

Beweis und Kommunikation. Überlegen Sie, wie eine Konstruktion  
der Mathematik

Bellare, Heintz, ~~Heintz~~ Heintz

Mein Vortrag, bezieht sich auf die Frage, inwieweit die  
mathematische Beweismethoden betrachtet werden sind  
und wie einige neue Beweismethoden - die Mathematik zu - gelassen  
sind, die für eine "liberalen" der mathematischen  
Beweismethoden, vor allem plötzliche.

In einem ersten Teil geht es um die Bedeutung der Objektivität  
Tatsächlich ist die mathematische Beweismethode, durch und in welcher Weise  
freigibt die Befähigung zu Beweisen, von Objektivität  
verändert haben. In einem zweiten Teil geht es um die  
Überlegenheit auf die Mathematik und geht, dass es auch  
hier zu einer stärkeren Umkehrung, von individuell  
Kommunikation - sprachliche Handhabung, kommt  
mit der Effektivität, dass die Beweis zu beweisbar ist. Teil  
drei geht, wird. In einem dritten Teil geht es  
auf einige neue Beweismethoden in der Mathematik die  
die in Betrachtung, ist die methodische Ein- / der  
Logik über und die in 19. Jahrhundert entwickel-  
ten Beweismethoden. Beweismethoden der Mathematik  
bis zu einem gewissen Grad - bezieht sich auf die Beweismethoden.

7.1.2000

14.01.2000

## Nilpotent pairs in semisimple Lie algebras

Recently, V. Ginzburg introduced and studied principal nilpotent pairs in s.s. Lie algebras. This notion is a double counterpart of the ~~principal~~ principal nilpotent orbit. In my ~~talk~~ talk I will try to explain what should be a proper <sup>double</sup> analogue of all nilpotent orbits.

It is well-known that nilpotent orbits have close connections with representation theory, reflection groups, differential operators, combinatorics, quaternionic geometry, etc. So the general idea is to "double" everything.

However, our primary goal is to develop the theory of nilpotent pairs in its own right.

We also discuss classification of ~~the~~ principal nilpotent pairs in the simple Lie algebras, and some applications to sheets and dual pairs.

Dmitri Panynshev (Moskau)  
(Дмитрий Паньшев)

⊗ aus der algebraischen Geometrie benötigt werden. Insbesondere entfällt der Satz von Riemann-Roch.

Oliver Pretzel  
OLIVER PRETZEL  
(Imperial College, London)

## Partielle Goppa Codes

21.01.2000.

Seit Goppas Entdeckung der algebraisch-geometrischen Codes und dem Beweis, dass sie die Gilbert-Schranke erreichen, gibe es zwei Hauptprobleme um diese Codes. Das erste ist, gute Goppa-Codes zu konstruieren und das zweite ist, effiziente Korrekturmethode für diese Codes zu entwickeln. Bei beiden Problemen spielt das Geschlecht der zugrundeliegenden Kurve eine entscheidende Rolle. Nun ist aber die Bestimmung des Geschlechts einer vorgegebenen algebraischen Kurve im Allgemeinen ein schweres mathematisches Problem. Die Grundidee der partiellen Goppa-Codes ist, auf die Bestimmung des Geschlechts zu verzichten und dieses durch ein kombinatorisch errednetes "Pseudogeschlecht"  $g$  zu ersetzen. Dabei ist automatisch immer  $g \leq g$  und, je näher  $g$  bei  $g$  liegt, desto näher gleichen sich die partiellen und die vollen Goppa-Codes.

