"Commuting varieties associated with simple Lie algebras", D. Panyushev Moskau / MPI (Bonn) 16.1.2

The commuting variety associated with a Lie algebra $\mathfrak{g}$ is the set $\mathcal{E} = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathfrak{g}^m \mid [x_i, x_j] = 0 \ \forall i, j\}$. Even if $m=2$ and $\mathfrak{g}$ is simple, only a few results of general nature is known: Richardson has proved in 1979 that if $\mathfrak{g}$ is reductive (and $m=2$) then $\mathcal{E}$ is irreducible. Recently, Joseph has shown that $\mathcal{E}/\!\!/G$ is normal. However, normality of $\mathcal{E}$ is still an open problem. It turns out that after some generalization the problem of description of algebro-geometric properties becomes more manageable.

Two generalizations: $1°$ $X, Y \subset \mathfrak{g}$ - arbitrary closed subvarieties. Consider $\mathcal{E}_{X,Y} = \mathcal{E} \cap (X \times Y)$

$2°$. Let $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ be a representation. Consider the map $\mu : V \times V^* \to \mathfrak{g}^*$; $\mu(v, \xi)(s) := \langle \xi, \rho(s) \cdot v \rangle$. $s \in \mathfrak{g}$, $v \in V$, $\xi \in V^*$. The set $\mu^{-1}(0)_{red}$ is called a (generalized) commuting variety.

If $\rho = ad$ and $\mathfrak{g}$ is reductive (hence $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^*$), we come back to the original definition.

Results: Let $\theta \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ be an auton of finite order and $\mathfrak{g}$ is reductive. Then $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_m} \mathfrak{g}_i$. We have

$\mu = [\,,\,] : \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_{-1} \to \mathfrak{g}_0$ and $\mathcal{E} \cap (\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_{-1}) = \mu^{-1}(0)$ is the comm. variety in both senses. $\mathcal{E}_{1,-1}$

Theorem Let θ satisfies the following condition:

(*) there is a regular semisimple $x \in \mathfrak{g}_1$ such that $(\mathfrak{g}_x)_0 = \{0\}$.

Then all the fibers of μ (in particular $\mathcal{E}_{1,-1}$) are irreducible reduced normal complete intersections.

Another extreme case related with parabolic subalg. with abelian unipotent radical. Here $\mathcal{E}$ is reducible, but each irred. component is normal and has rational singularities

"Einige Aspekte der Modularen Invariantentheorie endlicher Gruppen",

Peter Fleischmann IEM / Essen 23.1.1998

Sei G eine Gruppe, F ein Körper und V ein endlich-dimensionaler FG-Modul. Die natürliche Operation von G auf dem Dualraum $V^* = \mathrm{Hom}_F(V,F)$ induziert eine Operation von G durch F-Algebrenautomorphismen auf $F[V] := \mathrm{Sym}_F(V^*)$. Ist $\{x_1,\dots,x_n\}$ eine F-Basis von V^*, so gilt: $F[V] \cong F[x_1,\dots,x_n]$. Den Unterring $F[V]^G := \{f \in F[V] \mid gf = f \ \forall g \in G\}$ bezeichnet man als Invariantenring von (G,V). Ist $|G| < \infty$ so besagt ein klassischer Satz von E. Noether, daß $F[V]^G$ endlich erzeugt ist. ~~Dieser~~ Der Beweis des Satzes ist allerdings nicht konstruktiv, außer im Fall char $F = p > |G|$. In diesem Fall wird $F[V]^G$ von Invarianten des Grades $\le |G|$ erzeugt.

Im ersten Teil meines Vortrags betrachte ich die Situation $|G| < \infty$, F beliebig und gebe ein Konstruktionsverfahren an, welches im Fall char $F = p \nmid |G|$ die Gradschranke $\max\{|G|, \dim V(|G|-1)\}$ liefert.
Dies ist eine Konsequenz einer "modularen Version" eines Satzes von Weyl über Vektorinvarianten der symm. Gruppen Σ_n.

Im zweiten Teil kommen einige geometrische Aspekte und Verbindungen zur modularen Darstellungstheorie zur Sprache. Ein Resultat ist die folgende Verallgemeinerung des Satzes von Eagon-Hochster über die Cohen-Macaulay-Eigenschaft von $F[V]^G$ in char $F \nmid |G|$:

Sei char $F = p \mid |G|$, $P \in \mathrm{Syl}_p G$ p-Sylowgruppe, $A^G_{<P} := \sum_{Q<P} t^G_Q(A^Q)$

mit $A = F[V]$, $t^G_Q : A^Q \to A^G$ relative Spur. Dann gilt:

$\sqrt{A^G_{<P}} \trianglelefteq A^G$ ist Primideal. Ist die Operation von P auf V über $\mathbb{F}_{p^s}$ $(s>0)$ definiert,

so ist $A^G / \sqrt{A^G_{<P}}$ Cohen-Macaulay der Dimension $\dim V^P$ (P-Fixpunkte in V)

P Fle[illegible]

"Zykel auf algebraischen Flächen"

Andreas Langer, Univ. Münster

30. 1. 98

Für eine algebraische Varietät über einem Körper K kann man höhere Chowgruppen definieren, die den Begriff der Picardgruppe verallgemeinern. Für einen endlich erzeugten Körper kann man nach der Struktur dieser Gruppen $CH^i(X)$ fragen, $i \geq 0$. In zwei Fällen ist darüber einiges bekannt:

– 1) Der Fall $CH^d(X) = CH_0(X)$, $d = \dim X$, das ist die Chowgruppe der Nullzykel mod. rat. Äquivalenz. Dann hat man die Albaneseabb. $CH_0(X) \to Alb(X)$ in die Albanesevarietät, die für $K = \bar{K}$ einen Isom. auf der Torsion induziert. Ist K endlich, und $A_0(X) = \ker(CH_0(X) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z})$, so läßt sich $A_0(X)$ über geom. Klassenkörpertheorie mit der geom. etalen Fundamentalgruppe beschreiben.

