Verkettungen und Flächen in 3-Mannigfaltigkeiten

Es ist ein klassischer und erfolgreicher Ansatz, orientierte Knoten und Verkettungen K in S^3 durch die Seifert-Paarung $H_1F \times H_1F \to \mathbb{Z}$ einer berandenden orientierten Fläche F zu untersuchen. Dies führt unter anderem zur Definition des Conway-Polynoms $\nabla_K(z) \in \mathbb{Z}[z]$, welches durch die Relation $\nabla - \nabla = z\nabla$ leicht induktiv berechenbar ist.

Der Seifertsche Ansatz kann wie folgt verallgemeinert werden. Sei M eine kompakte orientierte 3-Mft (möglicherweise $\partial M \neq \emptyset$). Wir definieren eine Verschlingungszahlabbildung (VZA) als eine Abb $lk: \mathcal{B}(M)$ = Bordismusmenge 2-gefärbter Verkettungen in M $\longrightarrow$ R = kommutativer Ring mit 1 und Involution τ, so daß gilt: $lk[K_1 \cup K_1', K_2] = lk[K_1, K_2] + lk[K_1', K_2]$, $lk[K_2, K_1] = \tau\, lk[K_1, K_2]$ und $lk[\ ] = 1$. Dann gilt: Es existiert eine VZA $\Longleftrightarrow$ $b_1(M)$ = Geschlecht von ∂M ($\Longleftrightarrow$ M ist Untermft. einer $\mathbb{Q}$-Homologie 3-Sphäre). In diesem Fall gibt es eine universelle VZA in einen Ring $R_M \cong \mathbb{Z}[\frac{1}{k}][x_{ij}]$, wobei k = maximaler Torsionskoeffizient, x_{ij} Unbestimmte, $1 \le i, j \le b_1(M)$. Mit Hilfe dieser VZA'n können Seifertpaarungen definiert und u.A. der folgende Satz bewiesen werden.

Satz: Ist $b_1(M)$ = Geschlecht(∂M) und $b_2(M) = 0$ (keine wirkl. Einschränkung), so gibt es eine Conway-Polynom-Abb.

$$\nabla : \left.\begin{matrix}\text{orient. Verkettungen,} \\ \text{nullhomolog in } M\end{matrix}\right/ _{\text{Isotopie}} \longrightarrow R_M[z],$$

welche $\nabla - \nabla = z\nabla$ erfüllt.

Wir diskutieren Sätze von Hoste und Levine betreffend Teilbarkeit von ∇ und Berechnung des ersten interessanten Koeffizienten. Es zeigt sich, daß nach Symmetrisierung der VZA die entsprechenden Aussagen im Rahmen obiger 3-Mften erfüllt bleiben.

Uwe Kaiser, SIEGEN

(10. 1. 97)

Kompakte Mannigfaltigkeiten mit positiver Schnittkrümmung

Uwe Abresch (Bochum)

Ein zentrales Problem der Riemannschen Geometrie besteht darin, Information über die globale Gestalt und den topologischen Typ einer Riemannschen Mannigfaltigkeit aus der Kenntnis von Schranken für deren lokale Invarianten wie etwa die Schnittkrümmung K_M zu erschließen. Positive Schnittkrümmung hat sich in diesem Zusammenhang als eine besonders tragfähige Voraussetzung erwiesen. Klassisch kennt man neben der Durchmesserabschätzung von Bonnet und Myers (1935) und neben Resultaten über die Fundamentalgruppe von M auch ausgefeilte Erkennungssätze wie den topologischen Sphärensatz (Rauch '51, Klingenberg '61), Berger's Starrheitssatz (1962), Berger's Pinching-Unterhalb-$\frac{1}{4}$-Satz (1983), oder auch den Durchmesser-Sphärensatz (Grove '77) und den Durchmesser-Starrheitssatz (Gromoll und Grove '87). Eine fundamentale Rolle in dieser Theorie spielen auch Klingenberg's Injektivitätsradiusabschätzungen für gerad- und ungeraddimensionale Mannigfaltigkeiten.

In den letzten Jahren hat es sowohl im Hinblick auf die theoretischen Resultate als auch in Bezug auf das Verständnis der Beispiele erhebliche Fortschritte gegeben. Der Ausgangspunkt für die neuen Ergebnisse ist:

Theorem 1 (—, Meyer '94):

Es gibt eine Konstante $\delta_{inj} \in (0{,}117, \frac{1}{4})$, derart daß der Injektivitätsradius einer einfach-zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M^n mit $\delta_{inj} < K_M \le 1$ mit deren konjugierten Radius übereinstimmt, also durch π nach unten abgeschätzt ist.

Die Konstante δ_{inj} ist explizit und dimensionsunabhängig; die Aussage des Theorems gilt für $\delta_{inj} = \frac{1}{4}(1+10^{-6})^{-1}$. Die Aussage, daß δ_{inj} notwendig $> 0.117 > \frac{1}{9}$ sein muß, ergibt sich durch das Studium der Geometrie der Berger-Sphären. Als erste Anwendung von Theorem 1 läßt sich Berger's Pinching-Unterhalb-$\frac{1}{4}$-Satz auf ungeraddimensionale Mannigfaltigkeiten ausdehnen, allerdings wiederum um den Preis ineffektiver Konstanten. Aber auch ein besseres Resultat ist möglich:

Theorem 2 (—, Meyer '96):

Es gibt eine Konstante $\delta_{odd} \in (0, \frac{1}{4})$, derart daß jede ungeraddimensionale, einfach-zusammenhängende Mannigfaltigkeit M^n mit $\delta_{odd} < K_M \le 1$ homöomorph zur Sphäre S^n ist.

Dieses Theorem gilt für $\delta_{odd} = \frac{1}{4}(1+10^{-6})^{-2}$. Neben Theorem 1 und dem Durchmesser-Sphärensatz basiert dieses Resultat auf dem erst kürzlich gelungenen Beweis des schon 1962 von Berger (als

Vermutung) formulierten Hufeisenlemmas auf ~~auf~~ Smale's Lösung der Poincaré Vermutung in Dimension ≥ 5. In Dimension 3 wird die Aussage von Theorem 2 bereits durch Hamiltons Resultate über den Ricci-Fluß abgedeckt.

Was die Liste der kompakten Mannigfaltigkeiten, die eine Metrik mit $K_M > 0$ zulassen, anbelangt, so kennt man neben den Sphären und den projektiven Räumen nur sehr wenige Beispiele. Vollständig klassifiziert ist die homogene Situation (Bérard Bergery '76). Des weiteren kennt man Doppelquotienten, die die 6-dimensionale Fahne $SU(3)/T^2$ respektive die Aloff-Wallach Serie $M^7_{k,l} := SU(3)/S^1_{k,l}$ verallgemeinern (Eschenburg '82), sowie, seit kurzem, eine weitere Serie von Doppelquotienten, die den 13-dimensionalen von Berger gefundenen normal-homogenen Raum verallgemeinern (Bazaikin '95). Taimanov hat im letzten Jahr eine total-geodätische isometrische Einbettung des Aloff-Wallach Raums $M^7_{1,1}$ in den 13-dimensionalen Berger-Raum angegeben, die die bis dato merkwürdige Koinzidenz der von Huang respektive der von Heintze berechneten Pinching-Konstanten zumindest partiell erklärt. Nachfolgend hat Th. Püttmann die Pinching Konstante für beide Räume von $\frac{16}{29\cdot 37}$ durch eine geeignete Deformation der Metrik auf $\frac{1}{37}$ verbessern können. Amüsanterweise wird das Optimum im 7-dimensionalen Fall durch eine bereits von McKenzie Wang angegebene Einstein-Metrik realisiert, während im 13-dimensionalen Fall das Optimum nicht durch eine Einstein-Metrik realisiert ist.