Es sei also  $C$  eine algebraische Kurve über einem endlichen Körper und es seien  $P_1, \dots, P_n, Q$ , paarweise verschieden einfache rationale Punkte von  $C$ . Wir nehmen an, dass wir einen Ring  $W$  von rationalen Funktionen auf  $C$  konstruieren können, der die folgenden Eigenschaften hat:

- (1) Die Funktionen in  $W$  haben  $Q$  als einzigen Pol.
- (2) Bis auf endlich viele Werte kommen sämtliche Potenzen  $g$  bei  $Q$  unter den Funktionen von  $W$  vor
- (3)  $W$  trennt die Punkte  $P_1, \dots, P_n$  in dem Sinne, dass es für jedes  $i = 1, \dots, n$  eine Funktion  $\varphi_i \in W$  gibt derart, dass  $\varphi_i(P_j) = \delta_{ij}$  (Kronecker  $\delta$ ).

Die fehlenden Potenzen in (2) heißen Lücken und ihre Anzahl ist  $g$ .

Nun lässt sich mit diesen Voraussetzungen die gesamte Theorie der sogenannten "ein-Punkt-Goppa-Codes" inklusive ihrer Fehlerkorrekturalgorithmen entwickeln, wobei keine weiteren Voraussetzungen  $\otimes$

Die Struktur- und Darstellungstheorie der linearen algebraischen Gruppen über einem endlichen Körper  $\mathbb{F}_q$  weist eine Vielzahl generischer Aspekte auf:

Viele der Sätze (und auch Beweise) lassen sich in einer Situation formulieren, in der die Körperordnung  $q$  durch eine Unbestimmte  $x$  ersetzt ist. Ein typisches Beispiel hierfür ist die generische Suzuki-Flecke-Algebra, eine generische Version der Endomorphismenalgebra des Permutationsmoduls auf den Nebenklassen der Boreluntergruppe. Aus den tiefliegenden Resultaten von Lusztig folgt etwa, daß die kombinatorischen Eigenschaften der sogenannten unipotenten Darstellungen nur von der Weylgruppe abhängen, also generisch sind. Sie lassen sich also vollständig aus der Weylgruppe rekonstruieren.

Es stellt sich nun die Frage, ob eine ähnliche Konstruktions auch ausgehend von einer beliebigen endlichen komplexen Spiegelungsgruppe möglich ist. Arbeiten von Brué, Michel, Rouquier und dem Vortragenden haben gezeigt, daß dies in der Tat möglich ist. Ausgehend von der komplexen Spiegelungsgruppe  $W$  konstruieren wir eine Zopfgruppe  $B(W)$ , und als Quotient der Gruppenalgebra von  $B(W)$  die zyklotomische Fleckealgebra  $\mathcal{F}(W, x)$ . Diese Deformation der Gruppenalgebra von  $W$  ist eine direkte Verallgemeinerung der Suzuki-Flecke-Algebra.

In vielen Fällen ist bekannt, daß sie eine (eindeutig bestimmte) symmetrisierbare Form besitzt. Aus ihren zugehörigen Schur-Elementen lassen sich nun die gesuchten "unipotenten Darstellungen" aufbauen. Es zeigt sich, daß für sogenannte "spezielle" Spiegelungsgruppen Objekte erhalten werden, die sich wie die den Gruppen vom Lie-Typ zugeordneten generischen Objekte (s.o.) verhalten.

Es liegt daher die Vermutung nahe, daß für spezielle Spiegelungsgruppen ein Analogon der Gruppen vom Lie-Typ existieren könnte, welches die generischen Objekte hervorbringt. In Unkenntnis der Natur dieser vermuteten Analoga nennen wir sie

Spetses, nach der griechischen Insel, auf der ihre Existenz erstmals diskutiert wurde.

