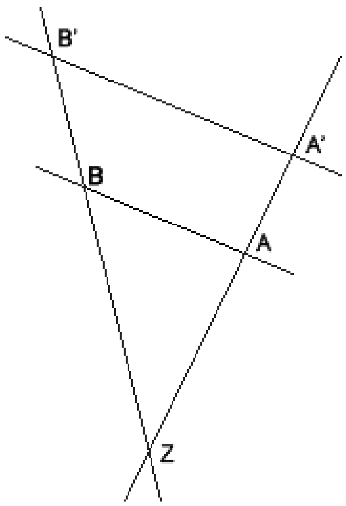
Name: Yonca Günaydin
Semester: 2
Veranstaltung: Tutorium für die elementare Geometrie
Tutor: Viktor Fast
Ausarbeitung: Strahlensätze

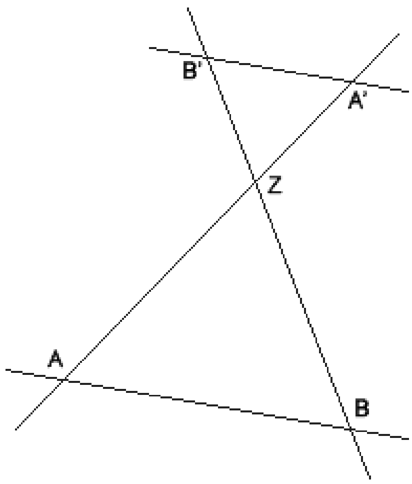
FORMULIERUNG DER STRAHLENSÄTZE

Wenn zwei durch einen Punkt (*Scheitel*) verlaufende Geraden (*Strahlen*) von zwei parallelen Geraden geschnitten werden, die nicht durch den Scheitel gehen, dann gelten die folgenden Aussagen:

1. Je zwei Abschnitte auf dem einen Strahl verhalten sich wie die entsprechenden Abschnitte auf dem anderen Strahl.
2. Die ausgeschnittenen Strecken auf den Parallelen verhalten sich wie die vom Scheitel aus gemessenen Strecken auf den Strahlen.
3. Je zwei Abschnitte auf den Parallelen, die einander entsprechen, stehen in gleichem Verhältnis zueinander. Dieser Strahlensatz setzt im Gegensatz zu den ersten beiden Strahlensätzen mindestens drei Strahlen voraus. Er ist hier nicht skizziert.

Der erste Strahlensatz bezieht sich also auf die Verhältnisse von Strahlenabschnitten, der zweite auf die Verhältnisse von Strahlen- und Parallelenabschnitten und der dritte auf die Verhältnisse von Parallelenabschnitten.



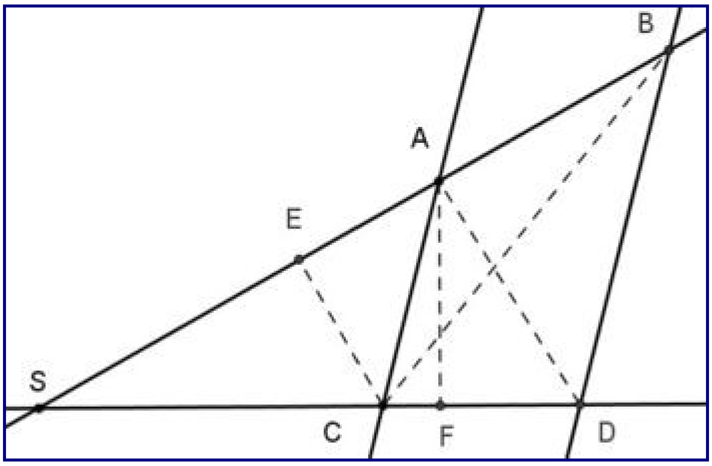


$$\overline{ZA'} : \overline{ZA} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$$
$$\overline{ZA} : \overline{AA'} = \overline{ZB} : \overline{BB'}$$
$$\overline{ZA'} : \overline{AA'} = \overline{ZB'} : \overline{BB'}$$

$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZA'} : \overline{ZA}$$
$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$$

Beweis

Satz 1



Durch gleichlange Höhen ($CA \parallel BD$)gilt $|\triangle CDA| = |\triangle CBA|$ und damit auch $|\triangle SCB| = |\triangle SDA|$. Somit gilt dann aber auch:

$$\frac{|\triangle SCA|}{|\triangle CDA|} = \frac{|\triangle SCA|}{|\triangle CBA|} \text{ und } \frac{|\triangle SCA|}{|\triangle SDA|} = \frac{|\triangle SCA|}{|\triangle SCB|}$$