Es dürfte interessant sein, welche weiteren Eigenschaften beim detaillierten Studium der Beispiele noch zutage treten werden, und ob dies langfristig zu einer Klassifikation aller kompakten, einfach-zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten M mit $K_M > 0$ führt.

17. Januar 1997

Uwe Abresch (Bochum)

Nonabelian polynomial functors
T. Pirashvili

Let $\underline{C}$ be a category with sums and zero objects. Denote the sum of objects X and Y by $X \vee Y$. Let $F: \underline{C} \to$ Groups be a functor with $F(0)=0$. The cross-effect of F is given by
$$F(X|Y) = \ker\left(F(X\vee Y) \to F(X)\times F(Y)\right).$$
Similarly, one can define higher cross-effects $F(X_1|\dots|X_n)$. If n-th cross-effect vanishes, then F is called of degree $\le n$. Let $\underline{C}$ be the category of groups, (or Lie algebras, or associative algebras, ...), let $P_n(\mathbb{C})$ be the category of functors of degree $\le n$ from $\mathbb{C}$ to groups satisfying the following two conditions 1) F preserves the coequalisers 2) F preserves the filtered colimits. Then the following is true

Proposition. Assume that P is a full subcategory of $P_n(\mathbb{C})$ with following assumptions

i) For any Σ_n-module M, the functor $M^b \in P$, where
$$M^b(X) = M \otimes_{\Sigma_n} (X^{ab})^{\otimes n}.$$

ii) If
$$0 \to F' \to F \to F'' \to 0$$
is a central extension in $P_n(\mathbb{C})$, with $F', F'' \in P$ then $F \in P$

iii) If
$$0 \to F' \to F \to F'' \to 0$$
is a central extension in $P_n(\mathbb{C})$ with $F', F \in P$, then $F'' \in P$.

Then $P = P_n(\mathbb{C})$.

The origin of this proposition goes back to the theory of Schur of polynomial representations of general linear group.

From now we will discuss on more interesting notion, based on simplicial groups.

Let G_* be a simplicial group. We let denote by N_*G_* the Moore normalization of G_*. We recall that
$$N_n G_* = \bigcap_{0\le i<n} \ker d_i$$
whose boundary is the restriction of d_n on G_*.

We say that length of G_* is n if $N_i G_* = 0$, for $i > 0$ and $N_n G_* \neq 0$. We let $\ell(G_*)$ denote the length of G_*.

We will say that <u>simplicial</u> <u>degree</u> of functor F is $\leq n$, if for any simplicial object $X_* \in s\underline{C}$, one has

$$\ell(FX) \leq n\, \ell(X).$$

<u>Lemma</u>. If $T \in P_n(\mathcal{C})$, then simplicial degree of T is $\leq n$. Moreover (simplicial degree of T) $\leq n \cdot$ (degree $\frac{1}{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$).

<u>Theorem</u>. Let G_* be a simplicial group and M_* be a simplicial module over G_*, then

$$\ell(H_t(G_*, M_*)) \leq t\, \ell(G_*) + \ell(M_*),$$

where $H_t(G_*, M_*)$ denotes the simplicial group whose n-th component is $H_t(G_n, M_n)$.

<u>Corollary</u>. 1) Simplicial degree of the functor H_n: Groups $\to$ Ab is n.

2) Simplicial type of the functor K_n: Rings $\to$ Ab is finite, for any $n \in \mathbb{Z}$.

3) Simplicial degree of the functor of Andre-Quillen homology H^{AQ}: commutative algebras $\to$ modules is finite.

ფირაშვილი

7-02-97

The permutation group of primitive narrow-sense BCH-code

Pascale Charpin (INRIA, FRANCE)

The extended cyclic codes of length p^m, p a prime, which are invariant under the affine-group acting on $\mathbb{F}_{p^m}$, are called affine-invariant codes.

This class of codes includes codes of great interest, as primitive narrow-sense BCH-codes (extended), Generalized Reed-Muller codes or Reed-Solomon codes (extended).

With T.P. BERGER, we recently achieved the determination of the automorphism group of primitive narrow-sense BCH-codes. We used a general method which allows us to determine the automorphism group of any affine-invariant code.

Affine-invariant codes were characterized by Kasami et al. (1967). Delsarte later gave more general results, ~~giving~~ He stated a condition for a code to be invariant under a larger group — larger than $AGL(1,p^m)$, the group of affine ~~invariant~~ permutation on $\mathbb{F}_{p^m}$. For the work of Delsarte (1970) the groups of the RS-codes and of the GRM-codes were determined (A. Dur 1986, Berger-Charpin 1991). But the general problem has

~~re~~mained unsolved.

Recently, T.P. Berger has proved that any permutation σ which leaves invariant an affine-invariant code is an element of the general ~~linear~~ affine group (the group which acts ~~linearly on~~ on the $\mathbb{F}_p$-space $\mathbb{F}_{p^m}$).

From this result, we were able to give a formal expression of the automorphism ~~group~~ group of any affine-invariant code. This expression is sufficient for the determination of the group of a large class of codes, especially when m is a prime.

Otherwise there are many situations. Then we developed several tools devoted to the effective determination of permutation groups.

A cyclic code is well-defined by its zeros-set, that we identify to its defining-set. Our tools are based on combinatorial properties of the defining-sets of affine-invariant codes.

Pascale Charpin

HIGHER CLASS GROUPS OF ORDERS AND GROUP-RINGS.

Aderemi Kuku – University of Ibadan, Nigeria and International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy.

Let R be a Dedekind domain with quotient field F, Λ an R-order in a semi-simple F-algebra Σ. The notion of class group $Cl(\Lambda)$ of Λ is a natural generalisation of the notion of $Cl(R)$ (class group of R) which has been well studied when R is the ring of integers in a number field F. Orders also constitute natural generalisations of group-rings RG. The class groups $Cl(RG)$, apart from their importance for integral representation theory also house some topological/geometric invariants where R is usually the ring of integers in a number field and G the fundamental group of some nice spaces.

In this talk, we define, using K-theoretic methods, the higher class groups $Cl_n(\Lambda)$ for all $n \geq 0$ (which coincide with $Cl(\Lambda)$ when $n = 0$). It is noteworthy that $Cl_1(\Lambda$ and hence also $Cl_1(RG)$ is intimately connected with computations of Whitehead group of finite groups (which also has topological applications) and this has been well studied by R. Oliver and others.

We prove in this talk that for all $n \geq 0$, $Cl_n(\Lambda)$ is a finite group and obtain some specific computations of $Cl_n(RG)$ where G is a finite p-group and R is the ring of integers in a number field.

?.2.97 A.O. Kuku

On the Cassels-Tate pairing for Jacobian varieties

25. Apr. 97

Michael Stoll, Düsseldorf

The following is a summary of some recent results from joint work of B. Poonen (Princeton) and myself.