2) Der zweite Fall ist die Torsion in der Chowgruppe der Codimension zwei-Zykel $CH^2(X)_{tors}$. Hier werden im Vortrag die wesentlichen Methoden beschrieben, um zu zeigen, daß die Gruppe endlich ist in den folgenden Fällen.

– K endlich, K lokal, K Zahlkörper und $H^2(X, O_X) = 0$

dies sind algebraische K-Theorie und Gersten-Abstiegsargumente in der Zariski K-Kohomologie (Bloch / Colliot-Thélène – Raskind)

Am Ende des Vortrags werde ich auf neuere Entwicklungen eingehen: Das Beispiel $X = E \times E$ wobei E eine modulare elliptische Kurve über $\mathbb{Q}$ ist. Dann ist die p-primäre Torsion in $CH_0(X)$ endlich. Wesentliche Methode sind die Konstruktion neuer Elemente in der K-Theorie sowie p-adische Hodgetheorie, insbesondere spielen die Vergleichssätze über p-adische Kohomologietheorien eine wesentliche Rolle. Dies ist in gemeinsamen Arbeiten mit S. Saito und W. Raskind behandelt.

A. Langer

"Groups, Fields and Cohomology"

Let G denote a finite group. A well-known result due to Milnor is that if G acts freely on a sphere S^n, then every element of order two in G is central (the 2C property). In this talk we discuss this and other group-theoretic conditions in the context of group actions, cohomology of groups and field theory.

After summarizing the basic techniques for computations in the cohomology of finite groups we list a number of examples, in particular some low-rank sporadic simple groups (at $p=2$). We describe a purely cohomological characterization of finite p-groups satisfying the pC property and how this can be obtained by constructing a free group action on a product of spheres.

Given a field F of characteristic $\neq 2$ we exhibit a certain Galois group $\mathcal{G}_F$ (known as the W-group of F) which is known to satisfy the 2C property if and only if F is non-formally real (provided $|\mathcal{G}_F| > 2$). Finally we discuss the mod 2 cohomology of these groups and how this relates to the cohomology of certain Euclidean space forms.

Alejandro Adem

6.2.98

U. Wisconsin - Madison / MPIM - Bonn

"Die Formel von Gross-Zagier für Funktionenkörper"

Hans-Georg Rück IEM / Essen 13.2.98

Der Vortrag beschreibt eine gemeinsame Arbeit mit Ulrich Tipp (früherer Doktorand in Essen).

Betrachtet werden elliptische Kurven E über dem rationalen Funktionenkörper $\mathbb{F}_q(T)$ mit Führer $N \cdot \infty$.
Diese sind "modular", d.h. ihre L-Reihe $L(E, s+1) = L(f, s)$, wobei f eine Drinfeldsche Spitzenform vom Führer N ist.
Nun sei $L = \mathbb{F}_q(T)(\sqrt{D})$ eine quadratische Erweiterung (hier: D irred., grad D ungerade), betrachtet werden soll die L-Reihe: $L(E, s+1) \cdot L(E_D, s+1)$,
dies ist gleich $\sum_{A} L^{(N)}(2s+1)\, L(f, A, s)$, wobei $A \in \mathcal{C}\ell(O_L)$ ist.
Wenn $\left[\frac{D}{N}\right] = 1$, dann hat die L-Reihe eine Nullstelle bei $s=0$.
In Analogie zu der berühmten Arbeit von Gross-Zagier, wird die Ableitung der L-Reihe $L(f, A, s)$ an der Stelle $s=0$ durch die Höhe von gewissen Heegner-Punkten auf der Drinfeldschen Modulkurve $X_0(N)$ betrachtet.
Heegner-Punkte sind Paare von Drinfeld-Moduln mit zyklischer Isogenie vom Grad N mit komplexer Multiplikation.
Als Korollar erhält man einen Beweis der Birch-Swinnerton-Dyer-Vermutung für elliptische Kurven E über L vom Rang 1.

Hans-Georg Rück

Philosophie und Mathematik

Ernst Kleinert, Hamburg 17/4/98

Der Vortrag geht aus von der Frage nach den Beziehungen zwischen Philosophie und Mathematik. Ein kurzer historischer Rundgang führt zurück zu der eingangs genannten, von der Philosophie zu beantwortenden Frage nach dem Platz, den die Mathematik im Ganzen menschlichen Denkens und Planens einnimmt. Eine systematische Betrachtung, mit dem Ausgangspunkt der philosophischen Anthropologie, leitet, über die Begriffe der Menge und der (mathematischen) Kategorie, zum philosophischen Kategorienbegriff. Es ergibt sich eine Auffassung von Mathematik als konstruktiv-deduktives Entwickeln kategorialer Gesetzmäßigkeiten. Das Feld der Mathematik in einer philosophischen Kategorienlehre abzustecken, erscheint so als die erste und wichtigste Aufgabe einer Philosophie der Mathematik.

