Elementare Geometrie

SS 2007

Übung 8

1) Es sei ABC ein Dreieck. Man konstruiere einen Kreis K, dessen Mittelpunkt M auf der anderen Seite der Geraden AB liegt wie C, und der alle drei Geraden AB, BC und CA als Tangenten hat.

2) Es sei K ein Kreis und H ein Punkt innerhalb des Kreises und A' ein Punkt auf dem Kreis. Man konstruiere ein Dreieck mit dem Umkreis K, dessen Höhen sich in H schneiden und das A' als Eckpunkt hat.

(**Hinweis**: Man zeichne eine Rosette.)

3) Es sei ABC ein Dreieck. Es sei $a = |BC|, b = |AC|$ und $c = |AB|$. Es sei α der Winkel bei A, β der Winkel bei B und γ der Winkel bei C. Man beweise die Relationen

$$b \cos \alpha + a \cos \beta = c. \tag{1}$$

Man unterscheide die Fälle, wo α und β beide kleiner als $90°$ sind, und wo einer der Winkel größer als $90°$ ist. Mit Hilfe des Sinussatzes folgere man aus (1) die Relation:

$$\sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta = \sin \gamma.$$

4) Es sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck: $a = |BC| = |AC|$. Der Winkel γ an der Spitze C sei kleiner als $90°$. Man fälle das Lot von A auf BC und bezeichne den Fußpunkt mit F. Aus der Betrachtung des Dreiecks ABF beweise man die Relation

$$a^2(1 - \cos \gamma)^2 + a^2 \sin^2 \gamma = c^2.$$

Man folgere die Identität

$$\cos \gamma = 1 - 2 \sin^2(\frac{\gamma}{2}) = 2 \cos^2(\frac{\gamma}{2}) - 1.$$