Let C be a (smooth, projective) algebraic curve over $\mathbb{Q}$, and let J be its Jacobian variety, which is an abelian variety of dimension g = genus of C, defined over $\mathbb{Q}$. The Shafarevich-Tate group of J, $Ш(\mathbb{Q}, J)$, is the group of $\mathbb{Q}$-isomorphism classes of locally trivial principal homogeneous spaces for J (a principal homogeneous space X for J is locally trivial if it has a $\mathbb{Q}_p$-rational point for all primes p, as well as an $\mathbb{R}$-rational point). Equivalently,

$$Ш(\mathbb{Q}, J) = \ker\left(H^1(G_{\mathbb{Q}}, J(\bar{\mathbb{Q}})) \longrightarrow \prod_v H^1(G_{\mathbb{Q}_v}, J(\bar{\mathbb{Q}}_v))\right)$$

in Galois cohomology. It is conjectured (but only proved for some classes of elliptic curves and some very special higher-dimensional J) that $Ш(\mathbb{Q}, J)$ is finite. If this is the case (for some specific J), then there exists a bilinear non-degenerate pairing

$$Ш(\mathbb{Q}, J) \times Ш(\mathbb{Q}, J) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \quad , (a, b) \mapsto \langle a, b \rangle,$$

the Cassels-Tate pairing.

$\boxed{\text{Thm (Cassels): If } E \text{ is an elliptic curve and } Ш(\mathbb{Q}, E) \text{ is finite, then } \langle -, - \rangle \text{ is alternating. In particular, } \# Ш(\mathbb{Q}, E) \text{ is a square.}}$

Most of the experts seem to have believed that this is also true for Jacobians in general. However:

$\boxed{\text{Thm 1 (Poonen, –): Let } c \in Ш(\mathbb{Q}, J) \text{ be the class of the principal homogeneous space } \mathrm{Pic}^{g-1}(C) \text{ for } J \ (= \mathrm{Pic}^0(C)). \text{ Then } 2c = 0 \text{ and } \langle a, a+c \rangle = 0 \text{ for all } a \in Ш(\mathbb{Q}, J)}$

Define a linear map $Ш(\mathbb{Q}, J) \to Ш(\mathbb{Q}, J)$, $b \mapsto b^c$ by

$$b^c = \begin{cases} b & \text{, if } \langle b, c \rangle = 0 \\ b + c & \text{, if } \langle b, c \rangle = \frac{1}{2} \pmod{\mathbb{Z}}. \end{cases}$$

We have the following formal consequences of Thm. 1:

Corollary:

(1) $\langle -,- \rangle$ is anti-symmetric (i.e. $\langle a,b\rangle + \langle b,a\rangle = 0$) [this is known].
It is alternating $\Leftrightarrow$ $c=0$ $\Leftrightarrow$ there exists a rational divisor class of deg. $g-1$ on C'.

(2) $(a,b) \mapsto \langle a, b^c \rangle$ is an alternating pairing on $Ш(\mathbb{Q},J)$.
If $\langle c,c\rangle = 0$, it is non-degenerate; if $\langle c,c\rangle = \frac{1}{2}$, its kernel has order 2.

(3) $$\# Ш(\mathbb{Q},J) = \begin{cases} d^2 & \text{, if } \langle c,c\rangle = 0 \\ 2d^2 & \text{, if } \langle c,c\rangle = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{for some } d \in \mathbb{Z}_+$$

The following result gives a criterion for distinguishing the two cases:

Thm 2 (Poonen, –): Let N be the number of places v of $\mathbb{Q}$ such that there is no $\mathbb{Q}_v$-rational divisor of degree $g-1$ on C'. N is finite, and
$$\langle c,c\rangle = \begin{cases} 0 & \text{, if } N \text{ is even} \\ \frac{1}{2} & \text{, if } N \text{ is odd} \end{cases}.$$

Examples:

(1) Let C be the curve given by the affine equation $y^2 = -3(x^2+1)(x^2-6x+1)(x^2+6x+1)$.
Then $Ш(\mathbb{Q},J) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(2) Let $g \geq 2$ be even and let C be the curve $y^2 = -x^{2g+2} - x - 1$ of genus g.
Then $\langle c,c\rangle = \frac{1}{2}$.

Thm 3 (Poonen, –): The set of curves of genus 2 of the form $y^2 = f(x)$, $\deg f \leq 6$, $f \in \mathbb{Z}[x]$, such that $\langle c,c\rangle = \frac{1}{2}$ has positive density (relative to all curves of genus 2 of this form).

M. Stoll

4-manifolds and group invariants

It is known for some time that closed 4-manifolds provide, via the fundamental group and the Euler characteristic, interesting invariants for finitely presented groups. We describe these, and more refined invariants (using also the signature of the manifold), and explain some of their significance, e.g. in connection with the deficiency of the group, with complex 2-surfaces, and with Donaldson theory. The invariants are difficult to calculate, but quite good information can be obtained using, instead of ordinary Betti numbers, ℓ_2-Betti numbers (the von Neumann dimension relative to $\pi_1 M$, of the reduced ℓ_2-homology groups).

May 2, 1997 Beno Eckmann

Unterteilungen vollständiger Graphen in Graphen gegebenen Minimalgrads.

G. A. Dirac vermutete 1964, daß jeder Graph G mit $\|G\| \geq 3|G| - 5$ eine Unterteilung des vollständigen Graphen mit 5 Ecken enthält, wobei $\|G\|$ die Kantenzahl und $|G|$ die Eckenzahl des Graphen G bedeuten. Wir beweisen die Vermutung und charakterisieren die extremalen Graphen des Problems. Ein wichtiger Schritt im Beweis ist das Ergebnis, daß jeder Graph G mit $\|G\| \geq 2|G| - 5$ und der Taille ≥ 5 eine Unterteilung des K_5^-, des K_5 minus einer Kante, enthält. Somit untersuchen wir auch die Abhängigkeit der Existenz von Unterteilung von Taille und Minimalgrad.

9. Mai 1997 W. Mader

Units in integral group rings.

This talk described an explicitly constructible, torsion-free subgroup of units in the integral group ring $\mathbb{Z}A$ of a finite abelian group A, and outlined some properties of its index $c(A)$ in the group of all symmetric cyclotomic units (i.e. those which are mapped to real cyclotomic units by all characters of A).

If A is a p-group of order $> p$, the triviality of $c(A)$ is equivalent to the regularity of p. For irregular p, it is non-trivial (unless $|A| = p$) and equal to the order of a certain group of ideal classes in $\mathbb{Z}A$. Not much is known for A of composite order n, except in the case $n = pq$, where it depends on the liftability of units in the finite semi-simple ring $\mathbb{F}_q[\zeta_p]$ to cyclotomic units in $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ — and ditto with p and q switched ($\zeta_p \neq 1$ denoting, of course, a p-th root of 1).

May 16, 1997.

Klaus Hoechsmann
Vancouver.

Some topics on monomial representations of an exponential solvable Lie group.

This talk is concerned with some problems about monomial representations of exponential Lie groups. We discuss three topics. I) Intertwining operators, II) Generalized semiinvariant vectors and a Frobenius reciprocity, III) Invariant differential operators.

These topics are closely related to each other and studied here in the framework of the orbit method for unitary representation theory of solvable Lie groups. We state some convergence problem for intertwining integral, Penney's Plancherel formula and some kind of semiinvariant distributions. It is interesting to study, for example, the support of such a distribution in a connection with the coadjoint orbits of the whole group and of the subgroup which induces our monomial representation.