Gunter Malle

Gunter Malle

Universität Kassel

4.02.2000

## The general Coxeter cells in the Bruhat decomposition of Chevalley groups.

The classical problem of the Linear Algebra is to find a "good form" "up to conjugacy" of a linear operator. Examples of such forms are Jordan normal and rational normal forms. In 1964, R. Steinberg gave a generalization of the rational form for simple algebraic group. Namely, he has proved that every regular element of such groups has a form  $wu$  where  $u$  is an element from the unipotent radical of a Borel subgroup  $B$  and  $w \in W_G(\mathbb{T})$  is a preimage of a Coxeter element of the Weyl group  $W$ , i.e.  $w = w_{\alpha_1} \dots w_{\alpha_r}$  where  $w_{\alpha_i}$  are basic reflections. Moreover, the element  $u$  is described as a product of corresponding root elements and the whole form  $wu$  coincides with usual rational form of a cyclic matrix in the cases  $SL_n, GL_n$ . It gives a description of intersections  $C \cap BwB$  where  $C$  is a conjugacy class of a simple algebraic group with Coxeter-Bruhat cell  $BwB$ . This talk devoted to a description of intersections of conjugacy classes of Chevalley groups with general Coxeter cells  $BwB$  where  $w$  is an element which is  $W$ -conjugate to  $w' = \prod w_{\alpha_i}$  where  $X$  is a subset of basic roots. That is in the general conception of a description of "good forms" "up to conjugacy" in simple algebraic groups.

T-gram      Nikolai Gordeev  
(St. Petersburg)

# 11.2.00 Eine neue Methode in der additiven Zahlentheorie.

Eine Teilmenge  $\mathcal{P} \subset \mathbb{N}$  genügt "Kriterium D", wenn für alle  $a, q \in \mathbb{N}$  asymptotische Formeln des Typs

$$\sum_{\substack{s \leq x \\ s \in \mathcal{P}, s \equiv a(q)}} 1 = \rho x g(q, a) + o(x) \quad (x \rightarrow \infty)$$

mit  $\rho \geq 0$ ,  $g(1, 0) = 1$  gelten. Solchen Mengen ordnet man zu:

$$G(q, a) = \sum_{b=1}^q g(q, b) e^{2\pi i ab/q} \quad (\text{"Gauss'sche Summe"})$$

$$\mathcal{S} = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{a=1 \\ (a, q)=1}}^q |G(q, a)|^2 \quad (\text{"singuläre Reihe"})$$

Ist  $\rho > 0$ , dann konvergiert  $\mathcal{S}$ , und es gilt  $1 \leq \mathcal{S} \leq \rho^{-1}$ . Die Folge  $\mathcal{P}$  heißt extremal, wenn  $\mathcal{S} = \rho^{-1}$  gilt.

**SATZ 1.** Sind  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ -Folgen, die Kriterium D genügen, und  $\mathcal{A}$  sei extremal. Dann gilt

$$\#\{ (a, b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} : a+b=n \} = \sum_{\mathcal{A}} \sum_{\mathcal{B}} n \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{a=1 \\ (a, q)=1}}^q G_{\mathcal{A}}(q, a) G_{\mathcal{B}}(q, a) e^{-\frac{a}{q}} + o(n) \quad (n \rightarrow \infty)$$

Es gibt viele Beispiele für extremale Folgen. U.a. gilt:

**SATZ 2.** Ist die charakteristische Funktion von  $\mathcal{P}$  multiplikativ und konvergiert  $\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p}$ , dann ist  $\mathcal{P}$  extremal.

Viele weitere Beispiele ergeben sich durch Schnitt extremaler Folgen. Ferner lassen sich in extremalen Folgen auch arithmetische Progressionen beliebiger Länge zählen.

Jörg Brüdern, Stuttgart.

Astrophysikalische Jets bei der Sternentstehung:  
mathematische Modellierung und  
numerische Simulation

Senkrecht zu Akkretions Scheiben bei jungen Sternen beobachtet man das Auftreten von astrophysikalischen Jets. Dies ist ein dünner Strahl von  $H_2$  welcher sich mit hoher Geschwindigkeit in ein ruhendes Medium ausbreitet.

