Kongruenzsätze

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in
- drei Seiten (SSS),
- zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Innenwinkel (SWS),
- einer Seite und den beiden anliegenden Innenwinkel (WSW),
- zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Innenwinkel (SSW)

<u>Satz:</u>
Es seien ABC und A'B'C' zwei Dreiecke, sd.

$$|AB| = |A'B'|,$$
$$|BC| = |B'C'|$$

und

$$|CA| = |C'A'|.$$

Dann existiert genau eine Isometrie τ, sd.

$$\tau(A) = A'$$
$$\tau(B) = B'$$
$$\tau(C) = C'.$$

<u>Beweis:</u>
AB und A'B' seien zwei Strecken mit den Orientierungen C und C',
τ sei eine Isometrie, die die orientierte Strecke AB auf die orientierte Strecke A'B' abbildet.
Da τ eine Isometrie ist, gilt:

$$|A'C'| = |AC| = |\tau(A)\tau(C)| = b$$
$$|B'C'| = |BC| = |\tau(B)\tau(C)| = c$$

Ziehe zwei Kreise um A' und B' mit den Radien b und c. (KA' und KB')

$$C' = \tau(C) = KA' \text{ schneidet } KB'$$

KA' und KB' haben höchstens einen Schnittpunkt über der Geraden A'B'.

Spiegelung Sp um A'B'(KA') = KA'
Spiegelung Sp um A'B'(KB') = KB'

Also ist $\tau(C) = C'$ der einzige Schnittpunkt von KA' und KB' oberhalb A'B'.

<u>Korrolar:</u>
Es gilt auch:

$$\angle CAB = \angle C'A'B'$$
$$\angle ABC = \angle A'B'C'$$
$$\angle BCA = \angle B'C'A'$$

Wenn zwei Dreiecke kongruent sind, sind nicht nur ihre Strecken gleich lang, sondern auch ihre Winkel gleich groß, weil eine Isometrie auch die Winkel erhält, da sie ein Kompositum von **Bewegungen und Spiegelungen** ist! (Und diese erhalten die Winkel)

Satz:
AB und CD seien orientierte Strecken der gleichen Länge. Dann gibt es genau eine Isomterie σ die AB auf CD abbildet.

Beweis:
Finde eine Bewegung f(A) = C und f(B)=D
Sind die Orientierungen verschieden, dann erfolgt noch Spiegelung Sg an der Achse CD.

$\Phi 1$ und $\Phi 2$ seine zwei solche Isometrien.
$\Phi 1^{-1} \circ \Phi 2 = id$
$\Rightarrow \Phi 2 = \Phi 1$

Q.E.D.

Ähnlichkeitssätze

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen in:
- Drei Seitenverhältnissen,
- zwei gleichgroßen Innenwinkeln,
- im Verhältnis zweier Seiten und in dem von diesen Seiten gebildeten Innenwinkel,
- im Verhältnis zweier Seiten und dem der größeren dieser Seiten gegenüberliegenden Innenwinkel.