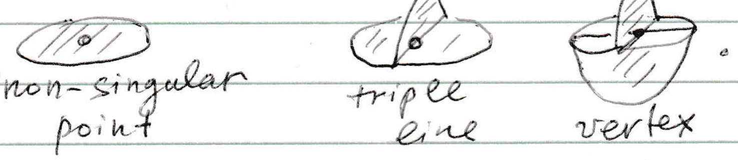
Finally we try to apply these observations to the study of certain algebra of invariant differential operators associated with our monomial representation. This algebra is expressed by the right action of certain elements of the enveloping algebra and studied extensively by Corwin-Greenleaf for nilpotent Lie groups. We state their conjectures and several open problems concerning these topics.

May 23, 1997

Hidenori Fujiwara
藤原英徳
Kinki University in Kyushu

Complexity theory for 3-manifolds.

Every compact 3-manifold M with boundary can be collapsed onto a 2-dimensional polyhedron $P \subset M$ called a spine of M. We call the spine P almost special if a neighborhood of each point $x \in P$ can be embedded into the cone over 1-dimensional skeleton of the standard ~~tentrahedron~~ tetrahedron Δ^3. Typical neighborhoods of points in an almost special polyhedron are show on the picture.



~~Definition.~~ The complexity $c(M)$ of a 3-manifold M is equal k, if M has an almost special spine with k vertices and has no almost special spines with $< k$ vertices.

Examples: $c(S^3) = c(S^2 \times S^1) = c(RP^3) = c(L_{3,1}) = 0$; $c(L_{n,1}) = n-3$; $c(S^3/Q_{4n}) = n$; $c(S^3/P_{120}) = 5$.

Theorem 1. $c(M_1 \# M_2) = c(M_1) + c(M_2)$

Theorem 2. For any k there exist only a finite number of irreducible, closed 3-manifolds of complexity $\leq k$.

Theorem 3. All orientable closed 3-manifolds of complexity ≤ 8 are graph-manifolds of Waldhausen.

Remark. There exist at least two closed 3-manifolds of complexity 9 that are hyperbolic and hence are not graph-manifolds.

30.5.1997 Sergei Matveev

5 June 1997

Operators associated to the Ornstein-Uhlenbeck semigroup.

(G. Mauceri, Genova, Italy).

This is a report on some recent work of J. García-Cuerva, P. Sjögren, J. L. Torrea and G. Mauceri on spectral multipliers for the generator of the Ornstein-Uhlenbeck semigroup.

Let $d\gamma(x) = \pi^{-n/2} e^{-|x|^2} dx$ be the Gaussian measure in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. The operator $L = -\frac{1}{2}\Delta + x\cdot\nabla$, defined on the space of test functions, has a self-adjoint extension to $L^2(\gamma)$, also denoted by L. The spectral resolution of L is $L = \sum_{k=0}^{\infty} k P_k$, where P_k is the orthogonal projection onto the space spanned by the Hermite polynomials of degree k in n variables. The operator $-L$ generates a symmetric diffusion semigroup $\{e^{-tL} : t>0\}$, called the Ornstein-Uhlenbeck semigroup. The spectral multiplier associated to a sequence m in $\ell^\infty(\mathbb{N})$ is the operator $m(L) = \sum_{k=0}^{\infty} m(k) P_k$. It follows from the general Littlewood-Paley-Stein theory for symmetric diffusion semigroups that, if m is of Laplace transform type, i.e. if

$$m(\lambda) = \lambda \int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-t\lambda} dt, \quad \text{for all } \lambda>0 \text{ and for some } \varphi \in L^\infty,$$

then $m(L)$ is bounded on $L^p(\gamma)$, for all $1<p<\infty$.

<u>Theorem</u> 1 If m is of Laplace transform type then $m(L)$ is bounded from $L^1(\gamma)$ to weak-$L^1(\gamma)$.

The operator $m(L)$ has a Schwartz kernel $K_m \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. We have proved that, outside the diagonal in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, K_m is a smooth function satisfying the standard Calderón-Zygmund estimates.

<u>Theorem</u> 2 There exists a bounded function α such that for all f in $L^1(\gamma)$

$$m(L) f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\alpha(\varepsilon) f(x) + \int_{|x-y|} K_m(x,y) f(y)\, dy \right)$$

for almost every x in $\mathbb{R}^n$. If φ is continuous at 0 then $\lim_{\varepsilon\to 0} \alpha(\varepsilon) = \varphi(0)$ and $m(L)$ can be defined as a principal value singular integral.

We have also obtained estimates from above and from below of the quasi-norms of the imaginary powers of $-L$, qua operator from the space $\{f : f \in L^1(\gamma), \int f \, d\gamma = 0\}$ to weak-$L^1(\gamma)$.

Giancarlo Mauceri

Zum konformen Modul von Vierecken und Ringgebieten

Es wird eine Übersicht gegeben über verschiedene Fragen im Zusammenhang mit diesem Modul, beginnend mit der klassischen Definition.

Der konforme Modul ist eine konforme Invariante und ursprünglich mit Hilfe konformer Abbildungen definiert. Durch die „extremale Länge" nach Ahlfors/Beurling gelingt auch eine einfache Definition ohne konforme Abbildungen.

Im Vortrag werden dann einige Fälle betrachtet, in denen man diesen Modul dem betreff. Viereck bzw. Ringgebiet unmittelbar „geometrisch" entnehmen kann, was i. allg. nicht möglich ist.

Diese Fragen erhalten auch ein gewisses physikalisches Interesse, da der konf. Modul von Ringgebieten eng mit der elektrostatischen Kapazität eines zugehörigen Kondensators zusammenhängt.

20. Juni 1997 Reiner Kühnau

Stochastic Behavior of Continued Fractions

In 1812 Gauss, in a letter to Laplace, described his discovery of a remarkable formula for the stochastic nature of continued fractions; it seems that he could not prove the formula and was asking for help. Over 100 years later Kuzmin, in 1928, published a complicated proof; subsequent proofs have yielded some simplification. There has been much speculation in the literature as to how Gauss arrived at the formula, since once the formula is given, it is easy to see that this should yield the correct answer.

In this lecture we give a plausible explanation for Gauss' discovery, using methods known at that time. Moreover, this explanation yields also a very simple proof, with almost no calculation, of the correctness of the formula. At the same time, we hope that these methods which yield new number-theoretic results also, will shed some light on open problems in this area.

June 13, 1997.

Michael Keane
CWI, Amsterdam.

Artin Groups and Presentation of Teichmüller Modular Groups

Let $\Sigma_{g,n}$ be a closed surface of genus g, n boundary components, orientable.

The Teichmüller modular group or mapping class group of $\Sigma_{g,n}$ is the group of isotopy classes of orientation preserving self-diffeomorphisms of $\Sigma_{g,n}$, i.e.,

$$M_{g,n} := \pi_0(\mathrm{Diff}^+(\Sigma_{g,n}, \partial)),$$

where the boundary is pointwisely fixed.

Hatcher-Thurston ('80), Harer ('83), and Wajnryb ('83) determined an explicit presentation of $M_{g,n}$, for $n \leq 1$, using $2g+1$ generators and four types of relations.
Dehn Twist

This talk is about a beatiful reformulation of these relations in terms of the generator of the centers of Artin groups. We choose A_4, A_5, E_6, E_7-type Artin groups, and give a group morphism from each Artin group to $M_{g,1}$. Then, the defining relation of $M_{g,1}$ turns out to be

$$(\text{center of } A_4\text{-Artin group})^2 = (\text{center of } A_5\text{-Artin group})$$
$$(\text{center of } E_6\text{-Artin group}) = (\text{center of } E_7\text{-Artin group}).$$

This will enable us to consider $M_{3,1}$'s Hecke-Algebra representation, generalizing Jones' $M_{2,0}$-Hecke-Algebra representation ('87).