Das Anwenden der Standardformel zur Flächenberechnung von Dreiecken $\frac{g \cdot h}{2}$ liefert dann

$$\frac{|SC||AF|}{|CD||AF|} = \frac{|SA||EC|}{|AB||EC|} \text{ und : } \frac{|SC||AF|}{|SD||AF|} = \frac{|SA||EC|}{|SB||EC|}$$

Jetzt kürzt man die gemeinsamen Faktoren: (a) $\frac{|SC|}{|CD|} = \frac{|SA|}{|AB|}$ and (b) $\frac{|SC|}{|SD|} = \frac{|SA|}{|SB|}$.

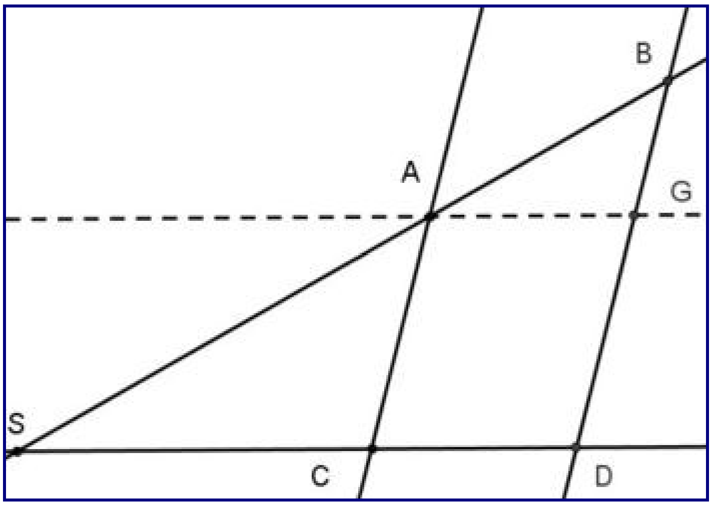
Jetzt verwendet man (b) um | *SA* | und | *SC* | in (a) zu ersetzen:

$$\frac{\frac{|SA||SD|}{|SB|}}{|CD|} = \frac{\frac{|SB||SC|}{|SD|}}{|AB|}$$

Unter erneuter Verwendung von (b) vereinfacht sich dies dann schließlich zu: (c)

$$\frac{|SD|}{|CD|} = \frac{|SB|}{|AB|}$$

Satz 2

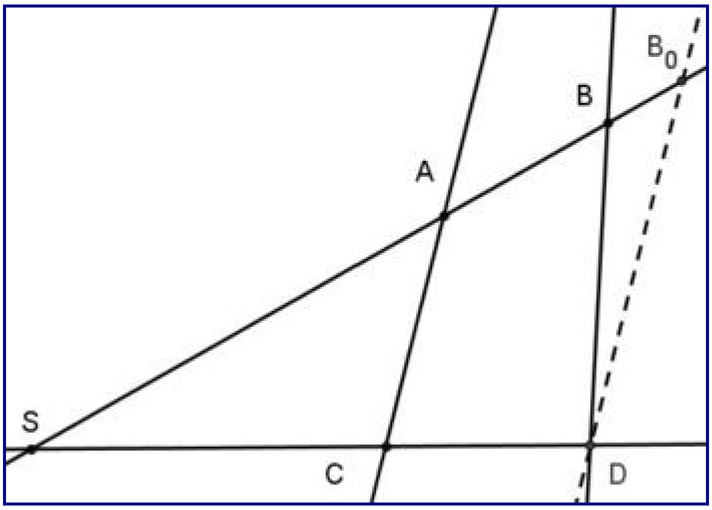


Konstruiere eine zusätzliche Parallele zu *SD* durch A. Diese Parallele schneidet *BD* in G. Somit gilt nach Konstruktion | *AC* | = | *DG* | und wegen Satz 1 gilt weiterhin :

