5/1/'96 Oort's conjecture and linearity properties of Shimura varieties
(Ben Moonen – Münster)

Conjecture (F. Oort; special case: Y. André) Let $Z \hookrightarrow A_{g,1,n} \otimes \mathbb{C}$ be an irreducible algebraic subvariety such that the CM-points are Zariski dense on Z. Then Z is a subvar. of Hodge type.

Here $A_{g,1,n}$ denotes the moduli space of g-dimensional principally polarized abelian varieties with a level n structure, and by a subvariety of Hodge type we mean a subvariety parametrizing abelian varieties with some given collection of Hodge classes. The first purpose of the talk is to explain this more carefully!

Subvarieties of Hodge type have interesting "linearity properties". First we discuss such a property over $\mathbb{C}$: just as $A_{g,1,n} \otimes \mathbb{C}$ is a quotient of the Siegel space $\mathfrak{h}_g$ (a hermitian symmetric domain associated to the group CSp_{2g} – or rather its adjoint group), a subvariety $S \hookrightarrow A_{g,1,n} \otimes \mathbb{C}$ of Hodge type is covered by a hermitian symmetric subdomain $Y_M \subset \mathfrak{h}_g$ corresponding to some algebraic subgroup $M \subset CSp_{2g,\mathbb{Q}}$. From this we see that S is a totally geodesic submanifold. Conversely if $S \hookrightarrow A_{g,1,n} \otimes \mathbb{C}$ is a totally geodesic algebraic subvariety containing at least 1 CM-point then S is of Hodge type. [We also have a simple description of arbitrary totally geodesic algebraic subvarieties.]

Next we discuss a property in mixed characteristics. Let F be a number field, $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_F$ a prime with $\mathfrak{p} \nmid n$, $\hat{\mathcal{O}}$ the $\mathfrak{p}$-adic completion of $\mathcal{O}_F$, and write $\mathcal{A} = A_{g,1,n} \otimes \hat{\mathcal{O}}$. If x is a closed ordinary moduli point of $\mathcal{A}$ (meaning that the corresponding abelian variety is ordinary) then, by Serre and Tate, the formal completion $\mathfrak{A}_x$ of $\mathcal{A}$ at x is a formal torus. Suppose $S \hookrightarrow A_{g,1,n}$ is a subvariety of Hodge type and make a model $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{A}$ by taking the Zariski closure of S. A theorem of Noot says that if $x \in \mathcal{S}$, then the formal completion $\mathfrak{S}_x \hookrightarrow \mathfrak{A}_x$ of $\mathcal{S}$ at x is a union of formal subtori (slightly simplifying things). We say that $\mathcal{S}$ is "formally linear at x". Conversely, if $Z \hookrightarrow A_{g,1,n}$ is any irreducible algebraic subvariety such that its model $\mathcal{Z} \hookrightarrow \mathcal{A}$ is formally linear at some ordinary moduli point x, then Z is a subvariety of Hodge type.

Finally, we explain how "formal linearity" relates to Oort's conjecture. Using this we can prove the conjecture under some additional hypothesis and in some special cases.

Ben Moonen

12.01.96

2-Erzeugung von endlichen einfachen Gruppen, revisited

(Nikolai Vavilov – St. Petersburg and Turin)

We discuss the known results & conjectures pertaining to the 2-generation of the finite simple (and closely related) groups.

It has been known for some decades that all f.s. groups are generated by 2 elements, $G = \langle x, y \rangle$ but only 2 years ago G. Malle, J. Saxl and Th. Weigel succeeded in finalizing a proof of the following conjecture: x may be taken to be an involution, $x^2 = e$.

What about the order of the second generator? Especially important is the case of (2,3)-generation, when $x^2 = e$, $y^3 = e$ since the (2,3)-generated groups are exactly the factors of $PSL(2, \mathbb{Z})$.

We discuss some recent results in this direction, due to G. Malle, Ch. Tamburini, J. Wilson, L. Di Martino, the author and some others. Few months ago M. Liebeck and A. Shalev obtained an almost complete solution of this problem for classical groups in the probabilistic sense: a randomly choosen involution and a randomly choosen 3-element generate $G \neq PSp(4, q)$ as $|G| \to \infty$.

We discuss also open questions concerning Hurwitz generation, recent results on the (2,3)-generation of some non-simple (and non-finite) groups, etc.

Bahn [signature]

19/1/96 Laminations in 3-manifolds

Ulrich Oertel, Rutgers, Newark and MPI

Ulrich Oertel

1) Introduction to laminations in surfaces.

Representing essential simple closed curves by invariant weights on train tracks. We give the definition of a "good" train track and prove that curve systems carried by a good train track are essential. Measured laminations in surfaces explained in terms of train tracks and invariant weights. Example of non-measured lamination.

2) 3-Manifolds

Overview of the theory of Haken 3-manifolds. Statements of Waldhausen's theorems:

(M^3 closed Haken) $\Rightarrow$ ($\tilde{M} \cong \mathbb{R}^3$)

(M_0 homotopy equivalent to M_1, M_1 Haken) $\Rightarrow M_0 \cong M_1$

Definition of branched surface $B \hookrightarrow M^3$

We state the basic results about incompressible surfaces and branched surfaces, e.g. every surface fully carried by an incompressible branched surface is incompressible.

Next we give an (approximate) definition of an essential lamination and state theorems

1) (M^3 laminar) $\Rightarrow$ $\tilde{M} \cong \mathbb{R}^3$ where a 3-manifold is said to be laminar if it contains an essential lamination.

2) Leaves of essential laminations are π_1-injective

We give a concrete example of an essential lamination in a non-Haken manifold.

3) If time permits, a more recent result will be mentioned

Thm. Given a 3-manifold M (or finite complex), exactly one is true: 1) M is negatively curved in Gromov's sense, or

2) $\exists$ a mapped-in 2-dimensional measured lamination Λ, $\chi(\Lambda) = 0$, $f: \Lambda \to M$ with strongly area minimizing leaves.

This theorem is related to Thurston's hyperbolization conj.

26.01.96. Eisenstein series and quantum affine algebras

Mikhail Kapranov, Northwestern and MPI

The concept of Hall algebra, which came into prominence recently in relation with quantum groups (Ringel) can of course be defined for any Abelian category $\mathcal{A}$ with appropriate finiteness conditions; ~~It~~ The algebra $H(\mathcal{A})$ is generated by symbols $[A]$ for all isomorphism classes of objects and the structure constant g^C_{AB} is the number of subobjects in C of type A and cotype B.

