<u>Der Satz des Thales</u>

<u>Aussage:</u> Der Satz des Thales besagt, dass Dreiecke, deren längste Seite der Durchmesser eines beliebigen Kreises ist, genau dann rechtwinklig sind, wenn der dritte Punkt auf dem Bogen des Kreises liegt (siehe Abbildung).

<u>Beweis:</u> Zum Beweis werden zwei ebenfalls von Thales bewiesene Sätze benötigt:
a) Die beiden Winkel an der Grundseite eines gleichschenkligen Dreiecks sind gleich groß und b) die Winkelsumme im Dreieck ist 180°.

Man denke sich vom Mittelpunkt des Kreises M, nach der Konstruktion der Mittelpunkt der längsten Seite des Dreiecks, eine weitere Strecke zu dem Punkt C auf dem Kreisbogen. Dabei entstehen zwei Teildreiecke AMC und MBC.
Die Strecken AM, BM und CM sind Radien des Kreises und haben daher alle die gleiche Länge, d.h.

$$AM = BM = CM.$$

Die Teildreiecke AMC und MBC haben jeweils zwei dieser Radien als Seiten (AM und CM bzw. CM und BM) und daraus folgt, dass beide Dreiecke gleichschenklig sein müssen.
Per Definition gilt, dass gleichschenklige Dreiecke zwischen den gleichen Schenkeln und der dritten Strecke je zwei gleiche Winkel haben müssen.
In der Abbildung gilt also

$$\alpha = \mu \text{ und } \delta = \varepsilon. \ (1)$$

In jedem Dreieck gilt der Satz, dass die Summe der Innenwinkel 180° beträgt, also gilt es auch für unser Dreieck ABC. Daraus folgt, dass

$$\alpha + \delta + \varepsilon + \mu = 180° \ (2)$$

Folglich gilt nach (1) und (2)

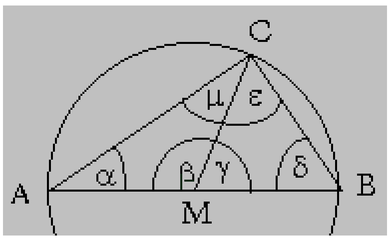
$$\mu + \varepsilon + \varepsilon + \mu = 180°$$

Das entspricht: $2\mu + 2\varepsilon = 180°$

Teilt man nun beider Seiten durch zwei ergibt sich, dass

$$\mu + \varepsilon = 90°$$

Und damit ist bewiesen, dass der Innenwinkel des Dreiecks ABC beim Punkt C genau 90° beträgt.



Der Satz des Pythagoras

Satz: Der Satz des Pythagoras besagt, dass in allen ebenen rechtwinkligen Dreiecken die Summe der Flächeninhalte der Kathetenquadrate gleich dem Flächeninhalt des Hypotenusenquadrates ist. Als Gleichung ausgedrückt lautet er

$$a^2 + b^2 = c^2$$

wobei a und b für die Längen der am rechten Winkel anliegenden Seiten (Katheten) stehen und c für die Länge der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite (Hypotenuse).

Beweis: Geometrischer Beweis durch Ergänzung (einer von rund 300 Beweise)

In ein Quadrat mit der Seitenlänge a + b werden vier kongruente, rechtwinklige Dreiecke mit den Seiten a, b und c eingelegt. Dies kann auf zwei Arten geschehen, wie in den Abbildungen dargestellt ist:

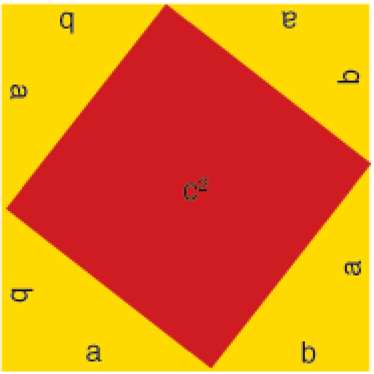


Abbildung 1

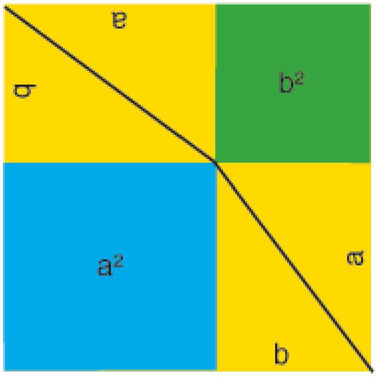


Abbildung 2

Für eine algebraische Lösung betrachten wir *Abbildung 1*. Das große Quadrat hat die Seitenlänge a+b, und somit die Fläche $(a + b)^2$. Zieht man von dieser Fläche die 4 Dreiecke ab, die jeweils eine Fläche von ab/2 (also insgesamt 2ab) haben, so bleibt die Fläche c^2 übrig. Es ist also

$$(a + b)^2 - 2ab = c^2.$$

Daraus folgt also: $$(a + b)^2 = 2ab + c^2$$

Auflösung der Klammer mit der Binomischen Formel liefert:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2.$$

Zieht man nun auf beiden Seiten 2ab ab, bleibt der Satz des Pythagoras übrig.

Zur *Abbildung 2*: Die Flächen des linken und des rechten Quadrates sind gleich (Seitenlänge $a + b$). Das linke besteht aus den vier rechtwinkligen Dreiecken und einem Quadrat mit Seitenlänge c, das rechte aus den gleichen Dreiecken sowie einem Quadrat mit Seitenlänge a und einem mit Seitenlänge b. Die Fläche c^2 entspricht also der Summe der Fläche a^2 und der Fläche b^2, also $a^2 + b^2 = c^2$. Dies ist der Satz des Pythagoras.

Quellen:

Schule 2003, Serges Medien Verlag
http://de.wikipedia.org/wiki/Satz_des_Thales
http://de.wikipedia.org/wiki/Satz_des_Pythagoras
http://www.satzdespythagoras.de/satz.html
http://did.mat.uni-bayreuth.de/geonet/beispiele/thalessatz.html