$\frac{|SA|}{|SB|} = \frac{|DG|}{|BD|}$ und daher auch

$$\frac{|SA|}{|SB|} = \frac{|AC|}{|BD|}$$

Umkehrung von Satz 1



Angenommen *AC* und *BD* wären nicht parallel. Dann schneidet die Parallel zu *AC* durch *D* *SA* in $B_0 \neq B$ (*). Da nach Voraussetzung | *SB* | : | *SA* | = | *SD* | : | *SC* | gilt, ergibt sich

$$|SB| = \frac{|SD||SA|}{|SC|}$$

andererseit gilt nach dem 2-ten Strahlensatz auch

$$|SB_0| = \frac{|SD||SA|}{|SC|}.$$

Dies bedeutet, dass B and B_0 beide auf dem Strahl SA liegen und den gleichen Abstand von S haben, damit sind die beiden Punkte jedoch identisch, also $B = B_0$. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass es sich um 2 verschiedene Punkte handelt (Bedingung (*)). Also führt die Annahme der Nichtparallelität zu einem Widerspruch und kann daher nicht richtig sein oder anders ausgedruckt es muss $CA \parallel BD$ gelten.

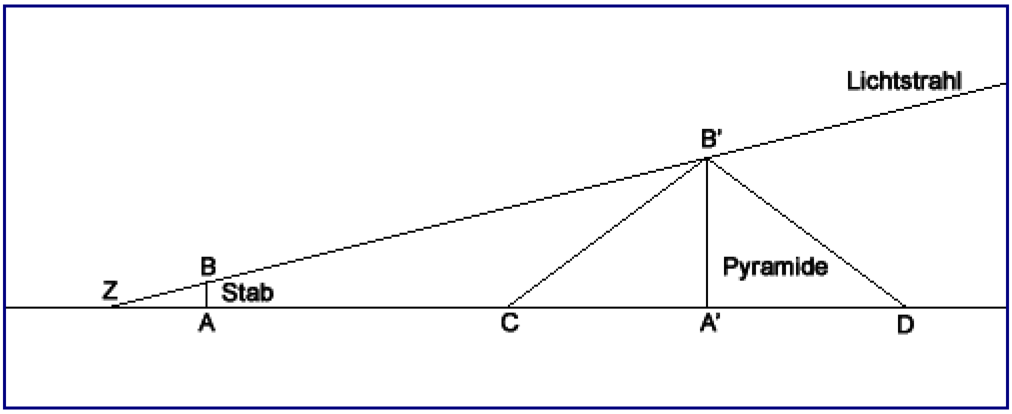
Satz 3

Kann durch mehrfache Anwendung von Satz 1 hergeleitet werden. Die beiden Skizzen berücksichtigen, dass der Kreuzungspunkt Z außerhalb oder innerhalb der beiden parallelen Geraden liegen kann. Im ersten Fall spricht man gelegentlich von einer "V-Figur" (linke Skizze), im zweiten von einer "X-Figur" (rechte Skizze).

Bemerkung (Umkehrung des Strahlensatzes): Ist Eigenschaft 1 erfüllt, so kann man auf parallele Geraden schließen. Ist dagegen Eigenschaft 2 gegeben, so ist ein entsprechender Schluss auf Parallelität nicht möglich.

ANWENDUNG

Ein einfaches Beispiel für die Anwendung des Strahlensatzes soll auf den antiken griechischen Philosophen und Mathematiker Thales von Milet zurückgehen. Dieser soll mit Hilfe eines Stabes durch Messung der Schattenlänge die Höhe der ägyptischen Cheopspyramide ermittelt haben.



Diese Berechnung könnte - abgesehen von der Längeneinheit und der Schreibweise - etwa folgendermaßen ausgesehen haben:

Höhe des Stabes: $\overline{AB} = 1{,}63\,\mathrm{m}$

Schattenlänge des Stabes: $\overline{ZA} = 2{,}00\,\mathrm{m}$

Abstand des Stabes von der Pyramide: $\overline{AC} = 63\,\mathrm{m}$

Seitenlänge der Pyramide: $\overline{CD} = 230\,\mathrm{m}$

$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZA'} : \overline{ZA}$$

$$\overline{A'B'} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{ZA'}}{\overline{ZA}} = \frac{1{,}63\,\mathrm{m} \cdot (2{,}00\,\mathrm{m} + 63\,\mathrm{m} + 230\,\mathrm{m} : 2)}{2{,}00\,\mathrm{m}} = \frac{1{,}63\,\mathrm{m} \cdot 180\,\mathrm{m}}{2{,}00\,\mathrm{m}} = \underline{146{,}7\,\mathrm{m}}$$