Kompositum von zwei Achsenspiegelungen

Viktor Fast

Definition 1. Eine Spiegelung an einer Achse g (man schreibt Sp_g) bildet jeden Punkt $P \in \mathbb{E}$ auf einen Punkt $P' \in \mathbb{E}$ ab, wobei gilt:

$$|Pg| = |P'g| \text{ und } PP' \perp g.$$

Satz 1. Schneiden sich zwei Geraden g und h in einem Punkt P , so ist das Kompositum $Sp_g \circ Sp_h$ eine Drehung um den Punkt P mit dem Winkel $\{2 \cdot \alpha \mid \alpha = \angle(gh)\}$. Kurz:

$$Sp_g \circ Sp_h = Dr_{P, 2\alpha}$$

Beweis. $\forall T \in \mathbb{E}$ gilt: $Sp_g(T) = T'$, wobei $|Tg| = |T'g|$ ist und $TT' \perp g$.

$$\Rightarrow \angle(TPg) = \angle(gPT')$$

weiter gilt: $Sp_h(T') = T''$, wobei $|T'h| = |T''h|$ ist und $T'T'' \perp h$.

$$\Rightarrow \angle(T'Ph) = \angle(hPT'')$$

$$\Rightarrow \angle(TPT'') = 2 \cdot \angle(gh)$$

□

Satz 2. Sind zwei Geraden g und h parallel zueinander, so ist das Kompositum $Sp_g \circ Sp_h$ eine Verschiebung um einen Vektor, der die Länge $2 \cdot |gh|$ hat und senkrecht zu g und zu h verläuft.

Beweis. $\forall P \in \mathbb{E}$ gilt: $Sp_g(P) = P'$, wobei $|Pg| = |gP'|$ ist und $PP' \perp g$ ist.

Weiter gilt: $Sp_h(P') = P''$ wobei $|P'h| = |hP''|$ ist und $P'P'' \perp h$ ist.

$$\Rightarrow |PP''| = 2 \cdot |gh| \text{ und } PP'' \perp g, h.$$

$$\Rightarrow Sp_g \circ Sp_h = V_{\{\vec{a} \mid |\vec{a}|=2 \cdot |gh| \text{ und } \vec{a} \perp g, h\}}$$

□

(Beispiele finden sich auf der Homepage)