruktion von θ für beliebige G. Es stellt sich heraus, daß θ i.W. die einzige solche Invariante ist. Ferner steht sie in enger Beziehung zur wohlbekannten topologischen $H^4(\mathbb{Z})$-Invariante. Siehe auch: J-P. Serre, Bourbaki-Seminar, Mars 1994.

14.7.1995

Gruppenoperationen auf Fahnenmannigfaltigkeiten

Sei $\mathcal{F} = \{0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n = \mathbb{C}^n \mid \dim V_i = i\}$ die Menge der (vollständigen) Fahnen in $\mathbb{C}^n$. In vielen Situationen muß man die Bahnenstruktur einer Untergruppe H von $GL_n(\mathbb{C})$ auf $\mathcal{F}$ kennen:

1) Falls H die Fixpunktmenge einer Involution von $GL_n(\mathbb{C})$ ist, dann führt die Darstellungstheorie einer reellen Form von $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ auf H-Bahnen in $\mathcal{F}$.
2) Sei $B \subseteq GL_n(\mathbb{C})$ die Isotropiegruppe einer Fahne $F_0 \in \mathcal{F}$. Dann entsprechen die H-Bahnen in $\mathcal{F} \cong GL_n(\mathbb{C})/B$ den B-Bahnen in $GL_n(\mathbb{C})/H$. Nun kann man ausnützen, daß B auflösbar ist. Sätze von Brion, Moser, Fulton erlauben z.B. den Chowring in $GL_n(\mathbb{C})/H$ mit Hilfe von B-stabilen Zykeln zu berechnen.

Ziel des Vortrags ist es, etwas Struktur in $H\backslash\mathcal{F}$ zu bringen. Dazu sei der Einfachheit halber $H\backslash\mathcal{F}$ endlich. (Bsp. 1 hat diese Eigenschaft). Sei $W = S_{n-1}$ die Weylgruppe von $GL_n(\mathbb{C})$. Hauptresultat ist die Konstruktion einer W-Operation auf $H\backslash\mathcal{F}$. Weiter sei $\mathcal{O}_0 \subseteq \mathcal{F}$ die offene B-Bahn (diese existiert, da $H\backslash\mathcal{F}$ endlich ist). Dann bestimmen wir den W-Orbit von $\mathcal{O}_0$ in $H\backslash\mathcal{F}$ und die Standgruppe $W_{\mathcal{O}_0}$, was zu einer Verallgemeinerung der kleinen Weylgruppe von symmetrischen Räumen führt.

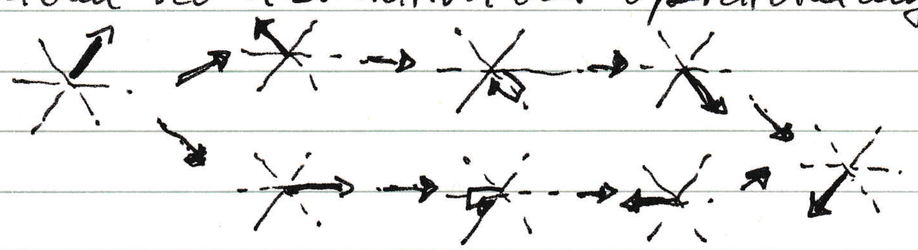
Natürlich kann man $GL_n(\mathbb{C})$ durch eine beliebige zushgde. reduktive Gruppe ersetzen und B durch ihre Borelundergruppe. Weiterhin sind alle Resultate für char $\neq 2$ gültig.