Ausgehend von einer kinetischen Beschreibung erhält man durch Momentenbildung Massen-, Impuls- und Energieerhaltung aber auch Gleichgewichtsgleichungen für weitere Momente. Bei dem hier vorliegenden physikalischen Regim lassen sich z.B. die Temperatur numerisch nur sehr ungenau aus den Erhaltungsgrößen berechnen. Wir betten die Erhaltungsgleichungen in ein größeres System mit einem Moment mehr ein, und projizieren die dort gefundene Lösung zurück in den Raum der Lösungen der Erhaltungsgleichungen. Für dieses sog. Relaxationsverfahren können wir (mit F. Coquel (Paris VI)) beweisen, daß es eine diskreten Entropieungleichung genügt.

Numerische Simulationen der Jets stimmen gut mit Beobachtungen überein.

14. April, 2000

Christian Klingenberg

Aus Würzburg

Loop groups, bundles over elliptic curves,  
simple elliptic singularities

- 28.7.2000 -

This is a report on joint work with Stefan Helmke (RIMS, Kyoto) which completes a program started 20 years ago, and it generalises a well-known Theorem of E. Brieskorn (1970) which links the simple surface singularities of type  $A, D, E$  to the orbital geometry of the corresponding simple Lie groups. The generalisation concerns the simple elliptic singularities of type  $\tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$  introduced by K. Saito (and called 'parabolic' by V. Arnold). The corresponding Lie groups are now nonhomomorphic loop groups extended as in the Kac-Moody-theory. The main problem is the description of the analogue of the unipotent variety. For that, we have to interpret loops in terms of principal bundles over elliptic curves. A classification of 'big' unstable bundles and a description of their deformations yield the clue to our generalisation of Brieskorn's Theorem. P. Slodowy



# Eigenwertverfahren als Dynamische Systeme

- 5.5.2000 -

Wir untersuchen Eigenwertverfahren vom Standpunkt der Theorie dynamischer Systeme. Zunächst wird etwas Überzeugungsarbeit geleistet, um zu zeigen, daß numerische Eigenwertverfahren - wie überhaupt numerische Verfahren der linearen Algebra - tatsächlich dynamische Systeme sind. Differentialgleichungen die symmetrische Matrizen diagonalisieren werden vorgestellt. Diskretisierungen dieser Differentialgleichungen liefern dann u.U. effiziente numerische Verfahren. Schließlich werden noch Kontrollierbarkeitsfragen numerische Verfahren am Beispiel der erweiterten Rayleigh Iteration vorgestellt.

U. Helmke

## Maps of non-zero degrees between manifolds

- 12/5/2000

We address various questions under the above title. like existences, boundedness, uniqueness, finiteness standard form and constructions. Some known results are surveyed. It is a nature and rich topic.

Peking Univ. 王诗家

(Shisheng Wang)

# Analysis and the Monster

19.5.2K

The monster,  $M$ ,  $|M| \sim 10^{54}$ , is the largest sporadic finite simple group. Moonshine concerns the existence of Hauptmoduln,  $f_g$ ,  $g \in M$ , and proper (Hecke) representations of  $M$ , such that

$$(*) \quad f_g = \frac{1}{q} + \sum_{k \geq 1} a_k(g) q^k \quad q = e^{2\pi i \tau}, \quad \text{Im } \tau > 0, \quad a_k \in \mathbb{Z}$$

$a_k(g) = \text{Trace}(H_k(g))$ .  $\Gamma_0(N) \leq G_f \leq \text{Hecke}(N)$  where  $G_f$  is the invariance group of  $f_g$ , and Hecke is a maximal genus 0 group.

A wider class of functions is called replicable and is the family of functions which behave well under the generalized Hecke operator  $T_n$ , where  $f = f^{(1)}$  has the form  $(*)$

$$\forall n \geq 1 \quad n \times \hat{T}_n(f) = \sum_{ad=n}^{(a)} f\left(\frac{a\tau+b}{d}\right) = P_{n,f}(f), \quad P_{n,f}(f) = \frac{1}{q^n} + \sum_{m \geq 1} h_{m,n} q^m$$

where  $P_{n,f}$  are Faber polynomials characterized by this property. If  $P_{n,f}(f) = \frac{1}{q^n} + \sum_{m \geq 1} h_{m,n} q^m$

then (McKay-Schwarz) for Hauptmoduln  $f$ :  $\{f, \tau\} = 1 + 12 \sum_{m,n \geq 1} h_{m,n} q^{m+n}$  where

$\{, \}$  is the Schwarz derivative. This is a holomorphic form when  $G_f$  is free. These  $G_f$  are classified and yield Dessins d'Enfant. This leads to generalization of Beauville's elliptic surfaces. This is a limit version of Borcherds' product formula.