Let $\mathcal{A}$ be the category of coherent sheaves on a smooth projective curve $X/\mathbb{F}_q$ and H be its Hall algebra. Consider generating functions

$$E_\chi(t) = \sum_{L\in \mathrm{Pic}(X)} [L]\, \chi(L)\, t^{\deg L} \qquad \chi : \mathrm{Pic}(X) \to \mathbb{C}^* \text{ a character}$$

Then the theory of Eisenstein-Langlands series implies that we have the following relations in $H(\mathcal{A})$

$$E_{\chi_1}(t_1)\, E_{\chi_2}(t_2) = q^{1-g} \frac{L\left(\frac{\chi_2}{\chi_1}, \frac{t_2}{t_1}\right)}{L\left(\frac{\chi_2}{\chi_1}, \frac{t_2}{q t_1}\right)} E_{\chi_2}(t_2)\, E_{\chi_1}(t_2)$$

where $L(\chi, t)$ is the Hecke L-function. For the simplest case $X = \mathbb{P}^1$ $\chi_1 = \chi_2 = 1$ $L(1,t) = \zeta_{\mathbb{P}^1}(t) = \frac{1}{(1-t)(1-qt)}$ and we find the relation for the quantum affine group $U_q(\widehat{sl}_2)$ in its "new realization" of Drinfeld.

In general, theory of spectral decomposition of automorphic forms (Langlands, Harder) implies that H looks like the quantum affine algebra $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ where simple roots of $\hat{\mathfrak{g}}$ correspond to cusp forms which are eigenfunctions of Hecke operators and the Cartan matrix is given by the values of Rankin L-functions.

Миша Капранов

02.02.96 <u>Algebraic K-theory of homogeneous varieties</u>

Alexander Merkurjev, Sankt-Petersburg and Bielefeld.

Let G be a linear algebraic group over a field F, X be an algebraic variety on which G acts. We define groups $K_n'(G;X)$ as K-groups of the category of coherent sheaves on X with G-action compatible with one on X.

<u>Theorem.</u> Assume that G is a simply connected semisimple group. Then the natural homomorphism $K_0'(G;X) \longrightarrow K_0'(X)$ is surjective.

This statement is the generalization of an algebraic analogue of Atiyah-Hirzebruch theorem in topological K-theory.

<u>Theorem.</u> Assume that G is a split simply connected group. Then there is a spectral sequence

$$E^2_{p,q} = \mathrm{Tor}_p^{R(G)}(\mathbb{Z}, K_q'(G;X)) \Longrightarrow K_{p+q}'(X)$$

where $R(G)$ is the representation ring of G.

<u>Corollary.</u> Let $H \subset G$ be any closed subgroup. Then

$$K_0(G/H) = R(H) \otimes_{R(G)} \mathbb{Z}.$$

Assume now that G is an algebraic torus, X be a G-variety with finitely many orbits (toric variety).

<u>Theorem</u> (Panin, M.) If X is smooth and projective then there exists a separable F-algebra A such that $K_n(X)$ is a direct summand of $K_n(A)$ for all n.

<u>Corollary 1.</u> $K_0(X)$ is a finitely generated group.
2. $K_0(G)$ is a finitely generated group.

Merj

09.02.96 **Calabi-Yau threefolds with K3-fibrations and string-string duality in four dimensions**

Bruce Hunt, z.Z. Bielefeld

The string-string duality to be discussed is a string-analog of the famous electric-magnetic duality conjectured by Monton-Olive and proved by Seiberg-Witten, which led to the definition of the Seiberg-Witten invariants for four-dimensional manifolds. After recalling some basic facts about K3-surfaces and Calabi-Yau threefolds, we describe in rough terms string theories. We need here several kinds of string theories: "heterotic" strings, in which the left-moving fields have supersymmetry while the right-moving ones do not. In this theory the group $E_8 \times E_8$ occurs as a gauge group. "Type II" superstrings, which have $N=2$ supersymmetry for both left and right movers. These theories all live in ten dimensions, and compactifications are constructed to get to more realistic models. The following are considered:

A. Compactification of the heterotic string on a four-torus T^4
B. Compactification of type II on a K3 surface
C. Compactification of the heterotic string on $K3 \times T^2$
D. Compactification of type II string on a Calabi-Yau.

Then there are dualities:

A dual to B — duality in six dimensions
C dual to D — duality in four dimensions.

We consider the latter, and discuss the structure of the Calabi-Yau threefolds which occur; they all have K3-fibrations, and most of them are in fact <u>quotients</u> of $C \times K$, where C is a curve and the K3-surface K has some non-Nikulin automorphism group $\mathbb{Z}_k$ ($k \leq 66$). This is a report on joint work with the physisists Rolf Schimmrigk (Bonn).

Bruce Hunt

Gruppenoperation auf nicht-positiv gekrümmten Räumen

(Robert Bieri , Frankfurt)

Ich habe über gemeinsame Arbeit mit Ross Geoghegan (Binghamton, USA) berichtet.

Es geht um die Untersuchung einer Darstellung $\rho: G \to \mathrm{Isom}(M)$ einer Gruppe vom Typ F_∞ auf einem metrischen CAT(0)-Raum M. Wählt man einen zusammenziehbaren freien G-CW-Komplex X und eine ρ-äquivariante stetige Abbildung $h: X \to M$, dann kann man das zu einem abstrakten (∞ fernen) Randpunkt $e \in \partial M$ gehörige horozyklische Umgebungsystem via h nach X liften und damit dem Paar (ρ, e) die Qualität eines k-fachen Zusammenhangs zuordnen, die von der Wahl von X und h unabhängig ist. Auf diese weise kann im Raum aller Darstellungen $R(G) = \{\rho: G \to \mathrm{Isom}(M)\}$ (M fest) die Invariante

$$\Sigma^m(G) = \{\rho \mid (\rho, e) \text{ ist } k\text{-zsh} \ (\forall\, k < m)\ (\forall\, e \in \partial M)\}$$

definiert werden

Satz 1. $\Sigma^m(G)$ ist offene Teilmenge von $R(G)$

Satz 2. Für eigentlich diskontinuierliche cokompakte $\rho \in R(G)$ gilt $\rho \in \Sigma^m(G) \Leftrightarrow \ker \rho$ vom Typ F_m.