Friedrich Knop
Rutgers U., New Brunswick

20.10.1995

Über das Wegemodell in der Darstellungstheorie

Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Liealgebra$/\mathbb{C}$, sei Φ das Wurzelsystem und X das Gewichtegitter von $\mathfrak{g}$. Setze $X_{\mathbb{R}} = X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, und sei $\Pi := \{\pi : [0,1] \to X_{\mathbb{R}} \mid \pi(0)=0, \pi(1) \in X, \pi \text{ stückweise linear}\}$ die Menge aller Wege, die stückweise linear sind, im Ursprung starten, und in einem Gewicht enden. Zu jeder einfachen Wurzel α wird ein Operator f_α definiert, so daß entweder $f_\alpha(\pi)$ ein Weg in Π ist, oder $f_\alpha(\pi) = 0$ gesetzt wird.
Mit Hilfe dieser Operatoren kann man kombinatorisches Modell einer $\mathfrak{g}$-Darstellung konstruieren:
Sei $\Pi^+ = \{\pi \in \Pi \mid \mathrm{Im}\,\pi \subset \text{dom. Weylkammer}\}$, und $B(\pi)$ = die Menge aller Wege, die man bekommt indem man alle möglichen Kombination der Operatoren auf π anwendet.
z.B: A_2:



Dann gilt für $\pi \in \Pi^+$ und $\lambda = \pi(1)$:

$$\mathrm{Char}\, V_\lambda = \sum_{\eta \in B(\pi)} e^{\eta(1)}$$

Weiter sei für $\eta, \eta' \in \Pi$: $\eta * \eta'$ die Konkatenierung der Wege.
Für $\pi, \pi' \in \Pi^+$ hat man dann:

$$B(\pi) * B(\pi') = \dot{\bigcup_{\substack{\eta' \in B(\pi'),\\ \pi * \eta' \in \Pi^+}}} B(\pi * \eta'),$$

die Konkatenierung kann also als ein "Modell" des Tensorproduktes von Darstellungen betrachtet werden. Des weiteren wurde erklärt wie man der Menge $B(\pi)$ in natürlicher Weise eine Basis von V_λ zuordnen kann, der Zusammenhang mit den kristallinen Graphen wurde erläutert, und wie man die Menge $B(\pi)$ auch interpretieren kann als Menge von integralen Punkten in einem konvexen Polytop

Peter Littelmann, Strasbourg.

27. 10. 1995

On the Theory of Dirichlet forms and Applications

— Zhiming MA

The theory of Dirichlet forms was originally a part of analytic potential theory. In 1917, M. Fukushima constructed for a first time a Hunt processes associated with a regular Dirichlet forms on locally compact separable metric space. Since then the theory has been rapidly developed and has brought a wide range of applications. At the same time arised an open problem of describing all those Dirichlet forms which are associated with resonable Markov processes. Many people have made contribution in this research direction. Being ~~an~~ a solution of the above mentioned problem, recently an analytic characterizatio of all those Dirichlet forms which are associated with right continuous strong Markov processes (we call them quasi-regular ones) has been found ([AMR93], [MR92]). This characterization provides in fact a one to one correspondence between right continuous strong Markov (sectorial) processes and quasi-regular Dirichlet forms. Moreover, the quasi-regularity condition is checkable for a large class of Dirichlet forms ([RS93]). Applications are e.g. in the study of singular Schrödiner operaters, loop or path spaces over Riemanian manifolds, infinite dimensional stochastic differential equations, Quantum field theory, large deviation theory, non-symmetric Ornstein-Uhlenbeck processes, measure valued processes, Markov uniqueness for infinite dimensional operators. More recently it was found that any Dirichet processes can be approximated by compound Poisson processes [MZR95]. The deory has been developed to the framwork of generalized Dirichlet forms [St95]. The relation between harmonic maps and Dirichlet forms has also been studied [Jo95]

马志明 (Ma Zh—)

(馬志明)

3/11/1995

"Combinatorial formulas for Kazhdan-Lusztig polynomials"

FRANCESCO BRENTI (PERUGIA)

In [Inv. Math., 1979], Kazhdan and Lusztig defined a family of polynomials, for any Coxeter system (W,S), which have become known as the Kazhdan-Lusztig polynomials of (W,S). These polynomials are fundamental in the representation theory of Hecke algebras, as well as in the geometry of Schubert varieties.