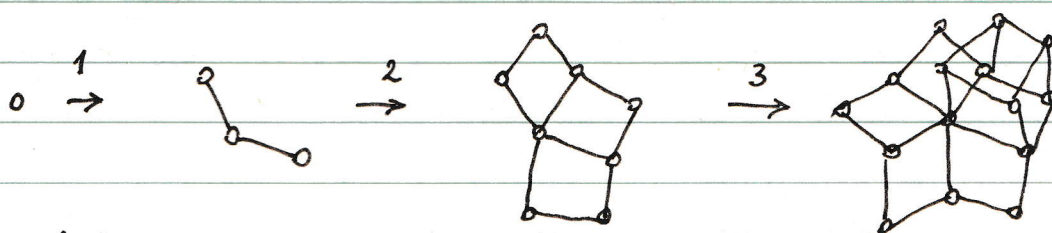
The theorem of Norton:  $f$  replicable is determined from  $\{a_k\}$ ,  $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 17, 23\}$  and  $p$ -adic lifting enables one to ultimately compute all replicable forms satisfying  $(*)$ .

John McKay

# Geometrie und Anwendung medianer Netzwerke

26.5.2000

Mediane Netzwerke, auch Buneman Graphen genannt, können als gewisse kubische Komplexe aufgefasst werden. Diese können durch eine Expansionsprozedur aufgebaut werden, die im trivialen Fall von Bäumen gerade vom Zentrum beginnend in jeder Runde jeweilige Endkanten generiert. Für mediane Netzwerke ist das Problem, die Rundenanzahl (wobei in jeder Runde simultan neue "randständige" Hyperwürfel generiert werden) zu minimieren, jedoch NP-schwer. In der Praxis der Visualisierung phylogenetischer Beziehungen zwischen mtDNA Sequenzen in der Genetik scheint allerdings schon ein Greedy-Algorithmus die optimale Rundenanzahl zu liefern.



Hans-Jürgen Bandelt (Universität Hamburg)

# Frobenius Algebras

2.6.2000

In 1903 G. Frobenius proved that for a finite dimensional algebra  $A$  over a field  $K$  the left and the right regular representations of  $A$  are equivalent if and only if there exists a nondegenerate associative  $K$ -bilinear form  $\beta: A \times A \rightarrow K$ . In 1937 D. Brauer and C. Nesbitt pointed out the importance of the algebras studied by G. Frobenius and named them Frobenius algebras. Natural examples of Frobenius algebras are provided by the group algebras of finite groups, enveloping algebras of restricted Lie algebras, Hopf algebras and trivial extensions of algebras by the injective cogenerators. The basic theory of Frobenius algebras has been developed in the period 1937-1949 by E. Brauer, C. Nesbitt and T. Nakayama. In recent investigations of the representation theory of finite dimensional algebras an important role is played by the Frobenius algebras of the form  $B/G$ , where  $B$  is the repetitive algebra of an algebra  $B$  and  $G$  is an admissible group of  $K$ -linear automorphisms of  $B$ . During the talk we discussed the structure and representation type of <sup>Frobenius</sup> algebras of tilted type, that is, algebras of the form  $B'/G$  where  $B'$  is a tilted algebra and  $G$  is a torus-free group acting on  $B'$ . We have shown that all <sup>Frobenius</sup> Frobenius algebras of finite type are such equivalent to Frobenius algebras of tilted Dynkin type (Biedermann-Naschburm) and those of abelian type are Frobenius of tilted Buchstein type (Skowronski). We have presented also a recent work with K. Yamagata characterizing all Frobenius algebras of tilted type and giving general criteria for a Frobenius algebra to be of the form  $B'/G$  for a factor algebra  $B' = A'/E$  of  $A$ .