The proof uses: (1) Wajnryb's result, (2) Brieskorn-Saito ('72) algorithm, and (3) Brieskorn's ('71) miniversal deformation of simple singularities.

July 4th, '97. Makoto Matsumoto. 松本 眞

17.10.94

Keio University / MPI für Math. BONN
email: matumoto@math.keio.ac.jp

Berezin transforms and multiplicity-free actions Oct 24 1997

Let D be a domain in $\mathbb{C}^n$ and μ a Borel measure on D. Consider the L^2-space $L^2(D, d\mu)$ and a closed subspace $\mathfrak{H}$ of $L^2(D, d\mu)$. We suppose that every function in $\mathfrak{H}$ is a continuous function and that $\mathfrak{H}$ possesses a reproducing kernel κ. Put $d\mu_0(z) := \kappa(z, z)\, d\mu(z)$. The Berezin transform B associated to $\mathfrak{H}$ is an integral operator on $L^2(D, d\mu_0)$ given by

$$Bf(z) = \int_D \frac{|\kappa(z, w)|^2}{\kappa(z, z)\,\kappa(w, w)} f(w)\, d\mu_0(w).$$

One knows that B is a bounded operator with $\|B\| \leqq 1$. It is evident from the above expression that B is a positive selfadjoint operator. Berezin transform plays an important role in Berezin's quatization theory.

Now we consider the situation that a Lie group G acts on D and $\mathfrak{H}$ carries an irreducible unitary representation π of G which has something to do with the action considered. In this case B is a G-invariant integral operator, that is, B commutes with the action of G. The case

G = Heisenberg group, $D = \mathbb{C}^n$, $\mathfrak{H}$ = Fock space, π = IUR of G on $\mathfrak{H}$

has been studied already by Berezin himself. In this case B is an exponential of the ordinary Laplacian on $\mathbb{C}^n$. The case $G = \widetilde{SU(1,1)}$, the universal covering group of $SU(1,1)$, $D = \mathbb{D}$ (the open unit disk $\subset \mathbb{C}$), $\mathfrak{H}$ = weighted Bergman space, π = (relative) holomorphic discrete series of G, has been also considered by Berezin and B is a "function" of the G-invariant Laplacian of $\mathbb{D}$. Berezin generalized the results to the case of classical bounded domains using classification and Unterberger-Upmeier gave a classification-free treatments (using Jordan Triple Systems).

My work (with E. Fujita) concerns the case where a compact Lie group K acts on a finite-dimensional complex vector space V in a multiplicity-free way. This means that the space $\mathcal{P}(V)$ of holomorphic polynomial functions on V has a multiplicity-free K-irreducible decomposition: $\mathcal{P}(V) = \sum_{\alpha \in A} \mathcal{P}_\alpha(V)$ (if $\alpha \neq \beta$, then $\mathcal{P}_\alpha(V) \not\cong \mathcal{P}_\beta(V)$ as K-rep.). Fixing a K-invariant hermitian inner product and taking the normalized Gaussian measure $d\mu$, we have $\mathcal{P}_\alpha(V) \subset L^2(V, d\mu)$ $(\forall \alpha \in A)$. Our first theorem says that B_α restricts to the K-invariant functions $L^2(V, d\mu_\alpha)^K$ $(d\mu_\alpha = K_\alpha(z, z)\, d\mu)$ as a one-dimensional orthogonal projection operator onto the constant functions. The second theorem establishes a deep relationship of B_α with the tensor product $\pi_\alpha \otimes \overline{\pi_\alpha}$. This implies in particular that B_α is a finite rank operator. Two case-studies for the explicit computation of the eigen-values of B_α will be presented.

T. Nomura (Kyoto Univ) 野村隆昭

Subshifts und Monoide 31.10.97

Betrachtet werden Subshifts, d.h. abgeschlossene shift-invariante Teilmengen $C \subset \Sigma^{\mathbb{Z}}$, Σ ein endliches Alphabet. Das Ziel ist, für Teilklassen der kodierten Systeme als Invarianten Monoide zu konstruieren. Dazu bezeichne für einen zulässigen Block a des Subshifts $\omega^+(a)$ die Menge der Blöcke im rechten Kontext von a, die mit allen Blöcken im linken Kontext von a verträglich sind. $\omega^-(a)$ ist zeitsymmetrisch definiert. Man definiert dann für einen Subshift C eine aufsteigende Folge $X_n(C) \subset C$, $n \in \mathbb{N}$, von Subshift endlichen Typs durch

$$X_n(C) = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} \{x \in C : x_i \in \omega^+((x_j)_{i-n \leq j < i}) \cap \omega^-((x_j)_{i < j \leq i+n})\}.$$

Sei $X(C) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n(C)$ und sei P_C die Menge der periodischen Punkte in $X(C)$. Es sei für $u, u' \in P_C$, $u \geq u'$ falls es einen Punkt v in $X(C)$ gibt der negativ asymptotisch zu Bahn von u ist, und auch positiv asymptotisch zu Bahn von v ist. Man nehme an, daß für die so entstehende Äquivalenzrelation P_C nur aus einer Äquivalenzklasse besteht, die mit $\mathbb{1}$ bezeichnet sei. Y_C sei die Menge der Punkte in C, die positiv asymptotisch zu einem Punkt in P_C sind, und die auch negativ asymptotisch zu einem Punkt in P_C sind. Man definiert in Y_C eine geeignete Äquivalenzrelation, und man kann auf der Menge der Äquivalenzklassen eine Monoidstruktur (mit Einheit $\mathbb{1}$) definieren, die invariant mit dem Subshift verbunden ist, vorausgesetzt, daß eine geeignet formulierte Bedingung (Eigenschaft A) erfüllt ist. In einem gewissen Sinn imitiert diese Konstruktion die Konstruktion des syntaktischen Monoids einer formalen Sprache.

Wolfgang Krieger

Regularized Computations of Global Invariants

07.11.97

Historically several methods have been used to give meaning to a divergent series. We recall those proposed by Abel, Riemann, Euler and Hadamard. The method of Euler is illustrated with Dirichlet's theorem for the Dedekind zeta function, to wit:

Th^m (Dirichlet) Let $F/\mathbb{Q}$ be a number field with ring of integers $\mathcal{O}_F$. Set $\zeta_F(s) = \sum_{\mathcal{O} \triangleleft \mathcal{O}_F} (N\mathcal{O})^{-s}$. Then

$$\lim_{s \to 0} s^{r_1+r_2} \zeta_F(s) = -\frac{h_F R_1}{w_F}.$$

Now let $\{\frac{1}{2} + i r_n\}$ be the zeroes of ζ_F and assume that $0 \leq r_1 \leq r_2 \cdots$ Set $\lambda_n = \frac{1}{4} + r_n^2$ and let Δ_F be a formal operator having $\operatorname{Spec} \Delta_F = \{\lambda_n\}$. Kurokawa applying Ray-Singer's regularized determinant construction to the $\{\lambda_n\}$ obtained

Th^m (Kurokawa) $\det_\zeta \Delta_F = [\operatorname{res}_{s=1} \zeta_F(s)]\, D_F^{1/4}\, C_1^{r_1} C_2^{r_2}$.