Im Spezialfall $m=0$, $M =$ hyperbolischer Raum $\mathbb{H}^n$ erhält man daraus das Resultat von A. Weil, dass alle zu einer diskreten + cocompakten Darstellung $\rho: G \to SL_n(\mathbb{R})$ hinreichend benachbarten diskreten Darstellungen ρ' ebenfalls cocompakt sind. Für $m \geq 1$ das "schwache Starrheitsresultat", dass in der Situation von Satz 2 alle zu einer Operation ρ mit $\ker \rho$ vom Typ F_m hinreichend benachbarten Operationen ρ' ebenfalls $\ker \rho'$ vom Typ F_m erfüllen.

R. Bieri

12. 4. 1996

Eigenwerte von Laplace Operatoren
(Fritz Grunewald, Düsseldorf)

Sei $\mathbb{H}^n$ $(n \geq 2)$ der n-dimensionale hyperbolische Raum und Γ eine diskontinuierliche Gruppe von Isometrien von Γ. Der Laplace Operator von $\mathbb{H}^n$ definiert dann einen Operator auf dem Hilbertraum $L^2(\Gamma \backslash \mathbb{H}^n)$. In meinem Vortrag habe ich dargestellt was über das Spektrum (vor allem das diskrete) dieses Operators bekannt ist. Außerdem habe ich diskutiert welches Licht die Computerrechnungen, die ich mit W. Huntebrinker durchgeführt habe, auf die Vermutungen von Roelcke-Selberg und Sarnak, Philipps werfen.

(19.4.96).

Fritz Grunewald

26.4.96 The Spherical Space Form Problem

If M^3 is a closed, oriented 3-manifold admitting a Riemannian metric of constant positive curvature, then $\pi_1 M^3$ is a finite group, and moreover, $M^3 = S^3/\Gamma$ is the quotient of the 3-sphere by a finite group $\Gamma \subset SO(4)$ acting freely by isometries. A fundamental question is 3-dimensional topology is the following generalization of the Poincaré conjecture: is every closed, oriented 3-manifold M^3 with <u>finite</u> $\pi_1 M^3$ homeomorphic to a spherical space form S^3/Γ? In 1925, H. Hopf listed all the finite groups Γ with a fixed-point free representation into $SO(4)$, and asked if this list contains <u>all</u> the finite fundamental groups of 3-manifolds. In 1957, J. Milnor gave a list of possible $\pi_1 M^3$, satisfying all the necessary conditions known at the time. In the 1960's, 1970's and 1980's a number of mathematicians contributed to the study of this problem, including R. Swan, C.T.C. Wall, R. Lee, C.B. Thomas, R.J. Milgram and I. Madsen. As a result of this work, the difference between Hopf's list and Milnor's list was reduced to deciding whether any group $Q(8p,q)$ could appear as $\pi_1 M^3$. Recently, in joint work with <u>Ronnie Lee</u> we prove that NONE of the groups $Q(8p,q)$ can be fundamental groups of 3-manifolds. In particular, we answer Hopf's question by showing that all the finite $\pi_1 M^3$ appear in his list. The method of proof is to translate the question into a 4-dimensional problem by constructing a suitable 4-manifold (assuming the existence of some M^3 with $\pi_1 M^3 = Q(8p,q)$). Then techniques from Yang-Mills gauge theory and the Donaldson moduli space are used to derive a contradiction.

Ian Hambleton
MPI + McMaster.

3.5.96 Exceptional modules

(Dieter Happel, Chemnitz)

Let $\vec{\Delta}$ be a finite, connected quiver without oriented cycles. For a field k let $\mathcal{R}(\vec{\Delta})$ be the category of finite-dimensional representations of $\vec{\Delta}$ over k. A representation X is called exceptional if $\operatorname{End} X = k$ and $\operatorname{Ext}^1(X,X)$. If $\underline{\dim} X$ is the dimension vector of an exceptional representation X then $\underline{\dim} X$ is a positive real root in the root system of the Kac-Moody Liealgebra associated with the underlying graph Δ of $\vec{\Delta}$. If $\vec{\Delta}$ is of wild representation type a theorem of (H, Hartlieb, Kerner, Unger) asserts that there exist only finitely many components of the Auslander-Reiten quiver of $\vec{\Delta}$ of type $\mathbb{Z}A_\infty$ containing exceptional representations of quasi length ≥ 2. In general is the quasilength of exceptional representations bounded by $n-2$, where n is the number of vertices in $\vec{\Delta}$.

Complete exceptional sequences are investigated in a similar way as in an analogous theory of coherent sheaves on smooth projective varieties. A sequence $(X_1, \dots, X_n)$ of exceptional representations is called exceptional if $\operatorname{Hom}(X_i, X_j) = \operatorname{Ext}^1(X_i, X_j) = 0$ for $i > j$. A theorem of Crawley-Boevey asserts that there exists a transitive operation of the braid group B_n on $\mathcal{E}(\vec{\Delta})$ the set of all complete exceptional sequences. In case Δ is Dynkin and only in this case $\mathcal{E}(\vec{\Delta})$ is finite. For example if Δ is of type $\mathbb{A}_n$ then $|\mathcal{E}(\Delta)| = (n+1)^{n-1}$.

If $\Phi_{\vec{\Delta}}$ denotes the Coxeter transformation and the right perpendicular category of X is equivalent to $\mathcal{R}(\vec{\Delta}_0)$ the following formula holds:

$$\operatorname{tr} \Phi_{\vec{\Delta}_0} = \operatorname{tr} \Phi_{\vec{\Delta}} + q_{\vec{\Delta}}(x + \Phi_{\vec{\Delta}}(x)) - 1,$$

where $x = \underline{\dim} X$ and $q_{\vec{\Delta}}$ the Tits quadratic form associated with $\vec{\Delta}$.

