ICM 1998, Berlin, Aug. 18–27

Abstracts of Short Communications and Posters

Section:

9. Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems

1991 MS Classification: 34
Alves, Manuel Joaquim, Perm State University, Russia

К вопросу о разрешимости двухточечной краевой задачи для сингулярного функционально-дифференциального уравнения

Рассмотрим задачу

$$\pi(t)\ddot{x}(t) = f(t, (\theta x)(t)), \qquad x(0) = \alpha_1, \quad x(1) = \alpha_2, \quad t \in [0,1], \tag{1}$$

где $\pi(t) = t$, или $\pi(t) = 1 - t$, или $\pi(t) = t(1-t)$, $\theta : \mathbf{C} \to \mathbf{L_p}$, $1 < p \le \infty$ — линейный изотонный оператор.

Обозначим через J_π промежуток $(0,1)$, если $\pi(t) = t(1-t)$, $(0,1]$, если $\pi(t) = t$ и $[0,1)$, если $\pi(t) = 1 - t$.

Через $\mathbf{D}_\pi^\mathbf{p}$ $(1 \le p \le \infty)$ обозначим пространство функций $x : [0,1] \to \mathbf{R}^1$, обладающих свойством:

а) x непрерывна на $[0,1]$,

б) $\dot{x}$ непрерывна в J_π,

в) произведение $\pi\ddot{x}$ принадлежит пространству $\mathbf{L_p}$.

Пространство $\mathbf{D}_\pi^\mathbf{p}$ банахово относительно нормы

$$\|x\|_{\mathbf{D}_\pi^\mathbf{p}} = \|\pi\ddot{x}\|_{\mathbf{L_p}} + |x(\tau)| + |\dot{x}(\tau)|.$$

Пусть $\bar{v} \equiv \theta v$, $\bar{z} \equiv \theta z$, $[\bar{v}, \bar{z}]_{\mathbf{L_p}}$ –порядковый интервал в пространстве $\mathbf{L_p}$. Будем говорить, что функция $f(\cdot,\cdot)$ удовлетворяет одному из условий $\mathcal{L}^i[\bar{v}, \bar{z}]$, если возможно разложение

$$f(t, u(t)) = q_i(t)u(t) + M_i(t, u(t)), \qquad u \in [\bar{v}, \bar{z}],$$

где $q_i(\cdot) \in \mathbf{L}_\infty$, $i = 1, 2$, оператор Немыцкого $\mathcal{M}_i : [\bar{v}, \bar{z}]_{\mathbf{L_p}} \to \mathbf{L_p}$, определенный равенством $(\mathcal{M}_i u)(t) \equiv M_i(t, u(t))$, непрерывен, причем оператор $\mathcal{M}_i$ при $i = 1$ изотонен, а при $i = 2$ — антитонен.

Рассмотрим уравнение

$$(\Im x)(t) \stackrel{def}{=} \pi(t)\ddot{x}(t) - q(t)(\theta x)(t) = f(t), \qquad t \in [0,1]$$

при $q \in \mathbf{L}_\infty$. Следуя [1], будем говорить, что это уравнение обладает свойством $\mathbf{A}$, если краевая задача $\Im x = f$, $x(\tau) = \dot{x}(\tau) = 0$ имеет при каждом $\tau \in J_\pi$ единственное решение для любой функции $f \in \mathbf{L_p}$, и оператор Грина G этой задачи изотонен.

Теорема. Пусть существует пара функций $v, z \in \mathbf{D}_\pi^\mathbf{p}$, $v(t) \leq z(t)$, $t \in [0,1]$, удовлетворяющая неравенствам

$$\pi(t)\ddot{z}(t) \leq f(t,(\theta z)(t)), \qquad \pi(t)\ddot{v}(t) \geq f(t,(\theta v)(t)), \qquad t \in [0,1],$$
$$v(0) \leq \alpha_1 \leq z(0), \qquad v(1) \leq \alpha_2 \leq z(1).$$

Предположим, что выполняется условие $\mathcal{L}^2[\bar{v},\bar{z}]$ с коэффициентом $q_2 \in \mathbf{L}_\infty$, и линейное уравнение

$$(\Im_2 x)(t) \stackrel{def}{=} \pi(t)\ddot{x}(t) - q_2(t)(\theta x)(t) = \xi(t), \quad t \in [0,1], \quad x(0) = x(1) = 0$$

обладает свойством **A**.
Тогда задача (1) имеет по крайней мере одно решение $x \in [v,z]_{\mathbf{D}_\pi^\mathbf{p}}$.
Если, кроме того, выполнено условие $\mathcal{L}^1[\bar{v},\bar{z}]$ с коэффициентом $q_1 \in \mathbf{L}_\infty$, причем оператор Грина G_1 вспомогательной задачи

$$(\Im_1 x)(t) \stackrel{def}{=} \pi(t)\ddot{x}(t) - q_1(t)(\theta x)(t) = \phi(t), \quad t \in [0,1], \quad x(0) = x(1) = 0$$

антитонен, то решение задачи (1) единственно.
Литература. 1. Н. В. Азбелев, М. Ж. Алвеш, Е. И. Бравый, К вопросу об условиях монотонности операторов Грина сингулярных задач, *Вестник ПГТУ. Функц. -дифференц. уравнения.* **4** (1997), 15–22.