EKleinert.

"Statistische Datenanalyse im Mathematikunterricht – Didaktische Konzepte und Ergebnisse von Unterrichtsexperimenten"

Rolf Biehler IDM / Bielefeld 24.4.98

Auf der Basis von epistemologischen und didaktischen Analysen zu Umorientierungen in der Stochastik, die durch neue Anwendungen und neue technologische Mittel (Computer) beeinflußt sind, werden didaktische Konzepte für computergestützten Stochastikunterricht entwickelt und erprobt.

Der Vortrag bezieht sich schwerpunktmäßig auf einen 3wöchigen Unterrichtsversuch in der 8. Klasse einer Bielefelder Gesamtschule. Der Unterricht wurde auf Video aufgezeichnet, und im Anschluß wurden Schüler/innen zu ihren Datenanalysekompetenzen interviewt.

Die lehrplanmäßig vorgesehene Unterrichtseinheit zur Beschreibenden Statistik wurde mit einem neuen Konzept, basierend auf Ideen der Explorativen Datenanalyse, entwickelt. Ein Softwarewerkzeug, daß den Lernenden gestattet, Daten immer selbständiger zu explorieren und mit Methoden zu experimentieren, wurde in den Lehrgang integriert. Statistische Begriffe, Methoden und Denkweisen wurden im Anwendungszusammenhang gelernt. Als Datenbasis diente eine Befragung zum Medien- und Freizeitverhalten der 8. Klässler (120 Sch.); es wurden über 30 Variablen erhoben.

Im Vortrag werden die Konzepte sowie Ergebnisse zu folgenden Forschungsfragen vorgestellt:

- Wieweit ist eine einfache Datenanalysesoftware in den Kurs integrierbar
- Wieweit kann sowohl den Ansprüchen der Mathematik als auch dem inhaltlichen Themengebiet Rechnung getragen werden?
- Welche Kompetenzen im Umgang mit den einfachen Begriffen u. Darstellungen lassen sich bei den Schüler/innen entwickeln?
- Wieweit konnten die in Voruntersuchungen festgestellten Schwierigkeiten der Schüler/innen durch die neu entwickelten

didaktischen Konzepte verringert werden?

- Wie praktizieren Schülerinnen "Detektivarbeit mit Daten"? Welche Schwierigkeiten treten dabei auf?

Möglichkeiten der Fortsetzung des didaktischen Konzepts in Richtung auf eine beurteilende Statistik werden aufgezeigt, wie auch Ideen zur Weiterentwicklung von Konzept, Beispielen und Materialien auf der Basis der erzielten Erkenntnisse.

Double Cosets in Algebraic Groups

Gary M. Seitz U. of Oregon 7-5-98

Let G be a simple algebraic group over an algebraically closed field K.

For closed subgroups $X, Y < G$, we discuss two closely related questions

① When are there finitely many X,Y-double cosets? That is when is $|X\backslash G/Y| < \infty$?

② When is there a dense double coset $XgY \subset G$?

The first part of the talk is concerned with presenting several families of important examples. These are linked to Lie theory, involution centralizers, and representation theory.

In the second part of the talk we discuss attempts to determine triples (X, Y, G) for which ① or ② holds.

There are several significant results in this direction and we are now quite near to decisive results, at least for the case when X, Y are reductive in G.

For example there are complete results when X, Y are reductive subgroups. This is recent work of J. Brundan and together with work of myself, Liebeck and Saxl.

Another important case is concerned with representations of semisimple algebraic groups where there are only finitely many orbits on k-spaces, for some k.

Gary M. Seitz

"Modulformen zu Fricke-Gruppen"

Aloys Krieg RWTH Aachen 15.5.98

Die Fricke-Gruppe $\Gamma_0^*(N)$, $N \in \mathbb{N}$ quadratfrei, ist eine Erweiterung vom Index 2^r, $r = \sigma_0(N)$, der Standardgruppe $\Gamma_0(N) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}), N | c\}$, die durch partielle Fricke-Involutionen entsteht. Nach einem Satz von Helling sind diese Gruppen maximal diskret in $SL_2(\mathbb{R})$.
Das neuerliche Interesse an diesen Gruppen ist entstanden durch Arbeiten von Quebbemann über Gitter. Ein gerades Gitter $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$ heißt streng modular, wenn $\sqrt{n}\,(\frac{1}{n}\Lambda \cap \Lambda^\#)$ für jedes $n | N$ zu Λ isometrisch ist, wobei $\Lambda^\#$ das duale Gitter bezeichnet. Die zugehörigen Theta-Reihen sind Modulformen vom Gewicht $\frac{m}{2}$ zu $\Gamma_0^*(N)$.
Im Vortrag wird die zugehörige Hecke-Algebra beschrieben. Im Gegensatz zu den Schwierigkeiten, die bei $\Gamma_0(N)$ auftreten und zur Atkin-Lehner-Theorie führten, wird die Situation für $\Gamma_0^*(N)$ einfacher. Die Hecke-Algebra ist ein kommutativer Polynomring in abzählbar vielen, algebraisch unabhängigen Variablen, der aus selbstadjungierten Operatoren besteht. Wie im klassischen Fall erhält man eine Basis des Vektorraums der Modulformen, die aus simultanen Hecke-Eigenformen besteht. Hierin treten die Neuformen der Atkin-Lehner-Theorie kanonisch wieder auf.
Als Anwendung wird eine explizite Version des Siegelschen Hauptsatzes für das Geschlecht aufgestellt, das die streng modularen Gitter enthält. Hierin treten nur Linearkombinationen der klassischen Eisenstein-Reihen zu $SL_2(\mathbb{Z})$ auf.

