ICM 1998, Berlin, Aug. 18–27

Abstracts of Plenary and Invited Lectures

Section:

7. Lie Groups and Lie Algebras

1991 MS Classification:
L. Lafforgue, C. N. R. S., Université d'Orsay, France
Chtoucas de Drinfeld et applications

Etant donné X une courbe projective lisse géométriquement connexe sur un corps fini $\mathbb{F}_q$, F son corps des fonctions et $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de F, Drinfeld a défini les chtoucas de rang r sur X dans le but de réaliser dans la cohomologie de leurs schémas classifiants la correspondance de Langlands entre représentations automorphes cuspidales de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ et représentations irréductibles de dimension r du groupe de Galois de F. Ce programme a été entièrement réalisé par lui dans le cas du rang $r = 2$.
Les schémas (ou plutôt les champs au sens de Deligne–Mumford) Cht^r de chtoucas de Drinfeld de rang r sont lisses sur $X \times X$ de dimension relative $2r - 2$ mais ils ne sont pas quasi–compacts ni même leurs composantes connexes. Pour tout sous–schéma fermé fini $I \hookrightarrow X$, il y a au–dessus de Cht^r un champ Cht^r_I représentable fini étale galoisien classifiant les chtoucas avec structures de niveau I. Les Cht^r_I sont munis de correspondances de Hecke associées aux éléments de l'algèbre de convolution de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ et aussi de "morphismes de Frobenius partiels" au–dessus des endomorphismes $\mathrm{Frob} \times \mathrm{Id}$ et $\mathrm{Id} \times \mathrm{Frob}$ de $X \times X$.

Dans le cas $r = 2$, Drinfeld a défini dans un premier temps certains ouverts de type fini dans les Cht^2_I. Ces ouverts ne sont stables ni par les correspondances de Hecke ni par les morphismes de Frobenius partiels mais on peut malgré tout considérer leur cohomologie à supports compacts et l'action sur elle de l'endomorphisme de Frobenius. En combinant le théorème des points fixes de Grothendieck, le théorème de pureté de Deligne et la formule des traces de Selberg, Drinfeld a ainsi pu démontrer la conjecture de Ramanujan–Petersson pour les représentations automorphes cuspidales de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$.
Dans un second temps, Drinfeld a construit des compactifications de ces ouverts de type fini. Ces compactifications retrouvent une action des correspondances de Hecke et des morphismes de Frobenius partiels et elles sont reliées entre elles par des projections birationnelles. La correspondance de Langlands pour GL_2 a alors été établie par Drinfeld en faisant le lien avec la formule des traces de Selberg.

Considérant maintenant un rang r quelconque, la notion de polygone canonique de Harder–Narasimhan nous a permis de définir dans les Cht^r_I des ouverts de type fini qui généralisent ceux de Drinfeld en rang 2. Par combinaison avec une formule des traces d'Arthur–Selberg convenable, nous avons pu démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME. — (i) *Soit* π *une représentation automorphe cuspidale irréductible unitaire de* $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$. *Alors :*

• *Si* r *est impair,* π *vérifie la conjecture de Ramanujan–Petersson (c'est–à–dire que pour toute place* x *de* F *où le facteur* π_x *de* π *est non ramifiée, toutes les valeurs propres de Hecke* $z_i(\pi_x)$, $1 \leq i \leq r$, *sont de module* 1) *et on pose* $\varepsilon_\pi = 0$.

• *Si* r *est pair, ou bien* π *vérifie la conjecture de Ramanujan–Petersson et on pose* $\varepsilon_\pi = 0$, *ou bien pour toute place* x *où* π *est non ramifiée, la moitié parmi les* $z_i(\pi_x)$, $1 \leq i \leq r$, *sont de module* $q^{\frac{1}{4}\deg(x)}$ *et l'autre moitié de module* $q^{-\frac{1}{4}\deg(x)}$ *et on pose* $\varepsilon_\pi = \frac{1}{4}$.

(ii) *Pour deux telles représentations* π, π' *de* $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, $\mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{A})$, *tous les zéros de la fonction de Rankin–Selberg* $L(s, \pi \otimes \check{\pi}')$ *sont sur la droite* $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$ *si* $\varepsilon_\pi = \varepsilon_{\pi'}$ *et sur les droites* $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{4}$, $\mathrm{Re}\, s = \frac{3}{4}$ *si* $\varepsilon_\pi \neq \varepsilon_{\pi'}$.

Après cela, nous avons construit des compactifications des ouverts de type fini "naturels" dans les Cht^r généralisant celles de Drinfeld en rang 2 et plus récemment nous avons pu définir des structures de niveau arbitraire au–dessus de ces compactifications (en passant par la construction de compactifications équivariantes des quotients $\mathrm{PGL}_r^{n+1}/\mathrm{PGL}_r$).