D. Happel

10.05.96 Pairing on formal modules and the kernel of reduction of an elliptic curve

Let K be a local field, and let E be an elliptic curve defined over K. Consider the one parameter group $F(x,y)$ relating to the elliptic curve E. The formal module $F(\mathfrak{M})$ is isomorphic to the kernel of reduction of $E \bmod \mathfrak{M}$, where $\mathfrak{M}$ denotes the maximal ideal of the ring of integers of K. One may wish to construct ~~ed~~ a nondegenerate pairing on $F(\mathfrak{M})$ analogous to the Hilbert symbol on the multiplicative group of a local field. We study the more general problem of constructing such a pairing on an abstract module $F(\mathfrak{M})$. We consider a Lubin-Tate formal group defined over the ring of integers $\mathcal{O}$ of a subfield $k \subset K$. We make the following assumptions: ~~in~~ the module $F(\mathfrak{M})$ is to contain the kernel of the isogeny $[\pi^n](x)$ for some $n \geq 1$, where π stands for an uniformising element in k.

Th. One can explicitly construct a pairing

$${}_F\langle\cdot\,;\cdot\rangle_F : F(\mathfrak{M}) \times F(\mathfrak{M}) \to \operatorname{Ker}[\pi^n]$$

such that (a) ${}_F\langle\cdot\,;\cdot\rangle_F$ is bilinear;

(b) ${}_F\langle\cdot\,;\cdot\rangle_F$ is skew-symmetric

(c) the right (left) kernel of the pairing coincides with $H +_F [\pi^n] F(\mathfrak{M})$, H being the submodule of the primary elements in $F(\mathfrak{M})$)

(Востоков) (MPG in Berlin)

10.5.96

7.5.96 Perron-Frobenius actions of free groups on $\mathbb{R}$-trees

Let T be an $\mathbb{R}$-tree, i.e. a metric space ~~with~~ where geodesics are uniquely determined by their endpoints. Assume that a free group F_n of finite rank n acts on T by isometries and assume that the action is minimal (no proper F_n-invariant subtree), non-trivial (no fixed point for all of F_n), and small (the stabilisers of non-degenerated arcs are cyclic or trivial). Let $H : T \to T$ be a homothety with stretching factor $\lambda \gneq 1$, such that $\alpha(w) \cdot H = H w : T \to T$ for all $w \in F_n$ and some $\alpha \in \mathrm{Aut}\, F_n$. Assume that α has a train track representative $f : \Gamma \to \Gamma$, i.e. $\pi_1 \Gamma = F_n$, $f_* = \alpha$, $f(\mathrm{Vertices}(\Gamma)) \subset \mathrm{Vertices}(\Gamma)$, $f^t|e$ is locally injective for all $t \geq 0$ and all edges e of Γ.

Thm: Then T is a Perron-Frobenius tree (i.e. T is determined by the Perron-Frobenius eigenvector of the non-negative transition matrix $M(f)$).

A similar statement holds for relative train track representatives and hence (by [Bestvina-Handel, Annals of Math 92]) for all $\alpha \in \mathrm{Aut}\, F_n$. This determines all α-fixed points on the boundary of Culler-Vogtmann space with $\lambda > 1$.

Martin Lustig

Dichte dreiecksfreie Graphen

Es wurden dreiecksfreie Graphen unter den Bedingungen untersucht,

- daß der Minimalgrad groß ist und
- daß der Grad eines regulären dreiecksfreien Graphen gleich der Unabhängigkeitszahl ist.

Für Minimalgrad $\delta > n/3$, wobei n die Ordnung des Graphen ist, lassen sich starke Aussagen über die Struktur des Graphen treffen. So läßt sich zum Beispiel der Umfang, die Länge eines längsten Kreises, in Polynomialzeit bestimmen. Für $\delta > 10n/29$ läßt sich sogar die Struktur mittels Homomorphismen präzise beschreiben. Andersherum scheint die starke Struktur unterhalb von $n/3$ sofort verloren zu gehen und innerhalb der Klasse von Δ-freien Graphen mit Minimalgrad $> (1-\varepsilon)n/4$ $(\varepsilon > 0)$, läßt sich für einige Graphenparameter (z.B. Umfang) sogar zeigen, daß die Bestimmung NP-schwer ist.

Für Δ-freie Graphen mit Grad = Unabhängigkeitszahl wurden ebenfalls starke Struktureigenschaften nachgewiesen und Konstruktionen unendlicher Serien angegeben, mittels derer Δ-freie Graphen mit sehr speziellen Zusatzeigenschaften erzeugt werden konnten.

Stephan Brandt
FU Berlin

31.05.96 Lokal endliche, einfache Gruppen

(Ulrich Meierfrankenfeld, East Lansing und Bielefeld)

Sei G eine lokal endliche, einfach Gruppen. Während des Vortrages werden verschieden Beispiele für G diskutiert. Die Klassifikation der linear enddefinitären lokal endlichen Gruppen wurde präsentiert. Gruppen vom 1-, p- und ∞-Typ werden definiert und die folgende Sätze erwähnt:

Satz: Genau eine der folgenden Aussagen gilt für G:

(1) G ist finitär

(2) G ist vom 1-Typ.

(3) G ist vom p-Typ für genau eine Primzahl p.

(4) G ist vom ∞-Typ.

Satz: Ist G vom p-Typ, so besitzt G eine Kegel-Überlagerung $\{(H_i, M_i) \mid i \in I\}$ so daß gilt

(1) $H_i / M_i \cong PSL_{K_i}(V_i)$

(2) $H_i / O_p(H_i) \cong Cl_{K_1}(V_1) \circ Cl_{K_2}(V_2) \circ \dots Cl_{K_n}(V_n)$

(3) Ist $H_j \leq H_i$ so operiert H_j block-diagonal auf $V_1, \dots, V_n$

Satz: G ist vom ∞-Typ genau dann wenn G vom regulär alternierenden Typ ist.

Satz: Jede abzählbar lokal endliche, einfache Gruppe besitzt eine ~~einfache~~ maximale Untergruppe

Ulrich Meierfrankenfeld

7.6.96 Mannigfaltigkeiten positiver Skalarkrümmung und die Baum-Connes Vermutung

Stephan Stolz, Notre Dame, USA

Berichtet wurde über den Stand der Dinge die Charakterisierung solcher Mannigfaltigkeiten betreffend, die eine Riemannsche Metrik positiver Skalarkrümmung zulassen. Zentral ist hier eine Vermutung von Gromov-Lawson, später von Rosenberg wie folgt modifiziert:

<u>Gromov-Lawson-Rosenberg Vermutung:</u>

Es sei M eine spin Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 5$, kompakt mit $\pi_1(M) = \pi$. Dann besitzt M genau dann eine Metrik mit positiver Skalarkrümmung wenn ein "Indexhindernis" $\alpha(M) \in KO_n(C^*_r\pi)$ (= K-Theorie der reduzierten Gruppen C^*-Algebra) verschwindet.