A. Krieg

On representation of finite rings.

(National University of Mongolia)

1. Given one new class of critical rings, $R_{m,n} = End(Z_{p^n} \oplus Z_{p^m})$, where Z_{p^m}, Z_{p^n} are cyclic abelian groups order p^m and p^n.
2. Considred var B_{31}, where $B_{31} = \cancel{End}(Z_{p^3} \oplus Z_p)$ p-rime number.
   var B_{31} does not satisfied finitely representable property by matrices.
   def: the variety $\mathfrak{A}$ ~~is~~ said be have a finitely representable property if every finite ring R of $\mathfrak{A}$. representable by matrices over commutative rings.
3. Given fully family of subdirectly irreducible rings of this variety (more, not only containing in varB_{31}),

   and given matrixes representations of ~~this~~ families. of rings
4. Given all descreption finitely representable subvarieties of var B_{31}, they or satisfies identity $[u,v]w[x,y]=0$ or contained A_{26} and char $J(R)=p$ for all rings R containing in this subvarie~~ties~~
5. $\mathbb{B}_{31}$ = var B_{31} has a only two subvariety B_{21} and $B^{(2)}$. satisfying almost finitely representable property by matrices.

(A. Menar.) University of Ulaan Baator Mongolia 1998. 22. May

Finite Dimensional Approximation of Monopole Equation

"Moduli space" of a given structure is defined as the universal parameter space to classify the structure. (e.g. complex structures, instantons, "monopoles" etc). Moduli space is usually constructed as a subquotient of a big space, sometimes an infinite dimensional space if we use a framework of differential geometry. To describe the moduli space locally, under this formulation, Kuranishi's method is useful, which gives a finite dimensional model for the procedure to take the subquotient. Kuranishi's method gives only a description of a (small) neighborhood of a point of the moduli space. If we use a model with higher dimension, however, it is sometimes possible to extend the neighborhood for which the model is applied. If we consider Seiberg-Witten's monopole equation, then it is known that the moduli space is compact for closed 4-manifolds. In this case we can extend the neighborhood so that the model covers the whole moduli space, so that we have a finite dimensional approximation of the whole setting.

(If we are interested in only topological information of monopole equation, then we could simplify the above steps by using a certain homotopy.)

The finite dimensional approximation sometimes contain more information than the information coming from the moduli space itself as a set. As an application, we have

Theorem (Y. Fukumoto, –)

Let $p, q, r \geq 2$ be pairwise-coprime integers and assume one of them is even. Let $\Sigma = \Sigma(p,q,r)$ be the Brieskorn homology 3-sphere, the link of $0 \in \{x^p + y^q + z^r = 0\}$. Then, if the μ-invariant $\mu(\Sigma(p,q,r))$ is nonzero in $\mathbb{Z}/2$, then there is no acyclic compact 4-manifold X s.t. $\partial X \cong \Sigma \# \Sigma \# \cdots \# \Sigma$ (some number of connected sum)

Theorem

If X is an oriented spin 4-manifold with $\mathrm{sign}(X) \neq 0$, then we have $\frac{5}{4}|\mathrm{sign}(X)| + 1 \leq b_2(X)$.

29. 5. 1998 古田幹雄 Mikio Furuta (Kyoto / MPI)

New development in arithmetic group theory

V. P. Platonov, Waterloo – Bonn.

Let Γ be an arithmetic group (we say that an abstract group Γ is arithmetic if Γ is isomorphic to an arithmetic subgroup of some algebraic group defined over $\mathbb{Q}$.

If F is a finite group of automorphisms of Γ, then we can define the first cohomology set $H^1(F, \Gamma)$. In 1964 Borel and Serre proved that $H^1(F, \Gamma)$ is finite for some special F and Γ. We have the following general problem:

Problem 1. Let $F \subset \mathrm{Aut}(\Gamma)$ be a finite subgroup. Is $H^1(F, \Gamma)$ finite?

Borel and Serre made the following observations: this problem will have a positive solution if one of the following problem has a positive solution.

Problem 2 Let Δ be a finite extension of an arithmetic group group Γ ($[\Delta : \Gamma] < \infty$). Is Δ arithmetic?

Problem 3 Is it true that that Δ has finitely many conjugacy classes of finite subgroups?

Recently we (jointly with F. Grunewald) obtained a solution of these problems. It was a surprising fact that the Problem 2 has a negative solution: $\exists$ a finite extension Δ which is not arithmetic! We obtained some general criterion when Δ is arithmetic. After that we proved that problem 3 has a positive solution. This proof is difficult and is based on the rigidity results for non-semisimple arithmetic groups, and on the fixed point theorems for Teichmüller spaces and CAT(0) spaces.

