Musterlösung 3

Aufgabe 1:

Definition: Eine Abbildung $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ ist eine Isometrie, wenn $|f(A)f(B)| = |AB|$ ist.
Es gibt drei verschiedene Abbildungstypen, die diese Bedingungen erfüllen: Drehungen, Verschiebungen und Spieglungen.
Satz: Es sei $s \neq id$ eine Isometrie, so dass $s \circ s = id$. Dann ist s entweder eine Achsenspiegelung oder eine Drehung um 180 Grad.

Beweis. $\forall \overrightarrow{v}$ gilt: $\overrightarrow{v} \circ \overrightarrow{v} = 2 \cdot \overrightarrow{v} \Rightarrow \overrightarrow{v} \circ \overrightarrow{v} \neq id$.
$\forall Sp_g$ gilt: $Sp_g \circ Sp_g = id$. (vlg. Definition der Spiegelung)
$\forall Dr_{P,\phi}$ gilt: $Dr_{P,\phi} \circ Dr_{P,\phi} = Dr_{P,2\cdot\phi}$. Da $Dr_{P,360^\circ} = id$. gilt: $Dr_{P,\phi} \circ Dr_{P,\phi} = id$, wenn $\phi = 180°$. □

Eine Punktspiegelung ist ein Sonderfall der Drehungen und aufgrunddessen kein eigener Abbildungstyp.

Aufgabe 2:

Die Achse von s ist die Mittelsenkrechte von AB.

Beweis. Es sei m die Mittelsenkrechte von AB. Dann gilt $S(A) = B$, da AB senkrecht zu m ist und $|Am| = |Bm|$. Da AB senkrecht zu m ist und $|Am| = |Bm|$ gilt ebenfalls $s(B) = A$. □

Aufgabe 3:

Es sei m die Mittelsenkrechte von AB. Dann gilt: $m \cap g = \{P \mid |PA| = |PB|\}$

Beweis. $\forall P_i \in m$ gilt: $|P_iA| = |P_iB|$
$\Rightarrow m \cap g = \{P \mid |PA| = |PB|\}$. □

Diese Konstrukiton ist nicht möglich, wenn $m \parallel g$ ist.

Aufgabe 4:

Es sei $i \parallel g_1$ und $|ig_1| = |ig_2|$. Es sei $Y_1 = g_1 \cap h$ und $Y_2 = g_1 \cap h$. Es sei $Sp_i(Y_1) = Y_1'$. Weiter sei G eine Gleitspiegelung mit der Geraden i und dem Vektor $\overrightarrow{Y_1'Y_2}$.
$G(A_1) = A_1'$. Weiter sei m die Mittelsenkrechten von $A_1'A_2$. $m \cap g_2 = S$ Wenn die Gerade h' durch den Punkt S geht, gilt: $|X_1A_1| = |X_2A_2|$.

Beweis. Da m die Mittelsenkrechte von $A_1'A_2$ ist, gilt: $|mA_1'| = |mA_2|$, also auch $|SA_1'| = |SA_2|$. Es sei $Sp_i(A_1) = T$. Dann gilt: $|TX_1'| = |A_2X_2|$, da $|TA_1'| = |X_1'X_2|$. Da $Sp_i(A_1) = T$ und $Sp_i(X_1) = X_1'$ folgt: $|X_1A_1| = |TX_1'| = |X_2A_2|$. $\Rightarrow |X_1A_1| = |X_2A_2|$. □

Diese Konstruktion ist nicht möglich, wenn $m \parallel g_2$ ist.