Name: Gonca Günaydin
Semester: 2
Veranstaltung: Tutorium für die elementare Geometrie
Tutor: Viktor Fast
Ausarbeitung: Satz des Thales und Satz des Pythagoras

Satz des Thales

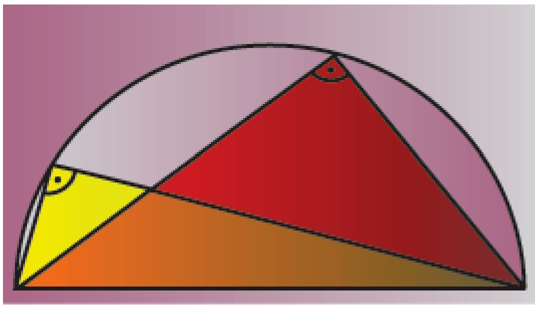
Die kürzeste Formulierung lautet:

Alle Winkel am Halbkreisbogen sind rechte Winkel.

Die exakte Formulierung: Konstruiert man ein Dreieck aus den beiden Endpunkten des Durchmessers eines Halbkreises (dem **Thaleskreis**) und einem weiteren Punkt dieses Kreises, erhält man immer ein rechtwinkliges Dreieck.

Umgekehrt liegt der Mittelpunkt des Umkreises eines rechtwinkligen Dreiecks immer in der Mitte der Hypotenuse, also jener (längsten) Seite des Dreiecks, die dem rechten Winkel gegenüber liegt.

Halbkreis mit Dreiecken und rechten Winkeln

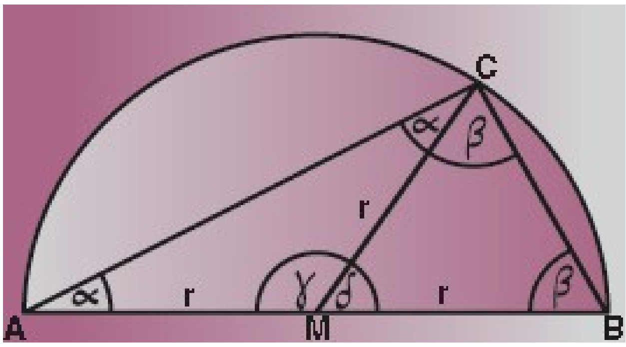


Wie ist der Beweis?

Beweis:

Zum Beweis werden zwei ebenfalls von Thales bewiesene Sätze benötigt:

1. Die beiden Winkel an der Grundseite *(Basiswinkel)* eines gleichschenkligen Dreiecks sind gleich groß.
2. Die Winkelsumme im Dreieck ist 180°.



Halbkreis mit Dreieck und Mittelpunkt M

ABC sei ein Dreieck innerhalb eines Kreises mit [AB] als Kreisdurchmesser und dem Radius *r*. Dann ist der Mittelpunkt M der Strecke AB auch der Kreismittelpunkt. Die Streckenlängen AM, BM und CM sind also gleich dem Radius *r*.

Die Strecke CM teilt das Dreieck ABC in zwei Dreiecke ACM und BCM auf, die gleichschenklig sind. Die Basiswinkel dieser Dreiecke, also die Winkel an der Grundseite AC bzw. BC, sind daher jeweils gleich (α und β in der Abbildung).

Die Winkelsumme im Dreieck ABC beträgt 180°:

$$\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180^\circ$$

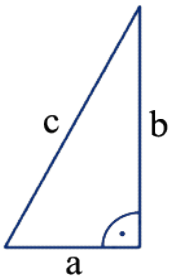
$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

Dividiert man diese Gleichung durch 2, so ergibt sich

$$\alpha + \beta = 90^\circ.$$

Damit ist gezeigt, dass der Winkel α + β im Punkt C ein rechter Winkel ist.

Satz des Pythagoras



Er besagt, dass in allen ebenen rechtwinkligen Dreiecken die Summe der Flächeninhalte der Kathetenquadrate gleich dem Flächeninhalt des Hypotenusenquadrates ist. Als Gleichung ausgedrückt lautet er : $a^2 + b^2 = c^2$,

wobei *a* und *b* wie im Bild rechts für die Längen der am rechten Winkel anliegenden Seiten, der Katheten, stehen und *c* die Länge der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite, der Hypotenuse, darstellt.

Sind a, b, c die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks mit c als Hypotenuse, so gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

In Worten: Die Summe der Quadrate über den Katheten ist gleich dem Quadrat über der Hypotenuse.

Die Umkehrung gilt ebenso:

Gilt die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ in einem Dreieck, so ist dieses Dreieck rechtwinklig, wobei der rechte Winkel der Seite c gegenüber liegt.

Allgemeiner Satz des Pythagoras

Der Satz des Pythagoras gilt nicht nur für Quadrate, sondern es ist für die Flächengleichheit hinreichend, wenn die Figuren über den Katheten und der Hypotenuse zueinander ähnlich sind, d. h. wenn sich ihre Flächen wie $a^2 : b^2 : c^2$ zueinander verhalten.

Anwendung

Aus dem Satz des Pythagoras folgt: Die Länge der Hypotenuse ist gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Kathetenquadrate, es gilt also:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Die einfachste und wichtigste Anwendung des Satzes ist, aus zwei bekannten Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks die Dritte zu berechnen. Dies ist durch Umformung der Gleichung für alle Seiten möglich:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Die Umkehrung des Satzes kann dazu verwendet werden, um zu überprüfen, ob ein gegebenes Dreieck rechtwinklig ist. Dazu wird schlicht getestet, ob die Gleichung des Satzes für die Seiten bei dem gegebenen Dreieck zutrifft. Es reicht also allein die Kenntnis der Seitenlängen eines gegebenen Dreiecks, um daraus zu schließen, ob es rechtwinklig ist.