Prof. Dr. Moritz Kaßmann
Fakultät für Mathematik
Sommersemester 2015

Universität Bielefeld

Übungsaufgaben zu *Analysis 2*
Lösungen von Blatt IX vom 04.06.15

Aufgabe IX.1 (5 Punkte)
Beweisen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} u + \cos(uv) - vx &= 1, \\ \sin(u) - y - v &= 0, \end{aligned}$$

in einer Umgebung von $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (0, -1, 0, 1)$ durch differenzierbare Funktionen $u = u(x, y)$ und $v = v(x, y)$ aufgelöst werden kann und berechnen Sie die partiellen Ableitungen von u und v an der Stelle $(0, -1)$.

Aufgabe IX.2 (5 Punkte)
Bestimmen Sie eine Approximation für $y, z \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} x + 2y^2 + 3z^3 &= 6, \\ 2x^2 + 3y^3 + 4z^4 &= 9, \end{aligned}$$

für $x = 1,1$.
Hinweis: Beachten Sie, dass (y, z) als Funktion von x in der Nähe des Punktes $p = (1, 1, 1)$ darstellt werden kann.

Aufgabe IX.3 (3+3 Punkte)
Berechnen Sie die Weglänge $L(\gamma)$ der folgenden Wege und fertigen Sie eine Skizze an.

a) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix},$

b) $\gamma : [-a, a] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ für $a > 0$.

Aufgabe IX.4 (1+2+1 Punkte)
Sei $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Der Weg $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$\gamma(t) = \left(e^{ct} \cos t, e^{ct} \sin t\right).$$

a) Skizzieren Sie γ für $c = \frac{1}{2\pi}$ und $t \in [-2\pi, 2\pi]$.

b) Es bezeichne $L_{a,b}(\gamma)$ die Länge des Weges $\gamma\big|_{[a,b]}$. Berechnen Sie $L_{a,b}(\gamma)$.

c) Untersuchen Sie die Existenz des Grenzwertes $\lim\limits_{a \to -\infty} L_{a,0}(\gamma)$.

Lösungsvorschläge

Aufgabe IX.1

Setzen wir $\Omega = X \times Y$ für $X = Y = \mathbb{R}^2$ und betrachten die Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\begin{aligned} f_1(x, y, u, v) &= u + \cos(uv) - vx - 1, \\ f_2(x, y, u, v) &= \sin(u) - y - v, \end{aligned}$$

Erreichbare Punktzahl: 20

so ist die Nullstellenmenge dieser Funktion gerade die Lösungsmenge des genannten Gleichungssystems. Es gilt $f(0,-1,0,1) = (0,0)$ und f ist stetig differenzierbar. Wir berechnen zunächst die partiellen Differentiale:

$$d_X f(0,-1,0,1) = \begin{pmatrix} -v & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,-1,0,1)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$d_Y f(0,-1,0,1) = \begin{pmatrix} 1 - v\sin(uv) & -u\sin(uv) - x \\ \cos(u) & -1 \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,-1,0,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\det(d_Y f(0,-1,0,1)) = -1 \neq 0$. Alle Bedingungen für den Satz über implizite Funktionen sind also erfüllt, sodass eine stetig differenzierbare Funktion $g\colon U \to V$ existiert, wobei $U \subset \mathbb{R}^2$ eine Umgebung von $(0,-1)$ ist, $V \subset \mathbb{R}^2$ eine Umgebung von $g(0,-1) = (0,1)$, und auf U gilt $f(x,y,g(x,y)) = 0$. Die Funktionen $u = g_1$ und $v = g_2$ erfüllen also die Anforderungen aus der Aufgabenstellung.
Nun zu den Ableitungen von u und v an der Stelle $(0,-1)$:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \partial_1 g_1(0,-1) & \partial_2 g_1(0,-1) \\ \partial_1 g_2(0,-1) & \partial_2 g_2(0,-1) \end{pmatrix} &= -\left(d_Y f(0,-1,0,1)\right)^{-1} \cdot d_X f(0,-1,0,1) \\ &= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Es ist also $\partial_1 u(0,-1) = 1$, $\partial_2 u(0,-1) = 0$, $\partial_1 v(0,-1) = 1$ und $\partial_2 v(0,-1) = -1$.