From the functional equation for ζ_F it follows that one can express $\frac{h_F R_1}{w_F}$ in terms of $\det_\zeta \Delta_F$.

In this talk we shall

(1) propose a geometric version of ζ_F for locally symmetric manifolds

(2) explain the calculation of analytic torsion and holomorphic torsion for locally symmetric manifolds by Fried and Moscovici-Stanton as geometric versions of the above two theorems.

Robert J Stanton

Representations of Quantum Linear Groups
— The Coordinate Algebra Approach

A quantum group here is understood as a "quantum deformation" of an algebraic group, and the study of such a "group" is from the point of view of coordinate algebra. Therefore, a module of a quantum group is actually a comodule over its coordinate algebra.

The quantum linear groups are deformations of the ordinary general and special linear groups GL_n and SL_n. More precisely, we have first the algebra generated by n^2 generators x_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,n)$ with ~~generators~~ relations

$$
\begin{aligned}
x_{is}x_{it} &= q^{-1}x_{it}x_{is} && s<t \\
x_{is}x_{js} &= q^{-1}x_{js}x_{is} && i<j \\
x_{is}x_{jt} &= x_{jt}x_{is} && i<j,\ s>t \\
x_{is}x_{jt}-x_{jt}x_{is} &= (q^{-1}-q)\,x_{it}x_{js} && i<j,\ s<t.
\end{aligned}
$$

The coordinate algebra of the quantum group $GL_{n,q}$ is the Ore localization of the above algebra with respect to the quantum determinat

$$D_q = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (-q)^{-l(\sigma)}\, x_{1,\sigma(1)}x_{2,\sigma(2)}\cdots x_{n,\sigma(n)}.$$

And, the coordinate algebra of the quantum group $SL_{n,q}$ is its quotient by $(1-D_q)$.

The talk focuses on the representation theory of $GL_{n,q}$ and $SL_{n,q}$, where q is "general" and q is a root of unity, respectively.

Jian-pan Wang
(East China Normal University)
王建磐

The enumeration of nonintersecting lattice paths with respect to turns and Hilbert series for determinantal rings

14. Nov. 1997

Sei $X=(X_{ij})_{1\le i\le m,\, 1\le j\le n}$ eine $m\times n$ Matrix von Unbestimmten. Wir betrachten ein Ideal P im Polynom=ring $k[X]$ in den Unbestimmten $X_{11}, X_{21}, \dots$, das von bestimmten Minoren der Matrix X erzeugt wird. Das Objekt unseres Interesses ist dann der Quotientenring $k[X]/P$. Motiviert durch Problemstellungen im Schubertkalkül, hat sich Abhyankar für die Hilbertreihe dieses Quotienten=ringes interessiert. Setzt man seine diesbezügliche Arbeit mit Arbeit von D. Kulkarni zusammen, dann folgt, daß die Hilbertreihe die Form $\left(\sum_k N_k z^k\right)/(1-z)^d$ hat, wo d ein gewisser Exponent ist, und wo N_k die Anzahl aller Familien von nichtüberschneidenden Gitterpunktwegen mit gegebenen Anfangs- und Endpunkten und mit insgesamt genau k Turns der Form $\ulcorner$ ist.

In meinem Vortrag erkläre ich zunächst diesen Zusammenhang zwischen der Berechnung dieser Hilbertreihe und dem Abzähl=problem für nichtüberschneidende Gitterpunktwege. Im zweiten Teil des Vortrags präsentiere ich eine elegante Lösung dieses Abzählproblems, die auf einer vorzeichenumkehrenden, gewichts=erhaltenden Involution beruht. Dies erlaubt mir einen neuen Beweis für eine Determinantenformel von Abhyankar anzugeben, der viel einfacher als der ursprüngliche ist, als auch einige verwandte Probleme zum ersten Mal zu lösen.

Christian Krattenthaler
(Universität Wien)

Codes, Curves, and Witt Vectors Nov. 21, 1997

Error-correcting codes are used to store or transmit information so that the original information can be recovered if distortion occurs due to noise or damage. Algebraic geometric codes are a type of linear error-correcting code proposed by V. D. Goppa almost 20 years ago. These codes can be constructed from curves over finite fields, and have the best parameters when the number of rational points on the curve is as high as possible with respect to the genus. It is an open question in most cases whether the upper bound for the number of points can be met for each $(g, \mathbb{F}_q)$, (Oesterlé upper bound), but a method of Serre using class field theory can be implemented to produce many examples which come very close. This talk outlines the method of Serre, and shows how it can be used to obtain all three families of irreducible Deligne-Lusztig curves. The Hermitian, Suzuki and Ree curves are all optimal with respect to the Oesterlé bounds, but only exist for certain choices of q, ($q = l^2, 2^{2m+1}, 3^{2m+1}$)! To generalize these families to odd powers of a prime in characteristic $\neq 2, 3$, we use an isomorphism of the Galois group of the full ray class field with a sum of copies of finite length Witt vectors over the finite field $\mathbb{F}_q$, $G/D_\infty \cong \bigoplus_I W_{\gamma_i}(\mathbb{F}_q)$, $q = p^f$

$I = \{ 1 \leq i \leq k-1 \mid (i, p) = 1 \}$

γ_i = smallest integer s.t. $i p^{\gamma_i} \geq k$.

We give a formula for the order of the quotient of this group by all decomposition groups of places of degree one.

Kristin Lauter
Max-Planck-Institut / University of Michigan

Sequences and their correlation properties,

Nov. 28, 1997

by Alexander Pott, Universität Augsburg

Sei $(a_i)_{i=0,\dots}$ eine Folge der Periodenlänge N, d.h. $a_{i+N}=a_i$. Dann heißen die Zahlen $C(t)=\sum_{i=0}^{N-1} a_i a_{i+t}$ die periodischen und $A(t)=\sum_{i=0}^{N-t-1} a_i a_{i+t}$ die aperiodischen Korrelationskoeffizienten. Ein für viele Anwendungen wichtiges Ziel ist die Konstruktion von Folgen mit (betragsmäßig) kleinen Korrelationskoeffizienten. In dem Vortrag gebe ich einen Überblick über Folgen, bei denen diese Koeffizienten die theoretisch kleinstmöglichen Werte annehmen (perfekte Folgen). Ich diskutiere Verallgemeinerungen auf "fast-perfekte Folgen" sowie "perfekte arrays".

Perfekte Folgen mit $N \equiv 0 \bmod 4$ (N Periodenlänge) sind äquivalent zu zirkulanten Hadamardmatrizen. Eine berühmte Vermutung in der Diskreten Mathematik ist, daß keine zirkulanten Hadamardmatrizen mit $N > 4$ existieren. Ich stelle ein neues Ergebnis von B. Schmidt vor, das alle bisher bekannten Ergebnisse über die "zirkulante Hadamardmatrix-Vermutung" weitreichend verallgemeinert. Mit diesem Satz kann man zeigen, daß für jede endliche Menge Q von Primzahlen höchstens endlich viele zirk. Hadamard-Matrizen ($\Leftrightarrow$ perfekte Folgen) der Ordnung N existieren können, so daß N ein Produkt der Primzahlen aus Q ist. Aufbauend auf Schmidt's Ansätzen scheint es nun möglich, die Vermutung bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen zu beweisen.