V Platonov 5.06.1998

Heat Kernel and Zeta Functions

S. Lang, Yale (Joint with Jorgenson)

~~Our~~ general framework for zeta functions starts with obtaining theta functions from the heat kernel on a Cartan-Hadamard manifold (complete, simply connected, seminegative curvature). $\tilde{X}$. The heat kernel $K(t, \tilde{x}, \tilde{y})$ is a perturbation of the Euclidean heat kernel $\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-r^2/4t}$ $(r = d(x,y))$, ~~and~~ actually has a factor which is a convergent power series in t. Let Γ be discrete gp and $X = \Gamma \backslash \tilde{X}$, $\Gamma = \pi_1(X)$. Then the heat kernel on X is

$$K^X(t,x,y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} K(t, \gamma\tilde{x}, \tilde{y}),$$

which is an inverted theta series ($1/t$ in the exponent). It has a Fourier series

$$K^X(t,x,y) = \sum \varphi_k(x)\, \overline{\varphi_k(y)}\, e^{-\lambda_k t}$$

where $\{\varphi_k\}$ is a complete orthonormal system for the Laplacian on L^2, and λ_k is the corresponding eigenvalue. The equality is a theta relation, which is the Poisson inversion formula if $\tilde{X} = \mathbb{R}$, $X = \text{Circle}$. Given a theta inversion

$$\theta(t) = \tilde{\theta}^*(1/t)$$

we take the Gauss transform

$$Z(s) = (\text{Gauss} f)(s) = 2s \int_0^\infty e^{-s^2 t} f(t)\, dt$$

which is the log derivative of the Selberg zeta if we are on Riemann surfaces. In general, it is the start for doing analytic number theory in a general geometric setting.

S Lang 12/06/98

Monodromie von Familien quartischer Kurven und Anwendungen

Herbert Kurke, Humboldt-Universität Berlin
(zusammen mit Ingo Hadan)

Es geht darum, die Monodromie der Familien, die man durch Ebenen aus einer Fläche $B \subseteq \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ vom Grad 4 ausschneiden kann, zu studieren.
Genauer: B habe höchstens gewöhnliche Doppelpunkte und $\Delta \subset \check{\mathbb{P}}^3$ sei der Divisor der Ebenen, die B nicht transversal schneiden, dann möchten wir die Wirkung von $\pi_1(\check{\mathbb{P}}^3 - \Delta, H_0)$ $(H_0 \in \check{\mathbb{P}}^3 - \Delta)$ auf $_2\mathrm{Pic}(B_{H_0}) \cong H^1(B_{H_0}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ (Untergruppe der Punkte der Ordnung 2) und auf $\mathrm{Pic}(Z_{H_0}) = H^2(Z_{H_0}, \mathbb{Z})$ untersuchen.
Dabei ist $B_{H_0} = B \cap H_0$, $Z_{H_0} \to H_0$ die längs B_{H_0} verzweigte Doppelüberlagerung.

Auf die Frage sind wir durch das Problem gekommen, den Raum der Geraden auf der längs B verzweigten Doppelüberlagerung $Z \to \mathbb{P}^3$ zu untersuchen, wobei "Gerade" heißen soll: zu $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ isomorphe Untermannigfaltigkeit mit einem zu dem einer linearen Einbettung $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ isomorphen Normalenbündel.
Der Raum dieser Geraden ist 4-dimensional und seine Zusammenhangskomponenten entsprechen den Monodromie-Orbits auf $\{\ell \in \mathrm{Pic}(Z_{H_0}), \ell^2 = 0, \ell \cdot K = -2\}$

17.6.98

H. Kurke

Weakly symmetric spaces and spherical varieties

E.B. Vinberg (Moscow University)

The notion of a weakly symmetric space was introduced by A. Selberg in 1956, who proved that the algebra of invariant differential operators in any weakly symmetric space is commutative. This generalizes a known property of symmetric spaces which is implied by the theorem of É. Cartan asserting that the representation of the connected isometry group in the space of spherical functions on a symmetric space is multiplicity-free. Recently D. Akhiezer and I proved that a homogeneous Riemannian manifold of a reductive group G is weakly symmetric iff the representation of G on the space of spherical functions is multiplicity-free. Such homogeneous manifolds are called spherical and have been studied by many authors from different points of view for last 20 years. In particular, their classification was obtained. The theorem above gives an affirmative answer (in the case of reductive groups) to a question of Selberg asking if the commutativity of the algebra of invariant differential operators implies weak symmetry. (For nilpotent groups a counterexample was constructed by J. Lauret in 1998.)

Э.Винберг

3.7.98

16.10.98

Degeneration linearer und bilinearer Abbildungen

Es wird ein Kriterium vorgestellt, welches (im Sinne hoher Tensorpotenzen) asymptotische Degeneration von nilpotenten Darstellungen eines Köchers effizient zu testen gestattet. Dabei kommt auch das Asymptotische Spektrum bilinearer Abbildungen und der Exponent der Matrix-Multiplikation zur Sprache.

Volker Strassen
Universität Konstanz

23.10.98

Morse-theoretische Bestimmung von geometrischen Invarianten rechtwinkliger Artin-Gruppen

Jedem endlichen Flaggenkomplex L ist eine rechtwinklige Artin-Gruppe G_L zugeordnet. Sie ist gegeben durch die Präsentierung

$$G_L = \left\langle v \in L^{(0)} \;\middle|\; vw = wv \quad \text{für} \quad \overset{v}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{w}{\bullet} \in L^{(1)} \right\rangle$$

Der 2-Komplex dieser Präsentierung ist ein Quadratkomplex, dessen positive Krümmung wir dadurch beseitigen, daß wir höherdimensionale Würfel einkleben, wo immer die niederdimensionalen Skelette Anlaß dazu geben. Wir erhalten so den kubischen CAT(0)-Raum X_L, auf dem G_L frei und kokompakt operiert.