Andrzej Skowronski (Nicholas Copernicus University, Torun)

# A Comparison of Some Popular Methods of Evolutionary Tree Reconstruction

9.6.2000

We compare the relative successes of four common methods of reconstructing evolutionary trees (phylogenies) from sets of simulated nuclear sequences derived from a generating tree  $T$  under a Markov model of nucleotide substitution. The methods examined were maximum parsimony (MP), maximum likelihood (ML), UPGMA (UP) and Neighbor Joining (NJ). Felsenstein (1979) showed (in 1979) that MP was "inconsistent" with such a model if substitution rates on different edges of  $T$  showed extreme variation. One can show that UP and NJ also have this same property, of producing the correct tree  $T$  with probability  $p \rightarrow 0$  as the sample size  $c \rightarrow \infty$ . We have shown that for Felsenstein's example can be modified by introducing a "correction" for estimating the parallel substitutions, and in these cases CMP (corrected MP) and CNJ (corrected NJ) become consistent.

In 1989 Penny & I showed that the inconsistency problem <sup>for MP</sup> can occur in a tree  $T$  of 5 sequences even if all branch rates of substitution were equal, i.e. under the "molecular clock", and in 1995 I found that for finite sequence lengths, near the region of inconsistency, MP would return each of 4 incorrect trees with frequencies approaching  $2/9$  of all trials, whereas the correct tree  $T$  would occur with frequency  $1/9$ .

In our current study we analysed the behaviour of each of the 4 methods MP, ML, UP, NJ and the two corrected methods CMP and CNJ, for samples generated on a sample tree  $T$  of 5 sequences under the simple Markov model of nucleotide substitution under the molecular clock. Our examples showed that in the region close to the parameters where MP is inconsistent that UP and NJ performed significantly better than MP and ML, and that the "corrected" versions, CMP and CNJ did not perform better.

Mike Hendy - Massey University, New Zealand.

# Volumes of hyperbolic manifolds

16.6.2000

Let  $\Pi$  be a complete locally symmetric Riemannian manifold of negative curvature.

The main goal of my talk is to give estimates on the smallest volumes of such  $M$ 's.

Fix  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{C}\ell_n\}$  the real, complex or quaternionic, or the octonionic algebra and  $u \geq 2$  an integer with  $u=2$  if  $K=\mathbb{C}\ell_n$ . By a theorem of E. Cartan,  $\Pi$  is isometric to  $\mathbb{H}_K^u$ , the hyperbolic space over  $K$  of dimension  $u$ . By a theorem of H.C. Wang if  $(K, u) \neq (\mathbb{R}, 3)$  and Jorgenson-Thurston if  $(K, u) = (\mathbb{R}, 3)$  there exist a manifold covered by  $\mathbb{H}_K^u$  of smallest volume. In the case  $(K, u) = (\mathbb{R}, 2)$  the spectrum of volumes, by Gauss-Bonnet theorem is  $2\pi\mathbb{N}$ . We shall present or inform about the situation in the real case. But our main result is about a complex case.

In 1996, Herscovici and Paulin proved that if  $\Pi^u$  is a complex hyperbolic  $u$ -manifold with  $K$ -ends and of finite volume, then  $\text{Vol}(\Pi) \geq \frac{K}{u I_u}$

Here  $I_u$  is an order of maximal holonomy group of Almost-Bieberbach group  $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{u-1})$ .