In this talk we show that there exists a family of polynomials, indexed by sequences of positive integers, such that any Kazhdan-Lusztig polynomial can be expanded linearly in terms of this family, and we give combinatorial interpretations to the coefficients in this expansion. More precisely, we show how we can associate, to every path in the Bruhat graph of (W,S), a polynomial in the family in such a way that the Kazhdan-Lusztig polynomial of a pair of elements $u,v \in W$ is just the sum, over all the directed paths in the Bruhat graph from u to v, of the associated polynomials. We also show that the polynomials in this family can be interpreted combinatorially as counting certain Dyck paths according to the number of "up" steps, and as counting points over finite fields ~~of~~ in certain subspace arrangements. Finally, we discuss conjectures and open problems (some old and some new).

Francesco Brenti

10.11.95

"On Kleinian singularities and quivers"

(P. Slodowy, Hamburg)

A Kleinian singularity S is obtained as a quotient $\mathbb{C}^2/\Gamma$ of $\mathbb{C}^2$ by a finite subgroup $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{C})$ (F. Klein, 1884). The dual graph of its minimal resolution is a Coxeter-Dynkin diagram of type A, D, E (Du Val, 1934). Due to work of Brieskorn and Grothendieck the deformation and resolution theory of Kleinian singularities is well understood in terms of the corresponding simple complex Lie groups. In all that, the group Γ doesn't show up any more. However, using McKay's observation on the representation theory of the groups Γ, P. Kronheimer gave a new approach to the deformation and resolution theory of $S = \mathbb{C}^2/\Gamma$ (Oxford Thesis, 1987). His constructions are based on Hyper-Kähler-geometry and essentially differential-geometric. He also translated part of his results into the language of representations of so-called McKay-quivers:

$\tilde{A}_2$  $\tilde{E}_8$ 

obtained from an extended Dynkin-diagram by "doubling" all edges into opposite arrows. Thus deformations of S, in particular S itself, may be viewed as moduli-spaces of certain representations of these quivers (with suitable relations given by a "moment map"). We sketch the results of joint work with H. Cassens (Ph.D Hamburg, 1994) on the realization of the resolutions of S (and its deformations) as "linearly modified" moduli spaces of these representations.

Peter Slodowy

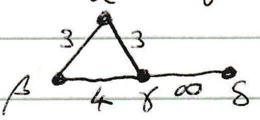
17/11/95

"Automaticity of Coxeter Groups"

R. Howlett (Sydney)

(Joint work with Brigitte Brink)

Given a finite graph with vertex set Π and edge-weights in $\{3,4,5,\dots\} \cup \{\infty\}$, form a vector space V over $\mathbb{R}$ with basis Π, & define a symmetric bilinear form $V \times V \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x \cdot y$, by $\alpha \cdot \alpha = 1$ for all $\alpha \in \Pi$, and $\alpha \cdot \beta = -\cos \frac{\pi}{n_{\alpha\beta}}$ if $\alpha \neq \beta$. Here $n_{\alpha\beta}$ is the weight on the edge (α, β), or 2 if (α,β) is not an edge. [For example if the graph is



then $V = \mathrm{Span}\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$

$\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma = -\frac{1}{2}$, $\alpha \cdot \delta = 0 = \beta \cdot \delta$, ~~and~~ $\beta \cdot \gamma = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ and $\gamma \cdot \delta = -1$.]

For each $\alpha \in \Pi$ define $r_\alpha : V \to V$ by $r_\alpha x = x - 2(\alpha \cdot x)\alpha$, & let $W = \langle \{ r_\alpha \mid \alpha \in \Pi \} \rangle \leqslant GL(V)$. Then W is a <u>Coxeter group</u>. Let $R = \{ r_\alpha \mid \alpha \in \Pi \}$.