Resultate von M. Bestvina und N. Brady verallgemeinernd haben J. Meier, H. Meinert und L. VanWyk gezeigt:

<u>Satz</u>: Sei $\chi : G_L \to \mathbb{R}$ nicht trivial. $L^\dagger$ und L^* seien die von den Mengen $\{v \in L^{(0)} \mid \chi(v) = 0\}$ bzw. $\{v \in L^{(0)} \mid \chi(v) \neq 0\}$ aufgespannten vollen Unterkomplexe. Dann sind äquivalent

(1) $\chi \in \Sigma^{n+1}(G_L)$

(2) Für jedes Simplex $\sigma \in L^\dagger$ (auch das leere Simplex $\sigma = \emptyset$) ist der „lebende Link" $Lk_{L^*}(\sigma) := Lk_L(\sigma) \cap L^*$ $(n - \dim(\sigma) - 1)$-zusammenhängend.

Wir geben einen neuen, geometrischen Beweis dieser Aussage, der die Morse-theoretischen Argumente von Bestvina und Brady auf Link-Betrachtungen für konvexe Unterräume $X_{L^\dagger}$ in X_L ausdehnt. So erweist sich (1) als äquivalent zu:

(3) Der aufsteigende Link $Lk^{\uparrow}_{X_L}(X_{L^\dagger})$ ist n-zusammenhängend.

Diese Aussage erweist sich dann als äquivalent zu (2) durch Argumente von Quillen oder alternativ über eine Spektralreihe.

Kai-Uwe Bux

30.10.98

Altes und Neues im Umkreis von Hilberts 17. Problem

Eine Vermutung von Minkowski aufgreifend, zeigte Hilbert 1888, daß es für $n \geq 2$ positiv semidefinite (psd.) Polynome $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$, welche nicht Summen von Quadraten von Polynomen sind. Die Frage, ob solches f Summe von Quadraten rationaler Funktionen ist, konnte er im allgemein nicht beantworten und formulierte sie als siebzehntes auf seiner 1900 vorgestellten Liste ungelöster Probleme. ~~Wie~~ 1927 konnte E. Artin dieses Problem im positiven Sinne klären.

An dieses Problem haben sich seither vielfältige Weiterentwicklungen und Modifikationen angeschlossen. Hier wird zunächst über Schmüdgens Satz (1991) berichtet: Sind $f_1, \ldots, f_r$ Polynome, für die $K := \{f_1 \geq 0, \ldots, f_r \geq 0\}$ kompakt ist, so läßt sich jedes auf K strikt positive Polynom f ~~als~~ als Summe von Produkten $g^2 f_{i_1} \cdots f_{i_m}$ (g Polynom) schreiben. Dieser Satz ist eng mit dem Momentenproblem der Analysis verknüpft.

Sodann berichte ich über einige neue eigene Ergebnisse, die auf Schmüdgens Resultat aufbauen. Für affine $\mathbb{R}$-Varietäten X wird untersucht, ob jedes psd. $f \in \mathbb{R}[X]$ Summe von Quadraten in $\mathbb{R}[X]$ ist. Für große Klassen von Varietäten ist die Antwort negativ, aber es gibt auch Beispiele, wo dies gilt (und dies sind die eigentlich interessanten Fälle): a) glatte Kurven X mit $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ kompakt, b) (zumindest) gewisse glatte Flächen X mit $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ kompakt. Als Anwendung wird gezeigt: Ist $f(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ p.s.d., so ist $(1+x^2+y^2)^N \cdot f$ Summe von Quadraten für $N \gg 0$.

Claus Scheiderer
Univ. Regensburg

6.11.1998

Über die Gruppen von Mathieu.

Mein Anliegen ist ein möglichst elementarer und gruppentheoretischer Zugang zu den relevanten Existenz- und Isomorphiesätzen für Steinersysteme vom Typ (5-j, 6-j, 12-j) und (5-j, 8-j, 24-j).

Das universelle Hilfsmittel zum Thema Isomorphie ist der folgende "Triviale Isomorphiesatz":

Voraussetzung: $1 \leq t \leq k \leq v$, $\exists\, \mathcal{B} \in S(t,k,v)$, alle $\mathcal{B}' \in S(t-1,k-1,v-1)$ sind isomorph

$n \in \mathbb{N}$, $e_1(t,k,v) < 2n$

$gn \mid g'v$ *) mit $g = |\mathrm{Aut}\,\mathcal{B}|$, $g' = \mathrm{Aut}(\mathcal{B}')$

*) für alle $\mathcal{B}$

Behauptung: Alle $\mathcal{B}$ sind isomorph, mit $|\mathrm{Aut}(\mathcal{B})| = g'v/n$.

