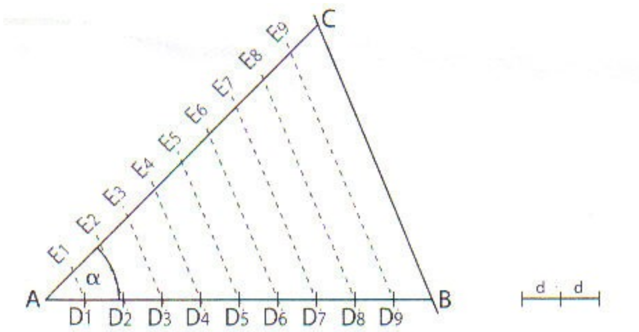
Strahlensätze

Der Strahlensatz handelt, wie der Name schon sagt, von Strahlen. Zur Erklärung werden jedoch Strecken benutzt, wegen der Übersichtlichkeit.

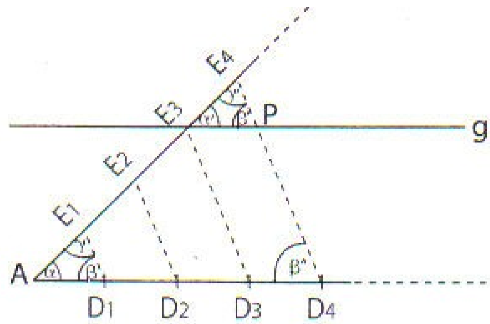
Es seien zwei verschiedene lange Strecken mit den Punkten (AB) und (AC) gegeben, die einen gemeinsamen Anfangspunkt haben. Der Winkel zwischen den Strecken sei α .

(Bild)

Die Strecke (AB) soll gleichmäßig unterteilt werden. Sie kann beispielsweise in 10 gleiche Teile geteilt werden, die alle die Länge d haben. Dadurch ergeben sich die Punkte D_1 bis D_9. Jetzt werden die Punkte B und C durch eine Gerade verbunden und zu dieser je eine parallele Gerade durch die Punkte D_1 bis D_9 konstruiert. Dadurch ergeben sich die Schnittpunkte E_1 bis E_9 auf der Strecke (AC).



Die Punkte D_1 bis D_9 auf der Strecke (AB) haben alle denselben Abstand d zueinander. Dann müssen die Teilstücke auf der Strecke (AC) auch alle die gleiche Entfernung zueinander haben. Man kann diese Beziehung durch eine einfache geometrische Betrachtung erklären. Sollen beispielsweise die Strecke AE_1 und E_3E_4 miteinander verglichen werden, so kann eine Hilfsparallele g zur Strecke (AB) durch den Punkt (E_3) konstruiert werden.



Die Gerade g schneidet die Strecke (E_4D_4) in den Punkt P. Dadurch entsteht ein Dreieck (E_3PE_4), das verglichen werden soll mit dem Dreieck (AD_1E_1). Da die Gerade g parallel zu AB verläuft, ist der Winkel α' in dem Dreieck (E_4E_3P) ein Stufenwinkel zu α . α und α' sind damit gleich groß. Ein anderes Paar Stufenwinkel sind die Winkel β und β' . Der Winkel β' ist wiederum ein Stufenwinkel zu dem Winkel β . Daraus folgt, dass in den Dreiecken (AD_1E_1) und (E_3PE_4) auch die Winkel γ und γ' übereinstimmen. Außerdem haben die zwei Dreiecke noch eine Seite mit derselben Länge. Die Seite AD_1 hat die Länge d, da die Seite c in Teilstücke mit der Länge d aufgeteilt worden ist. Damit hat auch die Strecke (D_3D_4) die Länge d. Aufgrund der Konstruktion ist das Rechteck ($D_3D_4PE_3$) aber ein Parallelogramm.

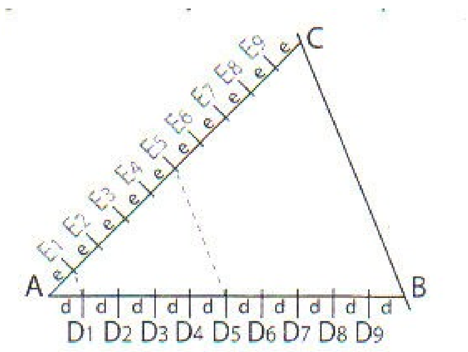
Also hat auch die Seite (E_3P) die Länge d. Insgesamt stimmen bei diesen beiden Dreiecken zwei Winkel und die Seite zwischen diesen Winkel überein, die Kongruenzbedingung WSW ist damit erfüllt und bei diesen Dreieck sind auch die anderen Winkel und Seitenlängen identisch. Insbesondere ist die Seite (E_3E_4) ebenso lang wie die Strecke (AE_1). Diese Überlegung kann für jedes Dreieck angestellt werden, das durch eine Parallele zu (AB) entsteht.