Aufgabe IX.2
Sei $\Omega = X \times Y$ für $X = \mathbb{R}^2, Y = \mathbb{R}$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + 2y^2 + 3z^3 - 6 \\ 2x^2 + 3y^3 + 4z^4 - 9 \end{pmatrix}.$$

Dann ist f offensichtlich eine stetig differenzierbare Funktion und es gilt $f(1,1,1) = 0$. Des Weiteren gilt

$$d_Y f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 4y & 9z \\ 9y^2 & 16z^3 \end{pmatrix}\Bigg|_{(1,1,1)} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 9 & 16 \end{pmatrix}.$$

Da $\det(d_Y f(1,1,1)) = -17 \neq 0$, ist der Satz über implizite Funktionen anwendbar. Aus diesem Satz folgt die Existenz von Umgebungen $U \subset \mathbb{R}$ von 1 und $V \subset \mathbb{R}^2$ von $(1,1)$, sowie einer Funktion $g : U \to V$ mit der Eigenschaft

$$f(x, g_1(x), g_2(x)) = 0 \quad \text{und} \quad (g_1(1), g_2(1)) = (1,1).$$

Nach der Taylor-Formel erster Ordnung gilt:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} g_1(1,1) \\ g_2(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(1+0,1) \\ g_2(1+0,1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} g_1(1) \\ g_2(1) \end{pmatrix} - 0,1 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 9 & 16 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{16}{170} & \frac{9}{170} \\ \frac{9}{170} & -\frac{4}{170} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{170} \begin{pmatrix} 20 \\ -7 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Folglich sind $y = 1 - \frac{20}{170} = \frac{15}{17} \approx 0,8823$ und $z = 1 + \frac{7}{170} = \frac{177}{170} \approx 1,0412$ Approximationen für die Gleichung mit $x = 1,1$.

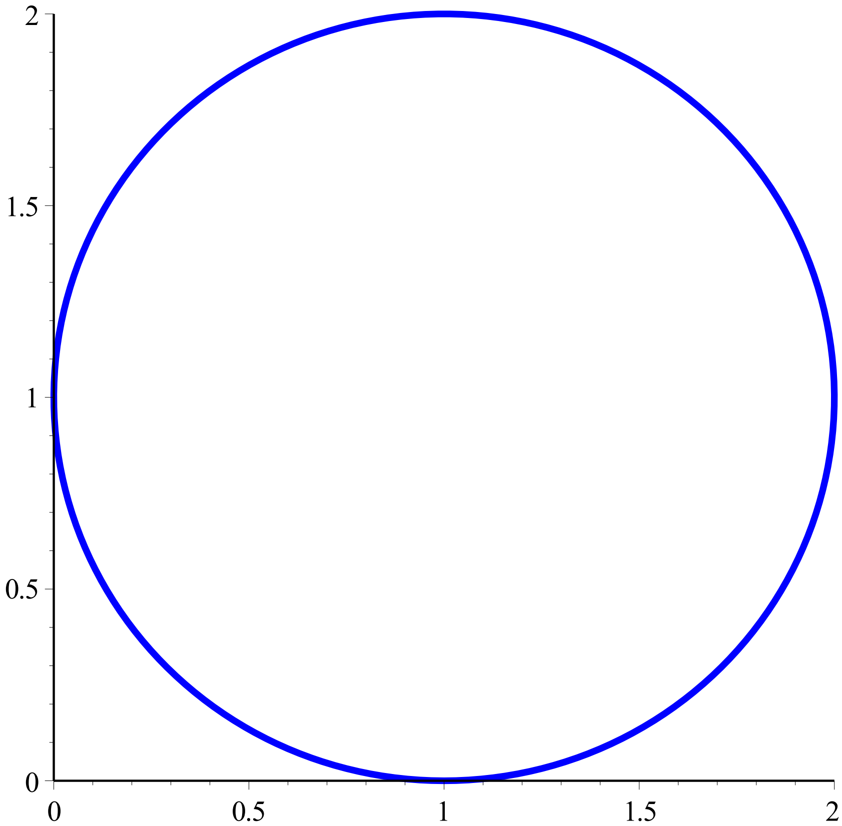
Aufgabe IX.3

a) Der Weg γ ist stetig differenzierbar und es gilt für jedes $t \in [0, 2\pi]$:

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Folglich ist die Weglänge $L(\gamma)$ gegeben durch

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t)} \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1 \mathrm{d}t = 2\pi.$$

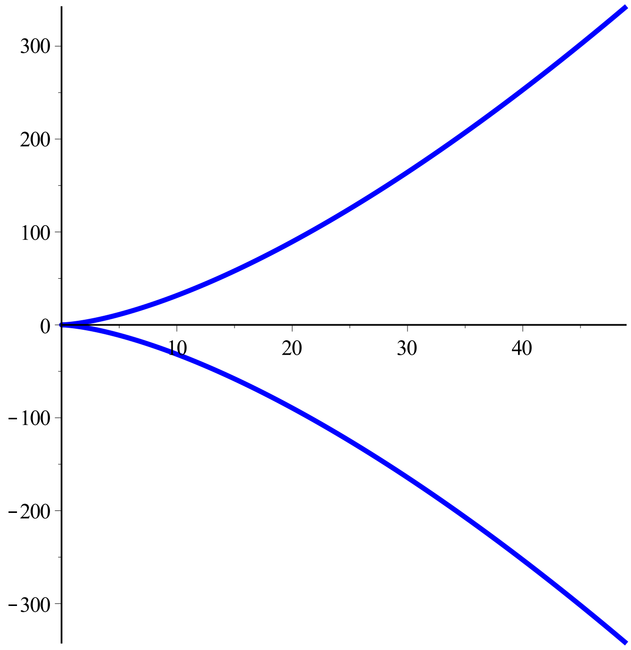


b) Der Weg γ ist stetig differenzierbar und es gilt für jedes $t \in [-a, a]$:

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}.$$

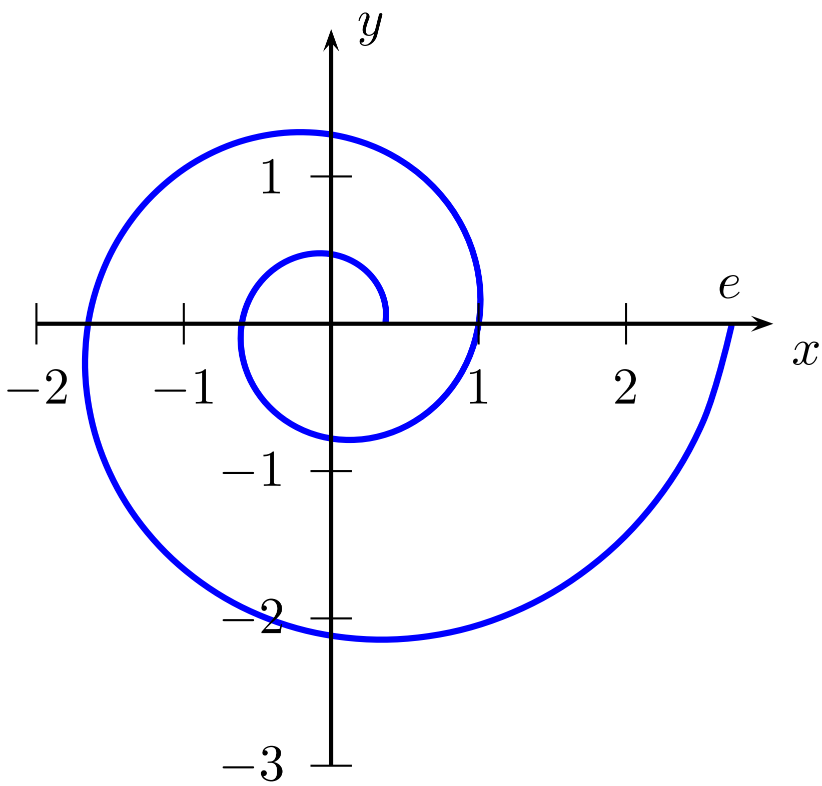
Folglich ist die Weglänge $L(\gamma)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_{-a}^{a} \|\gamma'(t)\| \mathrm{d}t = \int_{-a}^{a} \sqrt{4t^2 + 9t^4} \mathrm{d}t = 2 \int_0^a t\sqrt{4 + 9t} \mathrm{d}t \\ &= \left(\frac{2}{27} (4 + 9t^2)^{3/2} \right) \Big|_0^a = \frac{2}{27} \left((4 + 9a^2)^{3/2} - 8 \right) \end{aligned}$$



Aufgabe IX.4

a) Skizze des Weges $\gamma(t) = \left(e^{\frac{t}{2\pi}}\cos t, e^{\frac{t}{2\pi}}\sin t\right)$ im Bereich $t \in [-2\pi, 2\pi]$.



b) γ ist stetig differenzierbar und es gilt für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$\gamma'(t) = \left(ce^{ct}\cos t - e^{ct}\sin t, ce^{ct}\sin t + e^{ct}\cos t\right).$$

Die Länge der Weges $\gamma\big|_{[a,b]}$ kann man nun berechnen:

$$\begin{aligned} L_{a,b}(\gamma) &= \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_a^b \sqrt{(ce^{ct}\cos t - e^{ct}\sin t)^2 + (ce^{ct}\sin t + e^{ct}\cos t)^2}\,dt \\ &= \int_a^b e^{ct}\sqrt{(c\cos t - \sin t)^2 + (c\sin t + \cos t)^2}\,dt \\ &= \int_a^b e^{ct}\sqrt{c^2+1}\,dt = \sqrt{c^2+1}\left[\frac{1}{c}e^{ct}\right]_{t=a}^{b} = \frac{\sqrt{c^2+1}}{c}\left(e^{cb} - e^{ca}\right). \end{aligned}$$

c) Für $b = 0$ erhält aus dem Teil b) nun $L_{a,0}(\gamma) = \frac{\sqrt{c^2+1}}{c}(1 - e^{ca})$. Man erkennt nun, dass

$$\lim_{a\to-\infty} L_{a,0}(\gamma) \begin{cases} \text{existiert nicht}, & \text{falls } c < 0, \\ = \frac{\sqrt{c^2+1}}{c}, & \text{falls } c > 0. \end{cases}$$