In den Anwendungen ist $n = j+1$

Die Existenzbeweise gehen Hand in Hand mit der Einbettung gewisser Gruppen in die Mathieugruppen. Zentrales Hilfsmittel ist das "Triviale Induktionslemma":

Voraussetzung: Die Gruppe G operiere auf der Menge Ω, $2 \leq t \leq k \leq v = |\Omega|$,

$\forall \alpha \in \Omega \quad \dot{\exists}$ G_α-invariantes $\mathcal{B}_\alpha \in S(t-1, k-1, v-1)$ auf Ω,

$\forall \alpha \neq \beta \in \Omega \quad \dot{\exists}\ G_{\alpha\beta}$-inv. $\mathcal{B}_{\alpha\beta} \in S(t-2, k-2, v-2)$ auf $\Omega \setminus \{\alpha, \beta\}$

Behauptung: $\dot{\exists}\ G$-inv. ~~$\mathcal{B}$~~ $\mathcal{B} \in S(t,k,v)$ auf Ω.

$e_1(t,k,v) \leq m$ bedeutet: Nicht mehr als m Steinersysteme $\mathcal{B}$ vom Typ (t,k,v) auf einer v-Menge Ω können auf einen Punkt $\alpha \in \Omega$ in dem Sinne übereinstimmen, daß die Menge $\mathcal{B}(\alpha)$ aller α enthaltenden Blöcke für alle $\mathcal{B}$ dieselbe ist.

Helmut Bender

Kiel

13.11.98

K-Typen für temperierte Komponenten der GL_n mit p-adischen Koeffizienten.

Sei $G = GL_n(k)$ für Koeffizienten aus einem endlichen Körper. Vergleicht man die Beschreibung der Konjugationsklassen durch Isomorphieklassen von $k[X]$-Moduln mit derjenigen der irreduziblen Darstellungen von G, dann gibt es eine formale Analogie zwischen der Rolle irreduzibler, primärer und charakteristischer Polynome einerseits und cuspidaler Darstellungen, verallgemeinerter Steinberg Darstellungen und des cuspidalen Trägers einer Darstellung andererseits. Man erhält eine Partition

(1) $Irr(G) = \dot\bigcup_D Irr(D)$ der Isomorphieklassen irreduzibler Darstellungen in Teilmengen von Darstellungen mit fixiertem cuspidalem Träger, und eine entsprechende Zerlegung der Kategorie aller Darstellungen.

Für p-adische Gruppen $G = GL_n(F)$ hat man unverzweigte Charaktere und die Möglichkeit des unverzweigten Twists, wodurch das Spektrum von G (= die Menge der cuspidalen Träger) eine komplexe Mannigfaltigkeit mit Zusammenhangskomponenten Ω_D (=: Bernstein Komponenten) wird, und die entsprechende Partition (2) $Irr(G) = \dot\bigcup_D Irr(\Omega_D)$ welche auf die Bernstein Zerlegung der Kategorie aller glatten Darstellungen führt. Feinere Partitionen als (2) haben keine Entsprechung in einer kategoriellen Zerlegung. Geht man jedoch zu temperierten Darstellungen von G, dann verbessert sich das Zerlegungsverhalten, und (2) hat die Verfeinerung

(3) $Irr^t(\Omega_D) = \dot\bigcup Irr^t(\Theta_P)$ welche den Zusammenhangskomponenten des diskreten Spektrums entspricht. Für (1) wäre dies einfach die Zerlegung in einzelne Elemente. Ein K-Typ für eine Komponente Ω_D ist ein Paar (J, λ) bestehend aus einer kompakten Untergruppe und einer irreduziblen Darstellung davon, sodaß eine irreduzible Darstellung von G ihren cuspidalen Träger in Ω_D hat genau dann wenn sie die Darstellung λ enthält. Bushnell und Kutzko haben K-Typen für alle Komponenten Ω_D konstruiert und aus ihnen nähere Informationen über die Teilkategorien erhalten welche den Ω_D entsprechen. Das Ziel einer gemeinsamen Arbeit mit P. Schneider ist es, K-Typen für die Komponenten der feineren ~~Zerlegung~~ Partition (3) zu konstruieren und daraus entsprechende Folgerungen für die Komponenten der kategoriellen Zerlegung zu ziehen.

E.-W. Zink

Berlin

Birational geometry in terms of subvarieties

Birational classification of algebraic varieties ~~are~~ is done in the line established by Enriques–Kodaira, Shafarevich–Iitaka. Namely, according to the asymptotic behaviour of pluricanonical genera, an algebraic variety falls into one of the class κ, where κ takes value in the set $\{-\infty, 0, 1, \cdots, \dim X\}$. This rough classification is given a more geometric meaning if the minimal model programme (MMP) is completed. If MMP is correct, then arbitrary algebraic varieties are decomposed into standard building blocks, each of which has either negative, trivial, or positive canonical divisor. Thus it should be natural to ask the finer structure of these building blocks. To do that, study of subvarieties is useful and sheds new light. It is known that varieties with "negative" canonical divisor carry lot of rational curves and, conversely, the existence of many rational curves characterize such varieties. A conjecture by S. Lang, P. Vojta and others tells us that the existence of many entire curves or many generalized Kummer subvarieties will characterize varieties with (κ < dimension). This conjecture is closely related to the conformal field theory ($N=3$, or $N=1$), and would be interesting also from the view point of symplectic geometry. Finally, if $\kappa = \dim$, or equivalently if the canonical divisor is positive, then entire curve will cover only a small part of the variety. If X is a surface with $\kappa = 2$, then we can partly show the conjecture; more precisely, the number of rational / elliptic curves on such a surface X is bounded by a constant which is determined by the topological type of X. This boundedness property of varieties of positive canonical class is supposed to carry over also to arithmetic problem (rational points).