Durch die Unterteilung der Strecke (AB) in gleich lange Stücke der Länge d wird auch die Seite (AC) in gleich lange Stücke aufgeteilt. Die Länge dieser Strecken wird mit e bezeichnet. Also hat die Strecke (AE_1) die Länge e und die Strecke (AD_1) die Länge d. Im nächsten Schritt betrachte man den Bruch der Längen von je zwei zueinander gehörenden Streckenabschnitten, also beispielsweise die Strecken (AD_1) und (AE_1). Die Längen der Strecken sind gegeben durch die Längen d und e. Die Srtecke (AE_1) verhält sich zu Strecke (AD_1) wie e zu d. Eine solche Gleichung wird auch Verhältnisgleichung oder Proportion genannt.

$$|AE_1| \div |AD_1| = e \div d$$

Zwei zueinander gehörende Punkte sind D_5 und E_5.

$$|AE_5| \div |AD_5| = (5 \cdot |AE_1|) \div (5 \cdot |AD_1|) = (5 \cdot e) \div (5 \cdot d) = e \div d$$



Also haben beide Streckenpaare dasselbe Verhältnis zueinander und die beiden Gleichungen können zusammengefasst werden.

$$|AE_1| \div |AD_1| = e \div d \;=\; |AE_5| \div |AD_5|$$

$$\Rightarrow |AE_1| \div |AD_1| = |AE_5| \div |AD_5|$$

Das kann umgestellt werden:

$$|AD_1| \div |AD_5| = |AE_1| \div |AE_5|$$

Diese Gleichung gibt das Verhältnis der zwei Geraden an, die durch die Punkte (D_1E_1) und (D_5E_5) gegeben sind. Ein anderes Verhältnis kann auch aufgestellt werden, da die Strecke (AB) in zehn gleich große Stücke geteilt wurde.

$$|AD_1| \div |D_1 D_5| = (1 \cdot d) \div (4 \cdot d) = 1 \cdot 4$$

Für die entsprechenden Abschnitte auf der Strecke AC gilt:

$|AE_1| \div |E_1 E_5| = (1 \cdot e) \div (4 \cdot d) = 1 \cdot 4$

Auch das kann zusammengefasst werden zu:

$|AD_1| \div |D_1 D_5| = \ |AE_1| \div |E_1 E_5|$

Nimmt man die zwei Gleichungen

$|AD_1| \div |AD_5| = |AE_1| \div |AE_5|$

$|AD_1| \div |D_1 D_5| = \ |AE_1| \div |E_1 E_5|$

so können diese kombiniert werden, indem die erste umgestellt wird:

$|AD_1| = |AE_1| \div |AE_5| \cdot |AD_5|$

und in die zweite für $|AD_1|$ eingesetzt wird.

$\Rightarrow |AE_1| \div |AE_5| \cdot |AD_5| \div |D_1 D_5| = |AE_1| \div |E_1 E_5|$

Auch die wird umgestellt und man erhält eine dritte Gleichung:

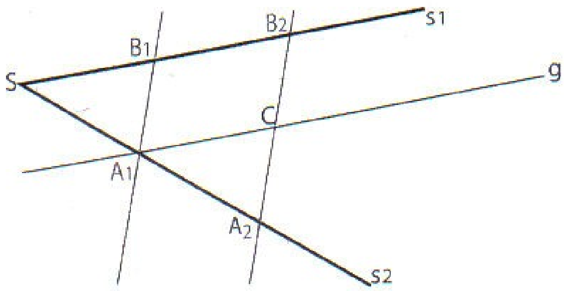
$|AD_5| \div |D_1 D_5| = |AE_5| \div |E_1 E_5|$

1. Strahlensatz

Zwei nicht parallele Strahlen s_1 und s_2 haben den gemeinsamen Startpunkt S. Werden diese Strahlen von zwei zueinander parallelen Geraden geschnitten, so verhalten sich die Längen der Abschnitte auf dem einen Strahl wie die zugehörigen Längen der Abschnitte auf dem anderen Strahl.

Es gelten die Verhältnisse:

$|SA_1| \div |SA_2| = |SB_1| \div |SB_2|$
$|SA_1| \div |A_1 A_2| = |SB_1| \div |B_1 B_2|$
$|SA_2| \div |A_1 A_2| = |SB_2| \div |B_1 B_2|$



Jetzt soll das Verhältnis der Seite (A_1B_1) zu (A_2B_2) betrachtet werden. Zu diesem Zwecke wird eine Parallele g zu dem Strahl s_1 durch den Punkt A_1 gezeichnet. Diese schneidet die Strecke (A_2B_2) in dem Punkt C. Der Trick besteht nun darin, den bereits bestehenden ersten Strahlensatz zu benutzen, um den zweiten herzuleiten. Betrachtet man die Skizze so, als sei der Punkt A_2 der Ausgangspunkt der zwei Strahlen S_2 und dem Strahl, der durch (A_2B_2) geht, so folgt sofort die Verhältnisgleichung:

$|A_2 B_2| \div |CB_2| = |A_2 S| \div |A_1 S|$

Das Viereck ($A_1CB_2B_1$) ist ein Parallelogramm und damit hat (CB_2) dieselbe Länge wie (A_1B_1). Also steht da:

$$|A_2 B_2| \div |A_1 B_1| = |A_2 S| \div |A_1 S|$$

2. Strahlensatz

Zwei nicht parallele Strahlen s_1 und s_2 haben den gemeinsamen Startpunkt S. Werden diese Strahlen von zwei zueinander parallelen Geraden geschnitten, so verhalten sich die Längen der Abschnitte auf dem einen Strahl wie die zugehörigen Längen der Abschnitte auf den Parallelen.

Es gelten die Verhältnisse:

$$|A_1 B_1| \div |A_2 B_2| = |SA_1| \div |SA_2|$$
$$|A_1 B_1| \div |A_2 B_2| = |SB_1| \div |SB_2|$$

(Bild)