Diese Vermutung wurde mit homotopie theoretischen Methoden von mir für $\pi = \{1\}$ bewiesen und für π mit periodischer Kohomologie in Zusammenarbeit mit Botvinnik und Gilkey. Eine Abschwächung dieser Vermutung ~~ist wahr~~ erhält man indem man M durch $M \times B \times \dots \times B$ ersetzt, wobei B eine 1-zshg. spin Mannigfaltigkeit der Dimension 8 mit $\hat{A}(B) = 1$ ist. Diese "stabile" Vermutung stimmt für endliche π (Rosenberg + Stolz), und für alle solche π für die die "Baum-Connes-Abbildung" injektiv ist (Stolz), z.B. für diskrete Untergruppen von Liegruppen.

Stephan Stolz

14/6/96 Elliptic curves over totally real fields

Kazuhiro Fujiwara
Nagoya University

Let E be an elliptic curve over a totally real field F. For $F = \mathbb{Q}$, A. Wiles showed such a curve is modular under semi-stable assumption, i.e.,

$$L(E, s) = L(f, s)$$

holds for a modular form f on $\Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{H}$.

In the lecture, such modularity result will be shown, under semi-stability and some technical assumptions, for general F.

To deduce the modularity, the essential step is the determination of the universal deformation ring R of a Galois representation (mod p).

An abstract formulation, Taylor-Wiles system, will be given in terms of commutative algebra. One constructs such a system from the deformation rings of the mod p representation and Shimura curves in case of odd degree, and some zero-dimensional schemes in even degrees.

Then we show the Mazur conjecture $R \simeq T$ in the minimal case, and raise the level under technical assumptions. To apply this for elliptic curves, "lowering the level" argument is necessary.

K. Fujiwara

藤原 一宏

Stabilitätsradien dynamischer Systeme 14.6.96

Ein zentrales Problem bei der Anwendung mathematischer Ergebnisse im Bereich Automatisierungstechnik ist die Modellunsicherheit (Parameterabweichungen, Störungen, bewußte Modellvereinfachungen). Daher ist es wichtig, gewünschte Eigenschaften nicht nur am Modell zu verifizieren sondern auch die Robustheit dieser Eigenschaften gegenüber Störungen des Modells abzuschätzen.
Als Robustheitsmaß für die Stabilität eines dynamischen Systems, bzw. einer Gleichgewichtslage, haben A. J. Pritchard (U. Warwick) und ich den Begriff des Stabilitätsradius eingeführt. Im Fall der einfachsten Modellklasse

$\dot{x} = Ax \qquad (A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A exp. stabil, d.h. $\sigma(A) \subset \mathbb{C}_-)$

und von Störungen der Form

$A \rightsquigarrow A + D\Delta E \quad (D \in \mathbb{R}^{n\times l}, E \in \mathbb{R}^{q\times n}$ gegeben, $\Delta \in \mathbb{K}^{l\times q}$ unbekannt)

ist der Stabilitätsradius wie folgt definiert:

$r_{\mathbb{K}}(A, D, E; \mathbb{C}_-) = \inf\{\|\Delta\|;\ \Delta \in \mathbb{K}^{l\times q}, \sigma(A + D\Delta E) \not\subset \mathbb{C}_-\}$

Hierbei ist $\|\cdot\|$ eine gegebene Operatornorm, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.
Der reelle Stabilitätsradius ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ist schwieriger zu analysieren als der komplexe $r_{\mathbb{C}}$. Der komplexe Stabilitätsradius kann mit Hilfe eines assoziierten Input-Output-Operators und eines optimalen Steuerungsproblems charakterisiert werden. Das wurde im Vortrag erläutert. Sodann wurde das unterschiedliche Verhalten des reellen und des komplexen Stabilitätsradius bei diversen Erweiterungen der Störungsklassen (zeitvariante, nichtlineare und dynamische Störungen) dargestellt.

Diederich Hinrichsen
U. Bremen

Generalised Hamming weights of Reed-Muller codes

21 juni 1996

(joint work with Petra Heijnen)

We solve the following problem.

Let $f_1, \dots, f_r$ be linearly independent polynomials in m variables with coefficients in $\mathbb{F}_q$ of degree u or less. What is the maximum number of solutions in $\mathbb{F}_q^m$ of the system of equations $f_1 = \dots = f_r = 0$?

An equivalent problem is concerned with generalised Hamming weights (GHW) of Reed-Muller (RM) codes, which was treated by V. Wei ($q=2$) and A. Ashikhmin ($q=3$)

A general theory of linear codes defined in terms of an evaluation map on an $\mathbb{F}_q$-algebra R, together with an order function $\rho : R \longrightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{-\infty\}$, gives a lower bound on the GHW's. For RM codes this bound is tight, and in this way the problem is translated into a problem on extremal poset theory which has a known solution by Macaulay, Kruskal-Katona and Clements-Lindström.

Ruud Pellikaan

EINDHOVEN, temporarily ESSEN

28.06.96.

Über eine Klasse kubischer Formen und ihre kohomologischen Invarianten

In diesem Vortrag wurde mit den Albertformen eine Klasse von im Sinne T. A. Springers zulässigen kubischen (Formen) definiert, die auf vielfältige Weisen mit algebraischen Gruppen, insbesondere solchen vom Ausnahmetypus F_4, zusammenhängen. Dabei wurde das Klassifikationsproblem für Albertformen in seiner historischen Entwicklung nachgezeichnet. Es kam die Freudenthalkonstruktion und die Tits-Konstruktion zur Sprache, und es wurden die neuerdings von Serre vorgeschlagenen kohomologischen Invarianten ausführlich diskutiert

Um insbesondere die Invarianten modulo 2 zu behandeln, wurde der Begriff des isotropen Modells eingeführt: Ein isotropes Modell einer Albertform A ist eine isotrope Albertform A_{iso} mit $A \otimes_k K \cong A_{iso} \otimes_k K$ für jeden Isotropiekörper K/k von A. Es gilt der Satz, daß jede Albertform ein bis auf Isomorphie eindeutiges isotropes Modell besitzt

Bezüglich der Invarianten modulo 3 wurde ein elementarer Existenzbeweis skizziert, der auf Vorschläge von Serre zurückgeht. Als Anwendung wurde ein Beweis eines Satzes vom Skolem-Noether-Typ vorgeführt.

