Prof. Dr. Moritz Kaßmann
Fakultät für Mathematik
Wintersemester 2015/2016

Universität Bielefeld

Übungsaufgaben zu *Maß- und Integrationstheorie*
Lösungen von Blatt 0 vom 22.10.15

Aufgabe 0.1
Seien $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf einer Menge Ω, $m \in \mathbb{N}$ und $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $A_i \in \mathcal{A}$ für jedes $i \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen ebenfalls Elemente von $\mathcal{A}$ sind:

$$\emptyset, \quad \bigcup_{i=1}^m A_i, \quad \bigcap_{i=1}^m A_i, \quad \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i, \quad A_1 \setminus A_2.$$

Aufgabe 0.2

a) Seien $\Omega \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und $A \subset \Omega$. Bestimmen Sie $\sigma(\{A\})$.

b) Geben Sie auf der Menge $\Omega = \{1, 2, 3\}$ alle möglichen σ-Algebren an.

c) Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine beliebige Menge. Zeigen Sie, dass das Mengensystem

$$\mathcal{A} = \{A \subset \Omega | \, A \text{ höchstens abzählbar oder } \Omega \setminus A \text{ höchstens abzählbar}\}$$

eine σ-Algebra auf Ω ist.

Aufgabe 0.3
Sei Ω eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω sowie $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

- $\mu(\Omega) = 1$,
- μ ist additiv,
- μ ist von unten stetig[1].

Beweisen Sie, dass μ dann auch σ-additiv ist.

Lösungsvorschläge

Aufgabe 0.1

Aus der Definition einer σ-Algebra folgt:

- $\emptyset = \Omega^c \in \mathcal{A}$.

- Definiere eine Folge $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ durch $B_1 = A_1, B_2 = A_2, \ldots, B_m = A_m, B_{m+1} = B_{m+2} = \ldots = A_m$. Dann gilt $B_i \in \mathcal{A}$ für jedes $i \in \mathbb{N}$ und somit

$$\bigcup_{i=1}^m A_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i \in \mathcal{A}.$$

- $\displaystyle\bigcap_{i=1}^m A_i = \left(\bigcup_{i=1}^m A_i^c\right)^c \in \mathcal{A}.$

---

[1] d.h. für jede aufsteigende Folge $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset \Omega$, $A_i \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i).$$

- $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i^c\right)^c \in \mathcal{A}$.
- $A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap A_2^c \in \mathcal{A}$.

Aufgabe 0.2

a) $\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$.

b) Es gibt insgesamt fünf mögliche σ-Algebren auf Ω. Diese lauten:

$$\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\},\ \mathcal{A}_2 = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\},$$
$$\mathcal{A}_3 = \{\emptyset, \Omega, \{1,2\}, \{3\}\},\ \mathcal{A}_4 = \{\emptyset, \Omega, \{1,3\}, \{2\}\},\ \mathcal{A}_5 = \{\emptyset, \Omega, \{2,3\}, \{1\}\}.$$

Sobald eine σ-Algebra auf Ω zwei zweielementige Teilmengen von Ω enthält, ist sie gleich $\mathcal{P}(\Omega)$.

c) Wir verifizieren alle Eigenschaften einer σ-Algebra:

- $\Omega \in \mathcal{A}$, denn $\Omega \setminus \Omega = \emptyset$ und diese Menge ist höchstens abzählbar.
- Sei $A \in \mathcal{A}$, d.h. A höchstens abzählbar oder A^c höchstens abzählbar. O.B.d.A A höchstens abzählbar. Dann ist $(A^c)^c = A$ höchstens abzählbar und somit $A^c \in \mathcal{A}$.
- Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $A_i \in \mathcal{A}$ für jedes $i \in \mathbb{N}$. Betrachte die folgenden drei Fälle:
  (1) A_i höchstens abzählbar für jedes $i \in \mathbb{N}$. Dann ist $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ als abzählbare Vereinigung höchstens abzählbarer Mengen höchstens abzählbar.
  (2) Es existiert ein $i \in \mathbb{N}$, so dass A_i^c höchstens abzählbar ist. Dann ist $(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i)^c = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i^c$ höchstens abzählbar.

  Insgesamt gilt also $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.

Damit ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra.

Aufgabe 0.3

Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweiser disjunkter Mengen aus $\mathcal{A}$. Definiere $B_k = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$. Dann ist $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge und es gilt

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(B_k) = \lim_{k\to\infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i),$$

wobei in der zweiten Gleichheit Punkt 3, in der vierten Gleichheit Punkt 2 und im letzten Schritt Punkt 1 der Eigenschaften von μ verwendet wurden.