Musterlösung 8

Aufgabe 1:

Konstruktion:
1) Winkelhalbierende von BC und BA
2) Winkelhalbierende von AC und CB
3) Der Schnittpunkt dieser Winkelhalbierenden ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises.
4) Senkrechte zu AB durch den Mittelpunkt. Der Schnittpunkt dieser Senkrechten mit AB sei R.
5) $|RM|$ ist der Radius des gesuchten Kreises.

Aufgabe 2:

Konstruktion:
1) Kreis K_2 um A mit dem Radius $|AH|$. Die Schnittpunkt von K_1 und K_2 seien S und T.
2) Mittelsenkrechten von SH und TH. Die Schnittpunkte dieser Mittelsenkrechten mit dem Kreis K_1 sind die gesuchten Punkte B und C.

Aufgabe 3:

i) Sei h die Höhe auf der Seite c, e die Strecke vom Punkt A bis zum Fusspunkt von h und f die Strecke von B bis zum Fusspunkt von h.
Dann gilt: $\cos\alpha = \frac{e}{b}$, $\cos\beta = \frac{f}{a}$.
$\Rightarrow e = \cos\alpha b$ und $f = \cos\beta b$.
$\Rightarrow e + f = c = b\cos\alpha = a\cos\beta$.

ii) Sinussatz: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$, wobei r der Radius des Umkreises ist.
$\Rightarrow a = \sin\alpha 2r, b = \sin\beta 2r, c = \sin\gamma 2r$.
$\Rightarrow sin\beta 2r\cos\alpha + \sin\alpha 2r\cos\beta = \sin\gamma 2r| : 2r$
$\Rightarrow sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta = \sin\gamma$

Aufgabe 4:

(1) Kosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$
(2) Additionstheorem: $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
i) $a^2(1 - \cos\gamma)^2 + a^2\sin^2\gamma = c^2$

$$a^2 - 2a^2\cos\gamma + \underbrace{a^2\sin\gamma^2 + a^2\cos^2\gamma}_{=1}$$

Da in der Aufgabe a=b gegeben ist, folgt nach (1): $2a^2 - 2a^2\cos\gamma = c^2$

ii) nach (2) folgt: $\cos(\gamma) = \cos\gamma : 2 + \gamma : 2) = \cos(\gamma : 2)\cos(\gamma : 2) - \sin(\gamma : 2)\sin(\gamma : 2)$
$\Rightarrow= \cos^2(\gamma : 2) - \sin^2(\gamma : 2)$
Da $1 - \cos^2(\gamma) = \sin^2(\gamma)$, folgt: $\cos^2(\gamma : 2) - 1 - \cos^2(\gamma : 2)) = 2\cos^2(\gamma : 2 - 1$
Und da $1 - \sin^2(\gamma) = \cos^2(\gamma)$, folgt: $1 - \sin^2(\gamma : 2) - \sin^2(\gamma : 2) = 1 - 2\sin^2(\gamma : 2)$