Holger P. Petersson
Fernuniversität in Hagen

5.07.96

A rationality problem for linear algebraic groups.

Vladimir Chernousov, Minsk, Belarus

Let G be a connected semisimple algebraic group defined over a perfect field F.

Rationality problem: When is G rational over F?

It is known (and easy to show) that a weaker property of F-unirationality holds for an arbitrary connected algebraic group. So the problem of F-rationality of G is actually the problem of Luroth's type: when a subfield of a purely transcendental extension of a field F is itself purely transcendental. It is easy to show that for a split group G the variety of G is rational over the basic field; in particular, G is always rational over a closed field. But for any field F this is not the case. First, Serre constructed non-rational G which was neither simply connected nor adjoint, and then Platonov and Merkur'ev gave examples of non-rational G also in simply connected and adjoint cases respectively. Nevertheless, in some important cases (i.e. for some groups over special fields) it is possible to prove that G is rational.

Theorem 1. Let G be a simple algebraic group of type not A_n defined over a p-adic field F. Then the variety G is rational over F.

Theorem 2. Let G be a connected semisimple algebraic group without simple factors of types E_i, $i=6,7,8$ defined over $\mathbb{R}$. Then the variety G is rational over $\mathbb{R}$.

Theorem 3. Let f be a quadratic form over a field F of characteristic $\neq 2$ and $Spin(f)$ be the corresponding spinor group. Then the variety $Spin(f)$ is F-rational in the following cases:

a) F is arbitrary and f is F-isotropic;

b) F is arbitrary and $f = \sum_{i=1}^{2} x_i^2$

c) $F = \mathbb{Q}, \mathbb{Q}_p, \mathbb{R}$

d) f is either a Pfister form or a Pfister neighbour.

В Черноусов

12.07.96

Quantitative Oppenheim conjecture

Grigorii Margulis, Yale University

Let Q be an indefinite nondegenerate quadratic form in n variables. In 1986 the speaker proved that if $n \geq 3$ and Q is not proportional to a form with rational coefficients then $Q(\mathbb{Z}^n)$ is dense in $\mathbb{R}$. This proved the Oppenheim conjecture which was stated by Oppenheim in 1929.

Let $N^Q_{(a,b)}(T)$ denote the number of integral points v in a ball of radius T with $a < Q(v) < b$. According to the just mentioned result, $N^Q_{(a,b)}(T) \to \infty$ when $T \to \infty$. One might expect that

$$(*) \quad \lim_{T\to\infty} \frac{N^Q_{(a,b)}(T)}{\mathrm{Vol}(\{v \in \mathbb{R}^n \mid a < Q(v) < b, \|v\| < T\})} = 1$$

(under the same assumption that $n \geq 3$ and Q is not a multiple of a rational form). It was shown by S.G. Dani and the speaker that $(*)$ is true but only if lim is replaced by liminf. Rather surprisingly the asymptotic formula $(*)$ holds if the signature of Q is not $(2,1)$ or $(2,2)$ and does not hold for general irrational forms of these two signature (it was proved recently by A. Eskin, S. Mozes and the speaker). In its totality the proof involves the theory of Lie groups and algebraic groups, ergodic theory, representation theory, reduction theory, geometry of numbers and some other topics. But the main new ingredient is some upper estimate for integrals of certain functions over orbits of certain subgroups.

G. Margulis

18.10.96

Die Thompson-Untergruppe

Die Thompson-Untergruppe wurde 1964 von J. G. Thompson als Erzeugnis der abelschen Untergruppen maximaler Ordnung endlicher p-Gruppen eingeführt. Sie hat seitdem eine Reihe von Anwendungen in der endlichen, vornehmlich nicht-auflösbaren Gruppentheorie erfahren. Zu erwähnen sind insbesondere das p-Nilpotenzkriterium von Thompson, der ZJ-Satz von Glauberman und eine Reihe von Faktorisierungssätzen und ihre Anwendungen, auch bei der Kennzeichnung der endlichen einfachen Gruppen. Neben diesen klassischen Resultaten wurde eine Verallgemeinerung der Thompson-Untergruppe für nicht notwendigerweise endliche Gruppen angegeben, mit deren Hilfe Charakterisierungen von Gruppen über Cayley-Divisionsalgebren und Automorphismengruppen von Moufang-Ebenen bewiesen wurden.

Bernd Baumann

26.10.1996

Weierstrass-Formeln für Flächen mit vorgegebener mittlerer Krümmung

Minimalflächen im $\mathbb{R}^3$ lassen sich durch die Formeln von Weierstrass (1866) mit Hilfe einer meromorphen Funktion und eines holomorphen Differentials darstellen. Beispiele: Die Schwarzsche Minimalfläche (1865/67); die Minimalfläche von Costa (1984): Immersion (sogar Einbettung) eines Torus mit 3 Enden. Im Anschluss an Kenmotsu (1979) wird der Frage nachgegangen, inwiefern analoge Formeln für andere Flächen gelten: Flächen mit $H \neq 0$ (H = mittlere Krümmung) sind eindeutig festgelegt durch ihre konforme Struktur, ihre Gauss-Abbildung $g: M^2 \to S^2$ und ihre mittlere Krümmung $H: M^2 \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, wobei eine Integrabilitätsbedingung für g, H erfüllt sein muss, die sich allerdings nicht besonders gut handhaben lässt (bisher). Das Problem wurde neuerdings von Pedit und Pinkall (1996) unter neuen formalen Gesichtspunkten wieder aufgenommen.