A word $r_{\alpha_1} r_{\alpha_2} \cdots r_{\alpha_\ell}$ $(\alpha_i \in \Pi)$ is <u>reduced</u> if there is no shorter word for the same element of W.

(*) [Problem: construct a finite state automaton that can determine whether a word is reduced.

The <u>root system</u> is the set $\Phi = \{ w\alpha \mid w \in W, \alpha \in \Pi \}$. Each root $\gamma \in \Phi$ has the form $\sum_{\alpha \in \Pi} \lambda_\alpha \alpha$ where the coefficients λ_α are all $\geqslant 0$ $(\gamma \in \Phi^+)$ or all $\leqslant 0$ $(\gamma \in \Phi^-)$. In fact $r_{\alpha_1} r_{\alpha_2} \cdots r_{\alpha_\ell}$ $(\alpha_i \in \Pi)$ is reduced iff $r_{\alpha_\ell} r_{\alpha_{\ell-1}} \cdots r_{\alpha_{i+1}} (\alpha_i) \in \Phi^+$ for all i. There is an automaton for (*) as follows: States are subsets of Φ^+, & one "Fail" state. The transition function $R \times \{\text{States}\} \to \{\text{States}\}$ is given by

$$(r_\alpha, S) \longmapsto \begin{cases} \{\alpha\} \cup r_\alpha S & \text{if } S \subseteq \Phi^+ \ \& \ \alpha \notin \\ \text{Fail} & \text{if } \alpha \in S \subseteq \Phi^+ \\ \text{Fail} & \text{if } S = \text{Fail}. \end{cases}$$

The initial state is $\emptyset \subseteq \Phi^+$. The automaton reads the word $r_{\alpha_1} r_{\alpha_2} \cdots r_{\alpha_\ell}$ from left to right one letter at a time; it is reduced iff the final state is not "Fail". Unfortunately, the number of states is infinite if Φ is not finite. This is corrected by discarding "non-elementary" roots as they arise. [Reference: Math. Ann. 296 179-190.]

R. Howlett

17-11-95

EDWARD FORMANEK

The Automorphism Group of a Free Group is not Linear

This is joint work with Claudio Procesi. Let F_n be a free group of rank n, and let $A(F_n)$ be its automorphism ~~gr~~ group. The theorem is that for $n \geq 3$, $A(F_n)$ is not a linear group — that is, there is no faithful linear representation $A(F_n) \to GL(\cancel{n}, K)$, where K is a field. For $n=2$, ~~the proble~~ it is at present unknown whether $A(F_2)$ has a faithful linear representation.

24/11/95

Let G be a reductive group over an algebraically closed field of characteristic $p>0$, and $\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}(G)$. Then $\mathfrak{g}$ carries a canonical (G-invariant) restricted Lie algebra structure $x\mapsto x^{[p]}$. Given an irreducible $\mathfrak{g}$-module V there exists a linear function $\chi\in\mathfrak{g}^*$ such that the two-sided ideal I_χ in $U(\mathfrak{g})$ generated by all $x^p-x^{[p]}-\chi(x)^p\cdot 1$ acts trivially on V. We call χ the p-character of V. Each linear function on $\mathfrak{g}$ is the p-character of an irreducible $\mathfrak{g}$-module. The group G acts on $\mathfrak{g}^*$ via Ad^*. Given $f\in\mathfrak{g}^*$ let $\Omega(f)$ denote the Ad^*G-orbit of f. If p is a good prime for G then $\dim\Omega(f)$ is even. Given a restricted subalgebra $\mathfrak{a}$ of $\mathfrak{g}$ let $u_\chi(\mathfrak{a})$ denote the subalgebra of $U(\mathfrak{g})/I_\chi$ generated by the image of $\mathfrak{a}$. It follows from PBW theorem that $\dim u_\chi(\mathfrak{a})=p^{\dim\mathfrak{a}}$.