A. P.

Auf dem Weg zu einem Mathematikmuseum

Es wird berichtet über den Plan, ein „Mathematik-Museum" einzurichten. Dies soll kein „Museum" im Sinne einer Ausstellung einmaliger, wertvoller historischer Objekte sein, sondern eine „Erlebniswelt Mathematik", in der die Besucher direkt mathematische Phänomene und Objekte erfahren können.

Im ersten Teil werden die grundlegenden Erfahrungen und Einsichten vorgestellt, insbesondere auf die Idee von „hands-on"-Experimenten eingegangen. Im zweiten Teil wird eine Reihe von schon realisierten bzw. geplanten Exponaten vorgestellt. Im dritten wird schließlich auf Organisatorisches und äußere Bedingungen eingegangen. Geplant ist, das Mathematikmuseum im Jahr 2000 zu eröffnen.

A. Beutelspacher, Gießen

5. 12. 1997

Invariants of groupoids related to foliations

I. Moerdijk (Utrecht), 12. 12. 1997

An étale groupoid $\mathcal{G}$ is a groupoid in the category of smooth manifolds whose source and target maps $s, t: \mathcal{G}_1 \rightrightarrows \mathcal{G}_0$ are local diffeomorphisms. To any foliation $(M, \mathcal{F})$ one can associate such an étale groupoid $Hol(M, \mathcal{F})$ – the holonomy groupoid of the foliation. Its construction depends on some choices, and is therefore only determined up to weak – or "Morita" equivalence. One of the complications that arises in the theory is that this holonomy groupoid is generally not Hausdorff.

In this lecture we discuss some constructions on and invariants of étale groupoids which are invariant under Morita equivalence.

One such invariant is the cohomology $H^*(\mathcal{G}, \mathcal{A})$ with coefficients in an arbitrary $\mathcal{G}$-sheaf $\mathcal{A}$, introduced by Haefliger. We prove that any such $\mathcal{A}$ induces a sheaf $\tilde{\mathcal{A}}$ on the classifying space $B\mathcal{G}$ and an isomorphism $H^*(\mathcal{G}, \mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} H^*(B\mathcal{G}, \tilde{\mathcal{A}})$ [1].

We also present a new homology theory $H_*(\mathcal{G}, \mathcal{A})$, which is dual (in the sense of Verdier) to $H^*(\mathcal{G}, \mathcal{A})$. The construction of $H_*(\mathcal{G}, \mathcal{A})$ is based on a suitable group $\Gamma_c(X, \mathcal{S})$ of compactly supported discontinuous(!) sections of a sheaf $\mathcal{S}$ on a non-Hausdorff manifold X. Extending work of Brylinski and Nistor, Crainic [2] showed how the Hochschild and cyclic homology of the algebra $C_c^\infty(\mathcal{G})$ (Connes) can be described in terms of this new homology theory.

[1] I. Moerdijk, Proof of a conjecture of Haefliger, to appear in Topology.

[2] M. Crainic, Cyclic homology of étale groupoids, Utrecht preprint, 1997.

I. M.

Symmetriereduktion: Physik, Mathematik und Zurück
A.T. Huckleberry 19.12.97

Explizite Lösungen einfach aussehender gewöhnlicher Differentialgleichungen, z.B. $\ddot{x}+x=0$, sind oft sehr kompliziert oder sogar unzugänglich. Ohne weitere qualitative Überlegungen ist etwa $x(t)=A\cos t+B\sin t$ nur eine Umformulierung.

Übersetzungen in einen Vektorfeldkontext sind sehr hilfreich. Im obigen Fall findet man ein lineares System: $\dot{x}=Jx$ für $x=\binom{x_1}{x_2}\in\mathbb{R}^2$. Das zugeordnete Feld ist $X=x_2\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial}{\partial x_2}$.

Integralkurven solcher Vektorfelder befinden sich auf Niveauflächen invarianter Funktionen, d.h. Konstanten der Bewegung f mit $X(f)\equiv 0$. Unterliegende manchmal sehr subtile geometrische Strukturen können solchen Invarianten liefern. Z.B. ist im Falle des obigen harmonischen Oszillators der Flächeninhalt invariant: Für $\omega=dx_1\wedge dx_2$ und den Ableitungsoperator $L_X \underset{(*)}{=} d\circ i_X+i_X\circ d$ folgt $L_X\omega\equiv 0$.

Allgemein betrachtet man eine symplektische Mannigfaltigkeit (M,ω), d.h. ω ist eine nicht-entartete, geschlossene 2-Form. Zu $H\in C^\infty(M)$ bekommt man $X_H\in Vect(M)$ mit $dH=:i_{X_H}\omega$. Aus $(*)$ folgt $L_{X_H}\omega=0$ und man definiert $Ham(M):=\{X_H : H\in C^\infty(M)\}$. In dieser Sprache ist $X=x_2\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial}{\partial x_2}$ ein auf $(\mathbb{R}^2, dx_1\wedge dx_2)$ definiertes Hamiltonsches System: Für $H:=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$ ist $X=X_H$.

Durch direktes Nachrechnen, i.b. unter Berücksichtigung der Eigenschaft $d\omega=0$ weist man nach, daß $\{f,g\}:=\omega(X_f,X_g)$ eine Liealgebrastruktur auf $C^\infty(M)$ definiert. Da $\{H,\cdot\}=X_H$, sind die Elemente des Zentralisators $Z_H:=\{f:\{H,f\}=0\}$ exakt die Konstanten der Bewegung. Ein naheliegendes Beispiel ist $H\in Z_H$. Im obigen 2-dimensionalen Beispiel kann man nur ein Erhaltungsgesetz erwarten: $H=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$ erzeugt die Konstanten der Bewegung.

Seit dem 18. Jahrhundert, i.b. schon in Werken von Lagrange, hat man eine Verbindung zwischen „Symmetrie" und „Konstanten der Bewegung" gespürt und in gewissen Fällen festgelegt. In unserem Kontext wird die Symmetrie durch die Wirkung $G\times M\to M$ einer Liegruppe symplektischer Diffeomorphismen gegeben, d.h. $g^*(\omega)=\omega\ \forall g\in G$. Eine „Symmetrie" ist ein Element $\xi\in Lie(G)=\mathfrak{g}$; man denkt an das zugeordnete Feld X_ξ auf M. Aus $L_{X_\xi}\omega=0$ folgt $d\,i_{X_\xi}\omega=0$ und, z.B. falls $b_1(M)=0$, bekommt man $\mu_\xi\in C^\infty(M)$ mit $d\mu_\xi=i_{X_\xi}\omega$, so daß $X_\xi=X_{\mu_\xi}$. Man betrachte nun eine beliebige G-invariante Funktion H. Natürlich ist $X_\xi(H)\equiv 0$, d.h. $\{\mu_\xi,H\}=0$: Die Funktionen μ_ξ, $\xi\in\mathfrak{g}$, sind Erhaltungsgesetze für beliebige G-invariante Systeme.

Die Menge $\{\mu_\xi\}_{\xi\in\mathfrak{g}}$ der durch G definierten Konstanten der Bewegung bündelt man in eine Abbildung $\mu: M \to \mathfrak{g}^*$ zusammen: $\xi\circ\mu := \mu_\xi$, $\xi\in\mathfrak{g}^{**}=\mathfrak{g}$, ist die ξ. Koordinate. Hier wird auch die Äquivarianz (bzgl. der koadjungierten Darstellung) dieser „Momentumabbildung" angenommen. Von speziellen Interesse sind die Fasern $\mu^{-1}(\alpha)$ über den G-Fixpunkten, $\alpha\in(\mathfrak{g}^*)^G$. Sie sind i.b. G-invariant und (obwohl nicht unbedingt glatt) auch bzgl. der lokalen durch X_H definierten Wirkung stabil. Ohne Einschränkung betrachte man $M_0 := \mu^{-1}(0)$.