K. Voss

8.11.96

Darstellungen endlicher Chevalley-Gruppen in fremder Charakteristik

Sei $G = G(q)$ eine Chevalley-Gruppe über dem endlichen Körper mit q Elementen, z.B. $G = GL_n(q)$. In meinem Vortrag berichte ich über einige neuere Ergebnisse aus der Darstellungstheorie von G in fremder Charakteristik, d.h. über Körpern k mit $\mathrm{char}(k) = \ell \nmid q$.
Zwei Zugänge haben sich als besonders hilfreich bei der Klassifikation der einfachen kG-Moduln erwiesen: die sogenannte Harish-Chandra-Philosophie zum einen, und die Deligne-Lusztig-Theorie zusammen mit Brauer-Theorie zum anderen. Diese beiden Zugänge werden diskutiert und die damit bisher erreichten Ergebnisse vorgestellt.
Bei der Berechnung der ℓ-modularen Zerlegungsmatrizen von G (eine Aufgabe, die sich aus der Brauertheorie ergibt) haben sich gewisse endlich-dimensionale k-Algebren, sogenannte q-Schuralgebren (QSA abgekürzt) als besonders nützlich herausgestellt. Diese wurden von Dipper und James für Weylgruppen vom Typ A (also symmetrische Gruppen) eingeführt und zur Berechnung der Zerlegungsmatrizen von $GL_n(q)$ ~~eingefü~~ eingesetzt.
Zur Behandlung der anderen klassischen Gruppen definierten Geck und ich QSAs vom Typ B und D, die sich unter bestimmten Voraussetzungen an $\ell = \mathrm{char}(k)$ als Morita äquivalent zu denen vom Typ A erwiesen.
So konnten Gruber und ich die Zerlegungsmatrizen der klassischen Gruppen (unter diesen Voraussetzungen an ℓ) auf diejenigen von $GL_n(q)$ zurückführen.
Zum Schluß berichte ich noch über den Kenntnisstand der Darstellungstheorie der QSAs vom Typ A, bei ~~denen~~ der gewisse Quantengruppen eine große Rolle spielen.

Gerhard Hiß (Heidelberg)

15. 11. 96

On analytic torsion over C^*-algebras.

The Reidemeister torsion for cell spaces has a wonderfull generalization in the direction of substituting the cell cochain complex for the de Rham complex of differential forms on a smooth manifold M. This construction was done by Ray & Singer in 1971 using so called ζ-function for the Laplace operators acting on the differential forms. But if one want to consider the same situation in the presence of fundamental group some difficulties appear if one use infinite dimensional representations of fundamental groups. The last results in this direction say that for universal covering $\tilde{M}$ of the manifold M one can construct an analogue of Reidemeister torsion (so called analytic torsion) not for any manifold but for that where Novikov-Shubin invariants are positive. All of these can be expressed in terms of a regular representation of fundamental group π in the Hilbert space $l_2(\pi)$ that leads to von Neumann algebra of the group π. The problem discussed in the lecture is to what degree one can provide these technique for arbitrary C^*-algebras. We talks about joint results with A. Carey and Mathai Vargese (Adelaide University) where we constructed so called relative analitic torsion for arbitrary C^*-algebras.

Alexander S. Mishchenko (Moscow).

The spectral geometry of Riemannian Submersions

Peter B Gilkey and JeongHyeong Park

Let $\pi : Z \to Y$ be a Riemannian submersion of closed manifolds.
Let Δ^p be the Laplacian on the space of smooth ~~class~~ p-forms.
Let $E(\lambda, \Delta^p) = \{\phi : \Delta^p \phi = \lambda \phi\}$.

Theorem 1: ⓐ Let $p=0$. Then $\pi^* \Delta^p_Y = \Delta^p_Z \pi^* \Leftrightarrow$ the fibers of π are minimal.

ⓑ Let $p>0$. Then $\pi^* \Delta^p_Y = \Delta^p_Z \pi^* \Leftrightarrow \forall \lambda \, \exists \mu \;\; \pi^* E(\lambda, \Delta^p_Y) \subseteq E(\mu, \Delta^p_Z)$
$\Leftrightarrow$ the fibers of π are minimal and the horizontal distribution is integrable.

Theorem 2: ⓐ Let $0 \neq \phi \in E(\lambda, \Delta^p_Y)$ and $\pi^* \phi \in E(\mu, \Delta^p_Z)$.
if $p=0$, $\lambda = \mu$ (eigenvalues can not change)
if $p \neq 0$, $\lambda \leq \mu$ (eigenvalues can only increase).

ⓑ Given $\overset{2 \leq p}{0} \leq \lambda < \mu < \infty$, $\exists \, \pi : Z \to Y$ and $0 \neq \phi \in E(\lambda, \Delta^p_Y)$
so $\pi^* \phi \in E(\mu, \Delta^p_Y)$ (eigenvalues can change for $p \geq 2$).

If $\pi : Z \to Y$ is a Hermitian submersion in the complex setting there are similar results. Let ω be the curvature of the Horizontal distribution

Theorem 3 The following assertions are equivalent. Fix (p, q)

ⓐ $\pi^* \Delta^{p,q}_Y = \Delta^{p,q}_Z \pi^*$

ⓑ $\pi^* E(\lambda, \Delta^{p,q}_Y) \subseteq E(\mu(\lambda), \Delta^{p,q}_Z)$

ⓒ the fibers of π are minimal and

(i) If $(p,q) = (0,0)$ no other condition

(ii) if $q=0$ and $p>0$ $\quad J^* \omega = -\omega$

(iii) If $q>0$ and $p=0$ $\quad J^* \omega = \omega$

(iv) If $p>0$, $q>0$ $\quad \omega = 0$.

Peter B Gilkey

22. 11. 96

GRAPHISCHE CODES

Bekanntlich bildet der Kreisraum eines zusammenhängenden Graphen $G = (V,E)$ mit $|V| = p$ und $|E| = q$ als binärer Vektorraum betrachtet einen $[q, q-p+1, g]$-Code $C_E(G)$, wobei g die Taillenweite von G ist; man kann somit $t = \lfloor \frac{g-1}{2} \rfloor$ Fehler korrigieren. Derartige Codes wurden vor etwa 30 Jahren systematisch von Hakimi & Bredeson untersucht. Dabei galt das Interesse der Erweiterbarkeit zu $[q, q-p+1+k, g]$-Codes sowie der effektiven Decodierung solcher graphischen Codes. In einer Reihe gemeinsamer Arbeiten mit Scott Vanstone (Univ. of Waterloo) wurden die Ansätze von Hakimi & Bredeson aufgegriffen; wir konnten sowohl bessere Augmentierungen konstruieren (unsere Verfahren verwenden beliebige gerade binäre Hilfscodes, um $C_E(G)$ um geeignete Untergraphen von G zu erweitern) als auch bessere Decodierungsalgorithmen angeben. So können einige Klassen graphischer Codes mit Hilfe von Methoden der kombinatorischen Optimierung für feste t in $O(q)$ Schritten, also in linearer Zeit, decodiert werden. Wir hoffen, daß derartige Codes damit auch von praktischem Interesse sein können. Im Vortrag wird ausführlich über die angesprochenen Aspekte referiert, wobei der Code des Petersen-Graphen als begleitendes Beispiel verwendet wird.