<u>Conjecture</u> (Kac-Weisfeiler, 1971). Suppose $\mathfrak{g}$ admits a non-degenerate trace form with respect to a rational G-module. Then any $\mathfrak{g}$-module with p-character χ has dimension divisible by p^d where $d=\frac{1}{2}\dim\Omega(\chi)$. Remark that $\mathfrak{g}$'s having a nondegenerate trace form yields that p is a good prime for G. If p is good, then, for any $f\in\mathfrak{g}^*$, $\mathrm{Lie}\, Z_G(f)=c_{\mathfrak{g}}(f)$ provided $\mathfrak{g}\cong\mathfrak{g}^*$.

<u>Theorem 1.</u> Suppose $\mathfrak{g}$ admits a non-degenerate trace form. For any $\chi\in\mathfrak{g}^*$, there exists a subalgebra $\tilde{\mathfrak{m}}_\chi\subset\mathfrak{g}$ such that (a) $\tilde{\mathfrak{m}}_\chi$ consists of $[p]$-nilpotent elements of $\mathfrak{g}$; (b) $\dim\tilde{\mathfrak{m}}_\chi=\frac{1}{2}\dim\Omega(\chi)$; (c) $\tilde{\mathfrak{m}}_\chi\cap\mathrm{Ker}\,\chi$ is an ideal of codimension ≤ 1 in $\tilde{\mathfrak{m}}_\chi$; (d) $\tilde{\mathfrak{m}}_\chi$ is closed under the $[p]$-operation in $\mathfrak{g}$; (e) $\tilde{\mathfrak{m}}_\chi\cap c_{\mathfrak{g}}(\chi)=(0)$.

To any $\mathfrak{g}$-module W with p-character χ one can assign a conical, closed subset $X_{\mathfrak{g}}(W)\subset\mathcal{N}_1(\mathfrak{g}):=\{x\in\mathfrak{g}\mid x^{[p]}=0\}$ called the support variety of W. The subset $X_{\mathfrak{g}}(W)$ has the following property: if $\mathfrak{a}$ is a restricted subalgebra of $\mathfrak{g}$ such that $\mathfrak{a}\cap X_{\mathfrak{g}}(W)=(0)$ then W is a projective $u_\chi(\mathfrak{a})$-module.

<u>Theorem 2</u>. Under the assumptions of Thm 1, let V have p-character χ. Then $X_{\mathfrak{g}}(V)\subset c_{\mathfrak{g}}(\chi)\cap\mathcal{N}_1(\mathfrak{g})$.

Since $\tilde{\mathfrak{m}}_\chi\cap c_{\mathfrak{g}}(\chi)=0$ we obtain that V is projective over $u_\chi(\tilde{\mathfrak{m}}_\chi)$. Using Thm 1(c) this gives that V is free over $u_\chi(\tilde{\mathfrak{m}}_\chi)$. By Thm 1(b) we now have $p^d\mid\dim V$ proving the Kac-Weisfeiler conjecture.

Alexander Premet

1/12/95 On rational Hopf and loop G-spaces
(Ryszard DOMAN, Poznań, Poland)

A Hopf space is a space X with a continuous map $m: X\times X \to X$ called a multiplication for which there is a point $e\in X$ called (homotopy) unit such that the maps $x\mapsto m(x,e)$, $x\mapsto (e,x)$ are both homotopic to the identity map of X. It is obvious that "Hopf space" is a generalization of "topological group". Another example of a Hopf space is the loop space $\Omega(Y,y_0)=\{\omega:(I,\partial I)\to(Y,y_0)\}$, where I is the unit interval. Every topological group and, even more generally, every associative Hopf space under some additional mild conditions is homotopy equivalent to some loop space but there are Hopf spaces, e.g. S^7 (Cayley numbers of norm 1), which are not homotopy equivalent to any loop space. The latter situation, however, cannot occur when X is a rational Hopf space, i.e. one the homotopy groups of which are $\mathbb{Q}$-vector spaces.