Für eine lokal freie G-Wirkung ist M_0 glatt. Es sei $i: M_0 \hookrightarrow M$ die kanonische Einbettung. Die Entartung der Form $\omega_0 := i^*(\omega)$ ist das Unterbündel tangential zu den G-Bahnen und, mindestens im philosophischen Sinne, leben invariante Hamiltonsche Systeme auf dem Bahnenraum $M_{red} := M_0/G$ als Hamiltonsche Systeme bzgl. einer reduzierten Struktur ω_{red}. Z.B., für freie eigentliche Wirkungen, ist (M_{red}, ω_{red}) eine symplektische Mannigfaltigkeit, die Marsden-Weinstein-Reduktion von (M,ω).

Diese Art von Symmetriereduktion ist in der Physik seit langem bekannt: man vergisst die „Symmetrievariablen"! Seit ca. 1970 hat sie eine immer größere Rolle in der Mathematik gespielt.

Aus der Sicht der komplexen Analysis ist die Klasse Kählerscher Mannigfaltigkeit (X,ω) im obigen Rahmen relevant. Hier ist X eine komplexe Mannigfaltigkeit und ω eine symplektische Form, die bzgl. der komplexen Struktur eine Hermitesche Metrik definiert. Da Singularitäten kaum vermieden werden können, betrachtet man Kählersche Räume.

Für die Symmetriereduktion im Kählerschen Kontext hat man die folgende Wunschliste: 1.) Die Existenz eines komplexen Raums X_{red} - als topologischer Raum $X_{red} = X_0/G$. 2.) Die „Form" $\omega_0 := i^*(\omega)$ definiere durch Reduktion ihrer Entartung eine Kählersche Struktur auf X_{red}. 3.) Die Quotientenabbildung $\pi: X_0 \to X_{red}$ sollte „holomorph" sein.

Seit ca. 1980 gibt es in dieser Richtung zahlreiche Beiträge. Hauptsächliche wurden sie unter der Annahme einer kompakten Gruppe G Kählerscher Isometrien zusammen mit einer holomorphen Wirkung $G^{\mathbb{C}}\times X \to X$ der reduktiven Gruppe erreicht. Die Existenz der komplexen Struktur sowie 3.) beweist man mit Methoden der Invariantentheorie für die $G^{\mathbb{C}}$-Wirkung: π wird als holomorphe Abbildung $\pi: X^{ss} \to X_{red}$ (universell $G^{\mathbb{C}}$-invariant) einer offenen Umgebung $X^{ss} := \{x\in X : \overline{G^{\mathbb{C}}x} \cap X_0 \neq \emptyset\}$ von X_0 konstruiert. Für X kompakt Kähler sind die Arbeiten von u.a. Atiyah, Kirwan und Guillemin-Sternberg von zentraler Bedeutung (1980-1985). Im projektiv algebraischen Fall spielen Ergebnisse von Mumford, Kempf-Ness und Brion eine maßgebliche Rolle (auch 1980-1985).

Im nicht-kompakten komplex analytischen Kontext wurde die Konstruktion von Heinzner und Loose (1995) mit Hilfe von Methoden von Sjamaar (1995) durchgeführt.

Für nicht-kompakte Gruppen ist der Bahnenraum X_0/G i.a. nicht mal Hausdorff. Um dies zu erreichen ist man ggfs. bereit die Eigentlichkeit der G-Wirkung anzunehmen. Diese Abweichung von Kompaktheit eröffnet wichtige Beispielklassen.

In diesem Jahr haben wir zsm. mit M. Ammon und Heinzner die Symmetriereduktion für Kählersche Räume im Falle einer eigentlichen Wirkung realisiert (1997 Preprint). Die Wirkung der komplexen Gruppe $G^{\mathbb{C}}$ wird nicht mehr verlangt; die Reduktion $\pi : X_0 \to X_{red}$ ist als holomorphe Abbildung nur in der Nähe von X_0 definiert.

Im Geist dieser Reduktion hat Heinzner Ergebnisse in der relativistischen axiomatischen Quantenfeldtheorie bewiesen (1997 Preprint). Hier geht es um den Nachweis der Holomorphiegebiet-Eigenschaft konkret gegebener offener Mengen Z in gewissen $G^{\mathbb{C}}$-Darstellungsräumen V. Die Lorentzgruppe G wirkt auf speziellen Tubengebiete $X \subset V$ und $Z := G^{\mathbb{C}} \cdot X$. Betrachtungen der G-Symmetriereduktion $\pi : X_0 \to X$ und eine Bergman-Hamilton-System sind für diese Überlegungen äußerst wichtig.

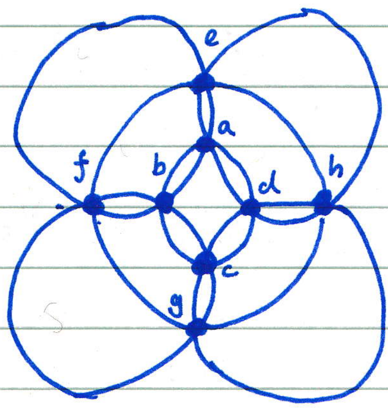
Uns scheint es bemerkenswert, daß solche aus der klassischen Mechanik stammenden Methoden quantenfeldtheoretische Konsequenzen erbringen.

Alan T. Huckleberry

„Automatic Theorem Proving in Geometry"

Jürgen Richter-Gebert, ETH Zürich (9.1.98)

Geometric incidence theorems are at the core of many problems, ranging from polyhedral combinatorics to applied areas like Computer Aided Design and Robotics. The automatic detection of such theorems plays an important rôle for many algorithmic problems in all these areas. Unfortunately, the general problem of proving an incidence theorem from the combinatorial data of the underlying geometric configuration is provably hard (NP-hard). General methods based on algebraic techniques (like Gröbner Bases) usually produce proofs consisting of large polynomial identities that do not give geometric insight.
We present an invariant theoretic approach, that first translates the geometric situation into determinant identities an than searches (on purpose) only for „simple" cancellation patterns.



Miquels Theorem and its (automatically generated) proof:

the cocircularity of five cocircularities of quadruples of points forces the last one. Each line of the proof represents such a cocircularity. Multiplication of all Terms on the left (and right) of the first five lines gives after cancelation exactly the last row - the conclusion.

[Jcd][Jab][Ibc][Iad] = [Iab][Icd][Jad][Jbc]
[Iab][Jae][Jbf][Ife] = [Ibf][Jab][Iae][Jfe]
[Jbc][Ibf][Icg][Jfg] = [Jbf][Ibc][Jcg][Ifg]
[Icg][Jcg][hIg][hJd] = [Icg][Jcd][hJg][hId]
[Iad][Iae][hJe][hId] = [Iad][Jae][hIe][hJd]

[Ife][Jfg][hJe][hIg] = [Jfe][Ifg][hIe][hJg]

In particular, methods from Cayley-Klein-geometries can be fruitfully adapted to treat theorems about metric relations in a purely projective framework.

Jürgen Richter-Gebert