Dieter Jungnickel
Univ. Augsburg

29.11.96

Konstruktive Theorie Diskreter Strukturen u. Anwendungen

Anhand von Beispielen (lineare Codes, chemische Isomere und t-(v,k,λ)-Designs) werden einige grundlegende Strategien besprochen, die sich beim Konstruieren dieser Strukturen als nützlich erwiesen haben:

1. Die Äquivalenzrelation, die äquivalente numerierte Strukturen zu unnumerierten zusammenfaßt, erzeugt man durch eine geeignete Gruppenoperation.

2. Man verwende Doppelnebenklassen und Transversalen von solchen Mengen zur Konstruktion, auch zur Reduzierung der Komplexität.

3. Zur Berechnung solcher Transversalen benutze man "Leporellos" von Untergruppen.

4. Zur weiteren Reduzierung der Komplexität schreibe man Gruppen von Automorphismen vor.

Adalbert Kerber, Bayreuth

6.12.96

Das glatte Dual p-adischer Gruppen

Sei G die Gruppe der K-rationalen Punkte einer zusammenhängenden reduktiven algebraischen Gruppe über einem nichtarchimedischen lokalen Körper K. Da G eine lokalkompakte total-unzusammenhängende topologische Gruppe ist, fordert man für komplexe Darstellungen V von G folgende Stetigkeit: V heißt glatt, falls die Stabilisatoren $\{g \in G : gv = v\}$ für alle $v \in V$ offen sind. Das Interesse an dieser Art Darstellungen kommt aus der Zahlentheorie, wo sie zur Klassifikation gewisser zahlentheoretischer Objekte dienen sollen (-> Langlands-Programm). Wir bilden nun die Menge $\hat{G}$ aller Isomorphieklassen irreduzibler glatter G-Darstellungen. Diese Menge $\hat{G}$ – das glatte Dual von $\hat{G}$ – trägt zwei natürliche Topologien: Die "komplexe" Topologie, die über die Konvergenz von Matrixkoeffizienten definiert ist, und die Jacobson-Topologie, die über Inklusionsbeziehungen zwischen Annullatoridealen in der Gruppenalgebra gegeben wird. Es entsteht also eine gewisse Analogie zu einer (singulären) komplexen algebraischen Varietät. Da $\hat{G}$ in der komplexen Topologie aber nicht hausdorffsch ist, ist die korrekte Analogie aber die zur nichtkommutativen Geometrie à la Connes.
In diesem Vortrag geben wir zunächst eine Übersicht über Bernsteins Berechnung des Zentrums der Kategorie aller glatten G-Darstellungen. Diese läßt sich interpretieren als eine Berechnung der "Hausdorffisierung" von $\hat{G}$ durch eine explizite lokal-algebraische komplexe Varietät. Anschließend wird im Falle $G = GL_n(K)$ eine Stratifizierung von $\hat{G}$ selbst vorgestellt, deren Strata ebenfalls explizite komplexe algebraische Varietäten sind.

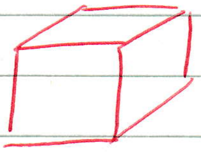
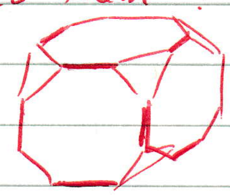
Peter Schneider, Münster

13. 12. 96

Polyhedra and their Names.

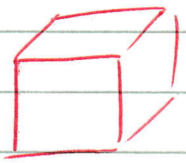
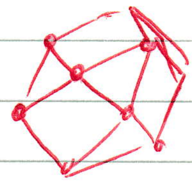
Although the (convex) polyhedra with regular faces and equal vertizes (ie, having a symmetry group transitive on the vertizes) were known to Archimedes, their traditional names are due to Kepler, who reconstructed Archimedes' work.

Kepler named first the Platonic solids the tetrahedron, hexahedron, octahedron, dodecahedron, icosahedron by their numbers of faces, and then from these the remaining Archimedean solids in terms of three operations: from a polyhedron P we obtain tP ("truncated P") by cutting off the corners by planes near to them:

eg  yields 

C = cube   tC = truncated cube.

For Kepler's second operation aP or "ambo-P" one moves the truncating planes just so much closer to the centre that the edges of the original polyhedron shrink to points:

 yields 

C = cube   aC = CO = cuboctahedron.

Since ~~Kepler this~~ aP = aQ, where Q is the polyhedron dual to Q, Kepler regarded it as obtained by marrying P & Q, and gave it a name obtained by amalgamating those for P & Q.

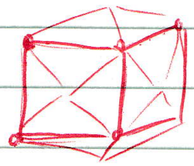
Kepler's third & final "snub" operation also has this property sP = sQ.

Kepler described the duals of some of the Archimedean polyhedra, but did not systematically dualize his notation. We shall, using ~~kP~~ operators

"kis": $P \to kP$ "umbo": $P \to uP$ "gyro": $P \to gP$

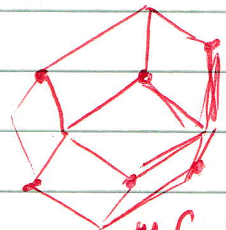
$uP = uQ$ $gP = gQ$

for the duals of Kepler's. We draw pictures for the first two:



kC

(tetrakis cube)



$uC = R_{12}$

(rhombic dodecahedron)

To obtain kP one places shallow pyramids on each face of P, & for uP makes these just steep enough that the triangular faces of adjacent ones coincide to give quadrilateral faces only.

This explains the most mysterious of Kepler's names, "rhombicuboctahedron" (RCO) for the ambo Polyhedron of the cuboctahedron (CO) & the rhombic dodecahedron (R_{12}).

It seems natural to study the class of "Keplerian polyhedra" defined by applying all 6 operations in any order to the tetrahedron. I shall show that ~~only~~ the ~~other Platonic~~ resulting polyhedra have names that are essentially unique, after we take account of the equalities mentioned above.

The above discussion is topological. However, there is a natural definition (which I shall give) of a "canonical" metrical polyhedron in each topological class, which does indeed pick out the traditional Platonic & Archimedean cases.

19. 12. 76

John Conway. Princeton.