In 1998 J. Parker improved the above estimate:

$\text{Vol}(\Pi) \geq \frac{2^u K}{u I_u}$ . Our main result (obtained together with K. B. Lee, Norman, Oklatunga) is:  $I_3 = 24$ . Then for 3-dimensional complex hyperbolic with  $K$ -ends and of finite volume manifold  $\Pi$ , we have  $\text{Vol}(\Pi) \geq \frac{K}{9}$ .

Andrzej Świączkowski (University of Gdańsk, Poland)

K-type structure in degenerate principal series representations of semisimple Lie groups - further examples. 07/06/00 Roger Howe

This talk reports a continuation of an investigation of the use of the action of the maximal compact subgroup of a semisimple Lie group to understand the structure, especially composition series and unitarity, of principal series representations of semisimple Lie groups. So far, the work has consisted of a study of various special cases. Some examples are

- i)  $O_{p,q}, U_{p,q}, Sp_{p,q}$  - most degenerate principal series Howe-Tan 1991-92 (also treated by Kelymnik & co-workers)
- ii)  $U_{p,q}, Sp_n(\mathbb{R}), GL_n(\mathbb{R})$  - series induced from "Siegel parabolics" - mid 90s - Sahi, Johnson, Zhang, Lee
- iii)  $GL_n(\mathbb{R}), GL_n(\mathbb{C})$  - series induced from stabilizer of a subspace - Howe - Lee, late 90s
- iv) full principal series of  $GL_2$  - Howe, late 90s

Cases i), ii), iii) are all multiplicity-free as representations of  $K$ , so that a given  $K$ -type does or does not appear in a given  $G$ -constituent of the relevant principal series. The methods of the studies mentioned above allow one to see how the  $K$ -types contained in various constituents change in systematic ways as the parameter of the principal series representation varies.

The new case presented today is that of the principal series of  $GL_n$  induced from character of the stabilizer of a line and a hyperplane containing the line. The  $K$ -types in these representations have unbounded multiplicities. However, there is a unique basis for the  $K$ -types compatible with all finite dimensional subrepresentations. When a finite-dimensional representation does occur, this basis reveals a total of 4 constituents of the principal series.

The arguments showing the existence of this basis exploit the fact that the specified principal series can be described as a tensor product of two principal series of type iii) above. This again is joint work with S-T Lee.

## Endotrivial Modules and Categorical Equivalences

Let  $G$  be a finite group and let  $k$  be a field of characteristic  $p > 0$ . A finitely generated  $kG$ -module is endotrivial if  $M^* \otimes M \cong \text{Hom}_k(M, M) \cong k \oplus (\text{projective})$  as  $kG$ -modules. Endotrivial modules were introduced by Dade and Alperin in the late '70's although the roots of the idea go back much further. Tensoring with an endotrivial module gave an equivalence on the stable category of  $kG$ -modules. If  $\mathcal{K}_G$  is the thick subcategory of the stable category  $\text{stmod}(kG)$  generated by the trivial module then any equivalence  $\mathcal{K}_G \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}_H$  must take the trivial module to an endotrivial module by a theorem of Carlson + Rouquier.

If  $G$  is an abelian  $p$ -group Dade proved that a module  $M$  is endotrivial if and only if  $M \cong \Omega^n(k) \oplus \text{proj}$  for some  $n$ . For any  $G$  a  $kG$ -module is endotrivial if and only if its restriction to every elementary abelian  $p$ -subgroup is endotrivial. So if  $\mathcal{T}(G)$  is the group of endotrivial modules we have a map

$$\mathcal{T}(G) \xrightarrow{\text{restriction}} \coprod_{E \text{ elem}} \mathcal{T}(E)$$

The image of this map is well understood by work of Alperin, Bouc + Thévenaz. The problem has been to understand the kernel  $\mathcal{K}(G)$ . By a theorem of Puig it is known that the kernel is finite. In joint work with Jacques Thévenaz we show that the kernel is detected on restriction to extra special  $p$ -groups in the case that  $G$  is a  $p$ -group. Other work has eliminated some of the most difficult cases of extra special  $p$ -groups.

Jon F. Carlson