Let G be a finite group. By Hopf G-space we mean a Hopf space on which G acts in such a way that the multiplication is a G-equivariant map, the unit $e\in X$ is a G-fixed point and the maps $x\mapsto m(x,e)$, $x\mapsto m(e,x)$ are G-homotopic to the identity of X. A loop G-space is the loop space $\Omega(Y,y_0)$ on some G-space Y with G-fixed base point y_0, and the G-action defined by $(g\omega)(t)=g.\omega(t)$.

The subject of my talk is the question of whether every rational Hopf G-space is G-homotopy equivalent to some loop G-space. I will show when one can imitate the nonequivariant arguments and why they do not work generally. I will also describe some other special case in which the answer to the question is affirmative.

Doman

8/12/95 Der affine Raum: eine Herausforderung für die Algebra

Obwohl der affine komplexe Raum $\mathbb{C}^n$ der Baustein der algebraischen Geometrie ist, sind viele einfache und offensichtliche Fragen über seine Struktur vollständig offen. Die folgenden Probleme und Fragen wurden im Vortrag erläutert und zum Teil etwas näher behandelt:

Charakterisierung: Finde eine algebraische (topologische?) Charakterisierung des $\mathbb{C}^n = \mathbb{A}^n$.

Kürzung: Folgt aus $Y \times \mathbb{A}^k \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^{n+k}$, dass $Y \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n$ ist?

Einbettung: Ist jede abgeschlossene Einbettung $\mathbb{A}^k \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ äquivalent zur Standard-Einbettung?

Automorphismen: Finde eine algebraische Beschreibung der Gruppe der algebraischen Automorphismen des $\mathbb{A}^n$.

Linearisierung: Ist jeder Automorphismus endlicher Ordnung des $\mathbb{A}^n$ linearisierbar?

Komplemente: Gegeben zwei Hyperflächen E und F des $\mathbb{A}^n$ und ein Isom. $\mathbb{A}^n \setminus E \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n \setminus F$. Folgt daraus, dass $E \xrightarrow{\sim} F$.

Fixpunkte: Hat jede reduktive Gruppenoperation auf dem $\mathbb{A}^n$ einen Fixpunkt?

Jacobische: Ist jede polynomiale Abbildung $\mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ von maximalem Rang ein Isomorphismus?

Die Antworten sind einfach für $n=1$, hängen für $n=2$ mit tiefliegenden Sätzen zusammen, und sind völlig offen für $n \geq 3$.

Hanspeter Kraft

5.12.95 Galoisgruppen als Fundamentalgruppen

Es wurde berichtet über einige neuere Resultate aus dem Heidelberger Arbeitskreis "Arithmetik", u.a. über die folgenden Resultate von Florian Pop:

1) Kennzeichnung p-adisch abgeschlossener Körper (bis auf elementare Äqu.) durch ihre Galoisgruppe (p-adisches Analogon des Satzes von Artin über reell abgeschlossene Körper)
2) Kennzeichnung endlich-erzeugter Körper (bis auf Isomorphie) durch ihre Galoisgruppe (Lösung des Grothendieckschen Programms der anabelschen Geometrie im birationalen Falle)
3) Analogon der Schafarewitsch-Vermutung über die Galoisgruppe der maximalen zyklotomischen Körper im Falle der Charakteristik p.
4) Rein-algebraischer Beweis (ohne Topologie und Analysis) über die Freiheit der Galoisgruppe von $K(t)$, K algebraisch abgeschlossen, einschl. Charakteristik p (Abhyankar-Vermutung)
5) Universelles Lokal-Global Prinzip für den Körper der S-adischen Zahlen: S eine endliche Menge von Primzahlen oder ∞. Galois-Struktur dieser Körper.

Peter Roquette
(Heidelberg)