Yoichi Miyaoka 宮岡洋一
RIMS, Kyoto University

20. 11. 98

27.11.98

A GENERAL PURITY THEOREM

There are ~~several~~ many classical examples of "purity" theorems. One of the simplest is this: if X is a smooth algebraic variety over a field k and $f \in k(X) = K$ is a rational function ~~which pole~~ having no zeros and poles crossing the given point $x \in X$, then $f \in \mathcal{O}^*_{X,x}$. I.e. f is regular and invertible in a neighborhood $\mathcal{U}$ of the point $x \in X$.

Before to state a general purity theorem let us give an example, which is new and usuful (for the Grothendieck Conjecture about principal homogeneous spaces).

Theorem 1. Let X be the k-smooth alg. variety over the field k and let $x \in X$ be the given point. ~~Suppose~~ Let $a \in K^*$ be s.t. for each divizor $D \ni x$ there exists an element $\mathcal{O}^*_{X,D} \ni a_D$ with the property $a \equiv a_D$ (modulo $\mathcal{D}_n(K)$), where $\mathcal{D}_n(K) = \{ b \in K^* / b = \sum_{i=1}^{2^n} t_i^2,\ t_i \in K \}$. Then there exists a unit $a_x \in \mathcal{O}^*_{X,D}$:

$$\boxed{a \equiv a_x \bmod \mathcal{D}_n(K)}.$$

Remark. If T is a scheme of finite type$/k$, then set $\mathcal{F}(T) = \frac{k[T]^*}{\mathcal{D}_n(T)}$, where $\mathcal{D}_n(T) = \{ u \in k[T]^* / \forall t \in T\ u \in \mathcal{D}_n(\mathcal{O}_{T,t}) \}$. With respect to this notation the theorem can be reformulated as follows: the sequence

$$\mathcal{F}(\mathcal{O}_{X,x}) \to \mathcal{F}(K) \to \bigoplus_{D \ni x} \mathcal{F}(K)/\mathcal{F}(\mathcal{O}_{X,D})$$

is exact. Moreover it is ~~exact~~ a short exact sequence.

For $n=0$ this result is well-known and follows easy from the exactness of the sequence $0 \to \mathcal{O}^*_{X,x} \to K^* \to \bigoplus_{D \ni x} \mathbb{Z} \to 0$.

For $n=1$ it is a theorem of Colliot-Thélène and Sansuc (1987). For $n=2$ it is a theorem of Colliot-Thélène, Parimala and Shridharan (1991). ~~And~~ independently it was proved by Rost (1991). The injectivity $\mathcal{F}(\mathcal{O}_{X,x}) \hookrightarrow \mathcal{F}(K)$ is due to Colliot-Thélène and Ojanguren (1989).

We observed that the functor $\mathcal{F}: Sch/k \to Ab$ mentioned above is a homotopy invariant, additive functor, endowed with canonical transfers. Thus the following general result proves in particular ~~the~~ theorem 1.

Theorem (A GENERAL PURITY THEOREM; Ojanguren, —; 1998). Let $\mathcal{F}: Sch/k \to Ab$ be an additive, homotopy invariant functor endowed with canonical transfers. The the sequence ~~a~~ $0 \to \mathcal{F}(\mathcal{O}_{X,x}) \to \mathcal{F}(K) \to \bigoplus_{x \in D} \mathcal{F}(K)/\mathcal{F}(\mathcal{O}_{X,D})$ is exact.

Remark. The Quillen's K-theory and étale cohomology are functors satisfying the hypotheses of this theorem. Our work was inspired by the paper "Homology of schemes II" by Voevodsky.

I. Panin [signature]

18. 12. 98

Isometrien und Isomorphismen fehlerkorrigierender Codes

In formaler Analogie zu einem Satz von E. Witt über Isometrien metrischer Vektorräume, sagt der Monomialsatz der Codierungstheorie, daß sich jede lineare Isometrie zwischen linearen Codes $C, D \subseteq GF(q)^n$ zu einer Isometrie von $GF(q)^n$ fortsetzen läßt. Die Isometrien von $GF(q)^n$ sind gerade die monomialen Abbildungen von $GF(q)^n$.
Im Gegensatz dazu gibt es (nicht-lineare) Isometrien zwischen gewissen Codes $C, D \subset F^n$, die sich nicht zu Isometrien des gesamten Raumes F^n fortsetzen lassen.
Wir nennen einen (nicht notwendig linearen) Code $C \subseteq F^n$ über einem Zeichenvorrat F „metrisch starr", wenn sich jede Isometrie $\varphi : C \to F^n$ zu einer Isometrie $\Phi : F^n \to F^n$ fortsetzen lässt.
Mit kombinatorischen und geometrischen Methoden kann gezeigt werden, daß mit Ausnahme des binären Hamming-Codes der Länge 7 und des ternären Hamming-Codes der Länge 4 jeder perfekte (nicht notw. lineare) 1-fehlerkorrigierende Code metrisch starr ist.
Es werden einige weitere Klassen von Codes auf ihre metrische Starrheit überprüft.

Solov'eva, F.; Augostinovich, S.; Honold, Th.; Heise, W.: On the extendability of code isometries. Journal of Geometry 1998.

Werner Heise
TU München